Н. К. Кривулин

МЕТОДЫ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математико-механический факультет

Н. К. Кривулин

МЕТОДЫ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

С.-Петербург
2009

УДК 519.6
ББК 22.18
К82

Р е ц е н з е н т ы: д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. В. Д. Матвеенко (СПбЭМИ РАН),
д-р физ.-мат. наук, проф. О. Н. Граничин (СПбГУ)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Кривулин Н. К.

К82 **Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем.** — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. — 256 с.

ISBN 978-5-288-04906-4

Книга посвящена идемпотентной алгебре — новой области прикладной математики, связанной с изучением полуколец с идемпотентным сложением. Исследован ряд теоретических и вычислительных задач идемпотентной алгебры, включая решение различных типов обобщенных линейных векторных уравнений, отыскание собственных значений и исследование итераций обобщенного линейного оператора. Рассмотрены различные приложения идемпотентной алгебры для решения задач моделирования и анализа реальных систем и процессов в технике, экономике, управлении и других областях. Особое внимание уделено изучению стохастических динамических систем, эволюция которых описывается при помощи обобщенного линейного векторного уравнения.

Книга предназначена для специалистов в области математического моделирования, вычислительных методов и исследования операций, а также для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей.

Библиогр. 101 назв. Ил. 23.

ББК 22.18

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-01-00808).

ISBN 978-5-288-04906-4

ВВЕДЕНИЕ

Идемпотентная алгебра представляет собой область прикладной математики, связанную с изучением полуколец с идемпотентным сложением. За последние десятилетия идемпотентная алгебра превратилась в один из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики, роль которого как теоретической дисциплины и эффективного инструмента решения практических задач в экономике, технике, управлении и других областях постоянно растет.

Можно назвать несколько причин увеличения интереса к этой теме со стороны как теоретиков, так и прикладных специалистов. Во-первых, многие классические задачи оптимизации (задачи оптимизации на графах, задача динамического программирования, задача о назначении и другие) сводятся в терминах идемпотентной алгебры к решению линейных уравнений, нахождению собственных чисел и векторов линейного оператора и тому подобным вычислениям. В то же время оказывается, что некоторые известные алгоритмы решения таких задач после их перевода на язык идемпотентной алгебры оказываются идемпотентными аналогами традиционных вычислительных процедур линейной алгебры таких, как метод Гаусса-Зейделя и метод Якоби.

Кроме того, эволюция многих динамических систем, которые встречаются на практике (например, системы и сети с очередями), может быть описана при помощи линейных векторных уравнений идемпотентной алгебры. При этом открываются новые возможности для исследования таких систем на основе подходящим образом определенных идемпотентных аналогов математических объектов и методов классической линейной алгебры и теории линейных динамических систем. Другими словами, представление в терминах идемпотентной алгебры позволяет целый ряд нелинейных в обычном смысле задач превращать в линейные. Можно ожидать, что это должно приводить к упрощению анализа и решения задачи, а также облегчать представление и интерпретацию результатов.

Переходя к краткому обзору литературы, заметим, что одной из первых публикаций по идемпотентной алгебре и ее приложениям является работа С. К. Клини [80], опубликованная в 1956 г. Ссылки на другие ранние публикации можно найти в подробных обзорах, приведенных в монографиях [69, 101].

В работах Н. Н. Воробьева [7, 8, 9], а также А. А. Корбута [15, 16] была построена алгебраическая теория идемпотентных векторных полумодулей и заданных на таких полумодулях линейных операторов (в этих работах они назывались соответственно экстремальными пространствами и линейными экстремальными операторами). В частности, была сформулирована и решена проблема собственных значений оператора, изучены уравнения вида $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, заданные на векторных полумодулях, а также рассмотрен ряд примеров практических приложений полученных результатов. Следует заметить, что в качестве основного объекта исследования в этих работах рассматривалось числовое идемпотентное полукольцо, в котором для всякого ненулевого элемента существует обратный по умножению. Такое полукольцо часто называют идемпотентным полуполем.

В это же время И. В. Романовским в рамках изучения асимптотических свойств решений задачи динамического программирования был получен идемпотентный аналог известного результата о спектре ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве [48, 49, 50] (см. также [38]).

Следующий шаг в развитии идемпотентной алгебры связан с публикацией монографий Р. А. Кунингхайма-Грина [69] и У. Циммерманна [101]. Часть вопросов, которые рассматриваются в [69], повторяют тематику исследований Н. Н. Воробьева. Однако представленные в работе результаты опираются на применение несколько иной алгебраической техники, которая, в частности, позволяет записывать эти результаты в компактной матричной форме. Наряду с идемпотентными полуполями изучаются более общие идемпотентные полукольца, которые полуполями не являются.

В работе [101] теория и методы идемпотентной алгебры представлены в контексте общей задачи оптимизации на произвольных упорядоченных алгебраических структурах. Имеется обширный материал обзорного характера, касающийся ранних публикаций в области идемпотентной алгебры, включая теоретические результаты и практические приложения.

Свое дальнейшее развитие идемпотентная алгебра получила в материалах научной школы, возглавляемой акад. В. П. Масловым, в рамках изучения и построения теории идемпотентного анализа как области исследования полумодулей функций со значением в полукольце с идемпотентным сложением [11, 42, 40, 41, 39, 52, 53]. Эти и другие работы В. П. Маслова, В. Н. Колокольцова, Г. Л. Литвинова и их коллег заложили основы и сформировали методологическую базу нового научного направления — идемпотентной математики, которая объединяет идемпотентную алгебру, идемпотентный анализ, а также идемпотентный функциональный анализ.

Различные аспекты теории и применения идемпотентной алгебры при решении прикладных задач рассматривались в исследованиях Ф. Бачелли, Я. Г. Олсдера, Д. С. Голана, Б. Хейдерготта и других авторов, включая монографии [55, 65, 66, 77, 76], каждая из которых содержит подробный обзор литературы, относящейся к рассматриваемому кругу вопросов.

К числу публикаций, в которых развитие моделей и методов идемпотентной алгебры сочетается с решением прикладных задач, относятся работы В. Д. Матвеенко [43, 97, 44, 98], С. Л. Блюмина [58, 3, 4], а также работы автора [83, 85, 87, 89, 20, 36, 21] и другие.

В частности, в работах [43, 97, 44, 98] на основе методов идемпотентной алгебры решен ряд задач исследования структуры моделей экономической динамики. В [98] рассматривается проблема собственных значений для полумодуля над идемпотентным полукольцом, которое не является полуполем. Публикации [58, 3, 4] посвящены изучению взаимосвязей и параллелей между обычной линейной алгеброй и обобщенной линейной алгеброй над полукольцами разного вида, включая идемпотентные полукольца. Обсуждаются различные приложения, а также роль и значения обобщенной линейной алгебры в задачах искусственного интеллекта и других областях прикладной математики.

Среди значительного числа публикаций в области идемпотентной алгебры имеется относительно небольшая часть, которая посвящена решению стохастических задач (см., например, [63, 55, 54, 78, 71, 72, 73, 89, 90, 76, 34]). Такие задачи обычно связаны с исследованием эргодических свойств обобщенных линейных стохастических динамических систем и включают исследование асимптотического поведения вектора состояний системы. Одной из наиболее распространенных задач такого типа является вычисление средней асимптотической скорости роста вектора состояний, которую часто называют показателем Ляпунова системы.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие аппарата и методов идемпотентной алгебры для решения задач моделирования и анализа сложных систем. В качестве основного идемпотентного полукольца рассматриваются числовые идемпотентные полуполя (полукольца, в которых каждый ненулевой элемент имеет обратный относительно операции умножения). Наличие группового свойства у операции умножения существенно обогащает аппарат идемпотентной алгебры. Это свойство, как будет показано ниже, обеспечивает возможность получения новых результатов, а также упрощает доказательство уже известных.

Полученные результаты применяются для исследования как детерминированных, так и стохастических моделей реальных систем, которые часто можно встретить в технике, экономике, управлении и других областях. Особое внимание уделяется построению и анализу различных моделей систем с очередями.

Глава 1 содержит основные сведения, касающиеся идемпотентной алгебры, на которые опирается изложение материала, представленного в последующих главах. Даны необходимые определения и обозначения, которые сопровождаются обзором предварительных результатов. Сначала рассматриваются понятия идемпотентного полукольца и полуполя. Изучается векторный полумодуль над идемпотентным полуполем. Затем рассматривается идемпотентная алгебра матриц. В заключение представлен общий вид, а также два частных случая обобщенного линейного уравнения.

В главе 2 рассматривается задача решения линейного уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ и другие связанные с ней вопросы, включая линейную независимость векторов, решение линейных неравенств и систем. Предлагается подход, при котором решение уравнения сводится к анализу расстояния между векторами в соответствующем метрическом пространстве. Используется метрика, для вычисления которой достаточно выполнения основных бинарных операций полукольца, дополненных операцией псевдообращения. Это позволяет представить результаты в компактной векторной форме в терминах исходного полукольца, а также дать им простую геометрическую интерпретацию на плоскости в декартовой системе координат.

Сначала решается задача определения расстояния от заданного вектора до линейной оболочки векторов. Полученные результаты используются для выяснения условий существования и единственности решения уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, а также для представления общего решения. Рассматривается решение смешанной системы, которая состоит из уравнений и неравенств, а также решение уравнения $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$. Приводятся примеры применения полученных результатов к решению практических задач.

В главе 3 описывается подход к решению однородного $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ и неоднородного $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ линейных уравнений, который направлен на получение результатов в компактной векторной форме, удобной как для разработки вычислительных процедур, так и для формального анализа. Определяется некоторая функция Tr, заданная на множестве квадратных матриц. Для уравнения с матрицей A находятся условия существования решения, которые используют величину $\mathrm{Tr}\, A$ аналогично тому, как используется определитель при анализе обычных линейных уравнений.

Получены выражения для общего решения уравнений в замкнутой векторной форме. Найдены решения однородного $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}$ и неоднородного $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}$ неравенств. Рассмотрены задачи совместного решения уравнений и неравенств разных типов. Представлены примеры возможных приложений полученных результатов и связанных с ними практических задач.

В главе 4 проблема собственных значений матрицы линейного оператора решена на основе применение идемпотентного аналога определителя, введенного в предыдущей главе, а также характеристического многочлена матрицы. В случае неразложимых матриц это позволяет свести решение проблемы к исследованию корней характеристического многочлена, которое в идемпотентной алгебре не требует большого труда.

Изучены вопросы существования и единственности собственного числа неразложимой матрицы, получено выражение для вычисления собственного числа и общий вид собственного вектора. Эти результаты затем обобщаются на случай разложимой матрицы.

Доказано неравенство для степеней матрицы и ее спектрального радиуса, которое является дальнейшим обобщением известного неравенства Карре. Изучены некоторые экстремальные свойства собственных значений и векторов матрицы.

Представлены результаты вычисления спектрального радиуса для некоторых типов матриц линейных операторов, включая симметричные матрицы, матрицы подобия, а также матрицы единичного ранга. Исследована задача аппроксимации произвольной матрицы с помощью матрицы единичного ранга.

Глава 5 посвящена изучению асимптотических свойств итераций линейного оператора и доказательству соответствующих теорем сходимости. Получен ряд вспомогательных алгебраических соотношений, включая один частный случай биномиального разложения для матриц, а также неравенства для собственного числа, следа и нормы матриц, все элементы которых отличны от нуля. Эти соотношения применяются при исследовании сходимости для любой квадратной матрицы A последовательности $\|A^k\|^{1/k}$, где обозначения степени и нормы понимаются в смысле идемпотентной алгебры. Показано, что общая формула для вычисления спектрального радиуса матрицы может быть построена на основе полученных результатов как некоторое их следствие.

В главе 6 изучаются стохастические динамические системы, эволюция которых описывается при помощи линейных в некотором идемпотентном полукольце уравнений $\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1)$, где $A(k)$ — случайная матрица, $\boldsymbol{x}(k)$ — вектор состояний системы. Рассматривается задача нахождения средней скорости роста вектора состояний для систем (показателя Ляпунова). Найдены общие условия существования предела, который определяет величину средней скорости роста. Показано, как средняя скорость роста может быть вычислена в случае диагональной и изометрической матрицы, а также матрицы единичного ранга.

Изучена динамическая система с треугольной случайной матрицей. В качестве вспомогательных результатов получено алгебраическое неравенство для нормы произведения треугольных матриц, а также ряд неравенств для математического ожидания максимума сумм случайных величин. Показано, что при достаточно общих условиях показатель Ляпунова определяется только средними значениями диагональных элементов матрицы.

В заключение предложен метод решения задачи определения показателя Ляпунова на основе некоторого разложения матрицы системы на множители и показано, как этот метод может быть применен в случае матрицы системы неполного ранга.

Целью главы 7 является решение задачи определения средней скорости роста вектора состояний для систем второго порядка в полукольце с операциями максимума и сложения с матрицами, случайные элементы которых независимы и имеют экспоненциальные распределения с произвольными параметрами. Сначала исследуются системы с матрицами, часть элементов которых не являются случайными и равны нулю. Используется подход, который опирается на построение и анализ некоторой последовательности одномерных функций распределения. Величина показателя Ляпунова находится как математическое ожидание случайной величины, определяемой предельным распределением этой последовательности.

Для решения задачи в общем случае предлагается алгебраический подход на основе построения последовательности плотностей одномерных распределений вероятностей и решения интегрального уравнения для нахождения соответствующей предельной плотности. Определение средней скорости роста вектора состояний сводится к ряду алгебраических вычислений, включая решение алгебраической системы уравнений и вычисление значения некоторого линейного функционала от полученного решения. Приведены примеры решения задачи в общем виде для ряда частных случаев.

В главе 8 рассматривается задача оценивания показателя Ляпунова. Представлен ряд простых оценок для произвольных, регулярных и положительных матриц, а также даны соответствующие примеры. Вводится и изучается класс оценок для систем с неразложимой матрицей на основе использования матриц единичного ранга. Применяемый при этом подход опирается на замену матрицы системы $A(k)$ на ее оценку, построенную при помощи матриц вида $\boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k)$, где $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$ — некоторые векторы. Такая замена позволяет вместо произведений матриц рассматривать арифметические суммы скалярных произведений соответствующих векторов и тем самым упростить решение. Даны примеры вычисления оценок для систем с матрицей второго порядка, элементы которой имеют экспоненциальное распределение с единичным средним.

В главе 9 представлены модели динамики систем с очередями, построенные с применением аппарата и методов идемпотентной алгебры. Сначала описывается модель сети с неограниченной емкостью накопителей и произвольным числом требований, которые могут находиться в узлах в начальный момент времени. Для этой модели составляется неявное уравнение для вектора состояний системы, которое имеет вид неоднородного линейного уравнения в смысле полукольца с операциями максимума и сложения.

Найдены условия, при которых неявное уравнение разрешимо относительно вектора состояний. Решение уравнения представлено в виде линейного рекуррентного динамического уравнения.

Полученные результаты распространяются на модели сетей с ограниченной емкостью накопителей и возможностью блокировки. Приведены примеры моделей различных систем, включая открытые и замкнутые многофазные системы, а также системы с синхронизацией движения требований. Рассмотрены последовательные и параллельные алгоритмы имитационного моделирования для многофазных систем и исследована их эффективность.

Глава 10 содержит ряд примеров применения моделей и методов идемпотентной алгебры при исследовании систем с очередями. В этой главе строится общая нижняя оценка среднего времени цикла обслуживания для всех рассматриваемых моделей. Показано, что для ациклических моделей сетей с неограниченными накопителями указанная оценка совпадает с соответствующим точным значением.

Рассматриваются примеры моделей сетей, включая многофазные системы с неограниченной и конечной емкостью накопителей, а также сети с синхронизацией передвижения требований. Для этих моделей величина среднего времени цикла обслуживания вычисляется на основе разложения матрицы системы.

В заключение изучается задача оценивания среднего времени безотказной работы для ациклических сетей с очередями. Получены верхние и нижние оценки среднего времени безотказной работы, а также даны примеры вычисления оценок.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам книги В. Д. Матвеенко и О. Н. Граничину, а также А. В. Соколову за полезные замечания и предложения, которые позволили устранить ряд недостатков рукописи.

Автор признателен С. А. Нуриджановой за большую помощь в корректуре и редактировании текста книги, а также Ю. А. Кривулиной за внимательное прочтение и корректорские замечания по первому варианту рукописи.

Глава 1

ИДЕМПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Введение

В настоящее время имеется целый ряд монографий и учебников, посвященных теории и приложениям идемпотентной алгебры. Обстоятельное введение в указанную область можно найти, например, в опубликованных в последние годы работах [55, 42, 65, 77].

В этой главе приведены основные сведения, касающиеся идемпотентной алгебры, на которые опирается изложение материала последующих глав. Даны необходимые определения и обозначения, а также обзор соответствующих предварительных результатов. Обзор включает, в основном, результаты, которые, с одной стороны, носят достаточно общий характер, а, с другой стороны, могут быть проверены с помощью несложных рассуждений. Другие вспомогательные результаты, которые используются в отдельных частях работы, приведены в соответствующих главах.

Вначале рассматриваются понятия идемпотентных полукольца и полуполя. Изучаются свойства операций сложения и умножения, заданных на полукольце, вводится отношение порядка и даются примеры числовых полуколец. Выбирается метрика, для вычисления которой достаточно выполнения основных бинарных операций полукольца, дополненных операцией обращения. Представлены идемпотентные аналоги биномиального тождества и неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Изучается векторный полумодуль над идемпотентным полуполем. Операциям полумодуля дается простая и наглядная геометрическая интерпретация на плоскости в декартовой системе координат. Обсуждается свойство линейной зависимости векторов. На векторном полумодуле вводится метрика на основе введенной выше метрики для скалярного полукольца.

Далее рассматривается идемпотентная алгебра матриц. Перечисляются свойства операций и вводится норма матрицы. Изучается идемпотентное полукольцо квадратных матриц. Выявляется связь между вычислением степени матрицы и свойствами соответствующего графа. Рассматриваются обратная и псевдообратная матрицы. Наконец, для матриц вводится функция расстояния.

В заключение представлен общий вид, а также два частных случая обобщенного линейного уравнения, которые называются уравнениями 1-го и 2-го рода.

1.2. Идемпотентные полукольцо и полуполе

Пусть $\mathbb{X}$ — числовое множество, на котором заданы операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. Будем предполагать, что $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes \rangle$ является коммутативным полукольцом с нулем и единицей, в котором сложение идемпотентно, а каждый ненулевой элемент имеет обратный по умножению.

Обозначим нулевой и единичный элементы полукольца символами $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$. Перечислим основные свойства операций полукольца.

1.2.1. Свойства операций. Множество $\mathbb{X}$ образует относительно операции сложения идемпотентную коммутативную полугруппу с нейтральным элементом. Другими словами, операция сложения для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$ удовлетворяет условиям:

1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (ассоциативность),
2) $x \oplus y = y \oplus x$ (коммутативность),
3) $x \oplus \mathbb{0} = x$ (существование нуля),
4) $x \oplus x = x$ (идемпотентность).

Относительно умножения имеем коммутативную группу, в которой выполняется:

5) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ (ассоциативность),
6) $x \otimes y = y \otimes x$ (коммутативность),
7) $x \otimes \mathbb{1} = x$ (существование единицы),
8) если $x \neq \mathbb{0}$, то существует элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$ (существование обратного).

Наконец, сложение и умножение связаны свойствами:

9) $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$ (дистрибутивность),

10) $x \otimes \mathbb{0} = \mathbb{0}$ (закон поглощения).

С учетом групповых свойств умножения полукольцо $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes \rangle$ часто называют полуполем.

В силу ассоциативности умножения операция возведения в степень может быть введена обычным путем. Положим $\mathbb{X}_+ = \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$. Для любого $x \in \mathbb{X}_+$ и целого $p > 0$ имеем

$$x^0 = \mathbb{1}, \quad x^p = x^{p-1} \otimes x = x \otimes x^{p-1}, \quad x^{-p} = (x^{-1})^p, \quad \mathbb{0}^p = \mathbb{0}.$$

Предполагается, что введенная операция возведения в целую степень может быть естественным образом распространена в полукольце на случай рационального показателя степени.

Далее в алгебраических выражениях знак умножения $\otimes$, как обычно, опускается. Обозначение степени используется в смысле идемпотентной алгебры. Однако при записи показателя степени применяются обычные арифметические операции.

1.2.2. Отношение порядка. В силу идемпотентности сложения на $\mathbb{X}$ определено отношение $\leq$ частичного порядка так, что $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Легко видеть, что из такого определения прямо следует выполнение свойств рефлексивности, транзитивности и антисимметричности отношения, а также справедливость неравенств $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$. Кроме того, нетрудно проверить свойство монотонности операций сложения и умножения, по которому при условии $x \leq y$ для любого z выполняются неравенства $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$.

Ниже знаки операций отношения понимаются в смысле указанного частичного порядка. Ясно, что в соответствии с этим порядком для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \geq \mathbb{0}$. Наряду с этим предполагается, что множество $\mathbb{X}$ при необходимости всегда может быть дополнено элементом ∞ таким, что $x \leq \infty$ для всякого $x \in \mathbb{X}$.

Заметим, что во многих задачах, включая рассматриваемые ниже примеры и приложения, введенный порядок оказывается линейным. Учитывая также, что для такого порядка доказательство многих утверждений существенно упрощается, далее будем считать, что индуцированный сложением порядок является линейным.

1.2.3. Примеры идемпотентных полуколец. К полукольцам рассматриваемого типа относятся

$$\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +\rangle, \quad \mathbb{R}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +\rangle,$$
$$\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times\rangle, \quad \mathbb{R}_{\min,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times\rangle,$$

где $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

В полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ нулевым элементом является $-\infty$, а единичным — число 0. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует обратный элемент x^{-1}, равный $-x$ в обычной арифметике. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ определена степень x^y, значение которой соответствует арифметическому произведению xy. Частичный порядок совпадает с обычным линейным порядком. Максимальным элементом служит $+\infty$.

В $\mathbb{R}_{\min,\times}$ нулем является $+\infty$, единицей — число 1. Обратный элемент и степень имеют обычный смысл. Отношение $\leq$ определяет порядок, обратный по отношению к обычному линейному порядку на $\mathbb{R}_+$. Роль элемента ∞ играет число 0.

Легко видеть, что полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$, $\mathbb{R}_{\min,+}$, $\mathbb{R}_{\max,\times}$ и $\mathbb{R}_{\min,\times}$ изоморфны друг другу. На рис. 1.1 приведена диаграмма, на которой указаны отображения изоморфизма (представленные с помощью обычных операций) для этих полуколец.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{R}_{\max,+} \arrow[r, shift left, "y=-x"] \arrow[d, shift left, "y=e^x"] & \mathbb{R}_{\min,+} \arrow[l, shift left, "y=-x"] \arrow[d, shift left, "y=e^x"] \\
\mathbb{R}_{\max,\times} \arrow[r, shift left, "y=1/x"] \arrow[u, shift left, "y=\ln x"] & \mathbb{R}_{\min,\times} \arrow[l, shift left, "y=1/x"] \arrow[u, shift left, "y=\ln x"]
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.1. Изоморфизм полуколец $\mathbb{R}_{\max,+}$, $\mathbb{R}_{\min,+}$, $\mathbb{R}_{\max,\times}$ и $\mathbb{R}_{\min,\times}$

Полукольцо $\mathbb{R}_{\max,\min} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, \min\rangle$ представляет собой пример идемпотентного полукольца, которое не является полуполем. В этом полукольце $\mathbb{0} = -\infty$, $\mathbb{1} = +\infty$. Обратный элемент по отношению к операции min не существует, а понятие степени не определяется. Отношение порядка соответствует обычному линейному порядку. Максимальным элементом является $+\infty$.

Другие примеры идемпотентных полуколец можно найти, например, в [69, 101, 42].

1.2.4. Метрика. На полукольце $\mathbb{X}$ определим функцию расстояния ρ следующим образом. Для любых $x, y \neq \mathbb{0}$ положим

$$\rho(x, y) = y^{-1}x \oplus x^{-1}y. \tag{1.1}$$

Учитывая, что функция ρ принимает значения на интервале $[\mathbb{1}, \infty)$, естественно положить $\rho(x, y) = \mathbb{1}$, если $x = y = \mathbb{0}$. Наконец, удобно считать, что $\rho(x, y) = \infty$, если один из аргументов x или y равен нулю, а другой отличен от нуля.

В полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$ функция ρ совпадает с обычным расстоянием $d(x, y) = |x - y|$. В силу изоморфизма $\mathbb{R}_{\max,+}$ полукольцам $\mathbb{R}_{\max,\times}$, $\mathbb{R}_{\min,+}$ и $\mathbb{R}_{\min,\times}$ в каждом из них ρ порождает некоторую функцию расстояния. Например, в $\mathbb{R}_{\max,\times}$ имеем

$$\rho'(x, y) = \ln(y^{-1}x \oplus x^{-1}y).$$

Для всех перечисленных полуколец функция (1.1) удовлетворяет условию симметрии и неравенству треугольника. При помощи соответствующего изоморфизма эта функция может быть превращена в метрику для всякого полукольца, изоморфного $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Ниже в качестве метрики будем использовать функцию (1.1) для всех рассматриваемых полуколец, опуская для простоты дополнительные преобразования изоморфизма.

Заметим, что введение на полукольце $\mathbb{X}$ метрики позволяет естественным образом определить понятия непрерывности и сходимости относительно этой метрики.

1.2.5. Биномиальное тождество. Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и рационального числа $\alpha \geq 0$ справедливо биномиальное тождество

$$(x \oplus y)^{\alpha} = x^{\alpha} \oplus y^{\alpha}. \tag{1.2}$$

Если порядок на $\mathbb{X}$ — линейный, то для доказательства тождества достаточно проверить его в каждом из случаев $x \leq y$ и $x > y$.

При условии частичного порядка докажем (1.2) для целого показателя $\alpha = p \geq 0$. Если одно из чисел x или y равно нулю, то тождество становится тривиальным. Предположим, что $x, y \neq \mathbb{0}$.

Проверим (1.2) по индукции. При $p = 0, 1$ имеем очевидные равенства. Допустим, что тождество верно при некотором p. Тогда, в частности, $x^p \oplus y^p \geq x^q y^{p-q}$ при всех $q = 0, 1, \ldots, p$.

Покажем, что оно сохраняется и при $p+1$. Ясно, что всегда справедливо неравенство $(x \oplus y)^{p+1} \geq x^{p+1} \oplus y^{p+1}$. Поверим выполнение противоположного неравенства. Рассмотрим величину

$$\begin{aligned}(x \oplus y)^{p+1}(x \oplus y) = (x^p \oplus y^p)(x \oplus y)^2 = \\ = x^{p+2} \oplus x^{p+1}y \oplus x^p y^2 \oplus x^2 y^p \oplus x y^{p+1} \oplus y^{p+2} \leq \\ \leq x^{p+2} \oplus x^{p+1}y \oplus x y^{p+1} \oplus y^{p+2} = (x^{p+1} \oplus y^{p+1})(x \oplus y).\end{aligned}$$

После сокращения на $x \oplus y \neq \mathbb{0}$, имеем $(x \oplus y)^{p+1} \leq x^{p+1} \oplus y^{p+1}$.

Применяя тождество (1.2), легко показать, что для всех $x, y \in \mathbb{X}$ и рациональных чисел $\alpha, \beta \geq 0$ выполняется

$$x^\alpha y^\beta \leq (x \oplus y)^{\alpha+\beta}. \qquad (1.3)$$

Действительно, из (1.2) следует, что

$$(x \oplus y)^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha \geq x^\alpha, \qquad (x \oplus y)^\beta = x^\beta \oplus y^\beta \geq y^\beta,$$

откуда после перемножения неравенств приходим к (1.3).

Заметим, что при $\alpha = \beta = 1/2$ из (1.3) получаем аналог неравенства между геометрическим и арифметическим средними

$$\sqrt{xy} \leq x \oplus y. \qquad (1.4)$$

1.3. Идемпотентный векторный полумодуль

Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{X}^m$, где $\mathbb{X}$ — идемпотентное полуполе. Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$, где

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T, \qquad \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$$

и числа $x \in \mathbb{X}$ определены операции

$$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = (a_1 \oplus b_1, \ldots, a_m \oplus b_m)^T, \qquad x\boldsymbol{a} = (xa_1, \ldots, xa_m)^T.$$

Вектор $\mathbb{0} = (\mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0})^T \in \mathbb{X}^m$ называется нулевым.

1.3.1. Свойства операций. Из свойств операций полукольца $\mathbb{X}$ вытекает, что при любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{X}^m$ сложение векторов удовлетворяет условиям

1) $\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c}$ (ассоциативность),
2) $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a}$ (коммутативность),
3) $\boldsymbol{a} \oplus \mathbb{0} = \boldsymbol{a}$ (существование нуля),
4) $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (идемпотентность).

Кроме того, при любых $x, y \in \mathbb{X}$ для операции умножения на скаляр имеем

5) $x(y\boldsymbol{a}) = (xy)\boldsymbol{a}$ (ассоциативность),
6) $\boldsymbol{a}\mathbb{1} = \mathbb{1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (существование единицы).

Сложение векторов и умножение вектора на скаляр связаны свойствами дистрибутивности

7) $x(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) = x\boldsymbol{a} \oplus x\boldsymbol{b}$,
8) $(x \oplus y)\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a} \oplus y\boldsymbol{a}$.

Множество $\mathbb{X}^m$ с указанными операциями образует векторный полумодуль над идемпотентным полукольцом $\mathbb{X}$.

Для полумодуля $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ геометрическая интерпретация операции сложения векторов на плоскости в обычной декартовой системе координат приведена на рис. 1.2. Заметим, что пример сложения векторов с положительными координатами, представленный слева, может быть отнесен и к полумодулю $\mathbb{R}^2_{\max,\times}$.

При геометрическом сложении двух векторов на плоскости применяется следующее «правило прямоугольника». Суммой двух векторов является вектор, которому соответствует правая верхняя вершина прямоугольника, построенного на пересечении перпендикуляров, проведенных из концов векторов к координатным осям.

Это правило легко распространяется на случай сложения векторов в трехмерном пространстве в обычной системе координат в форме соответствующего «правила прямого параллелепипеда».

В $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на число x эквивалентно вычислению $\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{1}$ в обычных обозначениях, где $\boldsymbol{1} = (1,1)^T$. В полумодуле $\mathbb{R}^2_{\max,\times}$ умножение имеет обычный смысл (см. рис. 1.3).

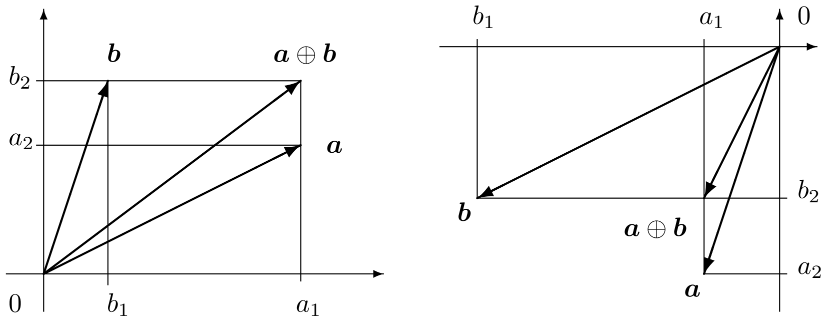


Рис. 1.2. Сложение векторов на плоскости

Операции сложения векторов и умножение вектора на скаляр являются монотонными в том смысле, что для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{X}^m$ и $x \in \mathbb{X}$ из покоординатного неравенства $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ следуют покоординатные неравенства $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}$ и $x\boldsymbol{a} \leq x\boldsymbol{b}$.

1.3.2. Линейная зависимость векторов. Рассмотрим произвольную систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{X}^m$. Вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, если его можно представить в виде разложения (линейной комбинации)

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$$

с коэффициентами $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{X}$.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ является линейно зависимой, если хотя бы один из векторов системы линейно зависит от других, и линейно независимой — в противном случае.

Если вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, но не зависит от любой ее подсистемы, то такая система называется минимальной системой, порождающей $\boldsymbol{b}$.

Нетрудно проверить, что представление любого вектора в виде разложения по векторам его минимальной порождающей системы является единственным. Действительно, предположим, что имеется два разложения вектора $\boldsymbol{b}$ по векторам его минимальной порождающей системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n = x_1'\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n'\boldsymbol{a}_n,$$

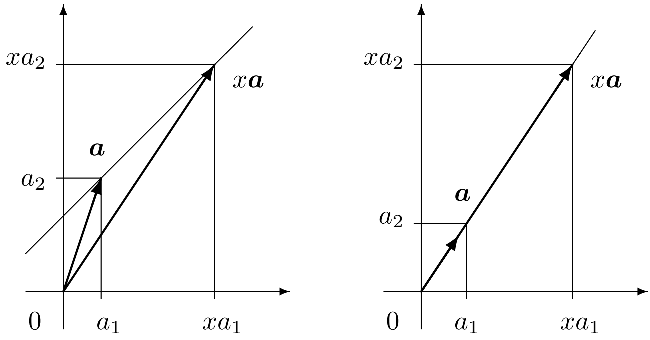


Рис. 1.3. Умножение вектора на число в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ (слева) и $\mathbb{R}^2_{\max,\times}$ (справа)

причем $x'_i \neq x_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$. Пусть для определенности $x'_i < x_i$. Имеем неравенства $\boldsymbol{b} \geq x_i \boldsymbol{a}_i > x'_i \boldsymbol{a}_i$, откуда вытекает, что величина $x'_i \boldsymbol{a}_i$ не влияет на значение $\boldsymbol{b}$ и ее можно отбросить. Следовательно, вектор $\boldsymbol{b}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, что противоречит условию минимальности системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Обозначим линейную оболочку векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ через

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} = \{x_1 \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n \boldsymbol{a}_n | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}\}.$$

На рис. 1.4 слева представлена линейная оболочка $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^2_{\max,+}$, которая имеет форму полосы, ограниченной параллельными прямыми, проходящими через концы векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Ясно, что для полумодуля $\mathbb{R}^2_{\max,\times}$ такая линейная оболочка имеет вид конуса (рис. 1.4 справа).

1.3.3. Метрика. Введем на $\mathbb{X}^m$ метрику ρ. Сначала для всякого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{X}^m$ определим носитель $\operatorname{supp}(\boldsymbol{a})$ как множество индексов ненулевых компонент этого вектора,

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{a}) = \{i | a_i \neq \mathbb{0}, 1 \leq i \leq m\}.$$

Для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m \setminus \{\mathbb{0}\}$ при условии, что $\operatorname{supp}(\boldsymbol{a}) = \operatorname{supp}(\boldsymbol{b})$,

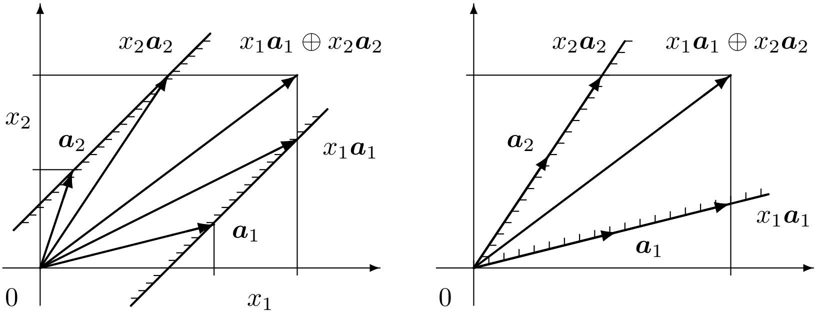


Рис. 1.4. Линейная оболочка векторов в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ (слева) и $\mathbb{R}^2_{\max,\times}$ (справа)

определим

$$\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \bigoplus_{i\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{a})} \rho(a_i,b_i) = \bigoplus_{i\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{a})} \left(b_i^{-1}a_i \oplus a_i^{-1}b_i\right). \qquad (1.5)$$

Положим $\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \infty$, если $\operatorname{supp}(\boldsymbol{a}) \neq \operatorname{supp}(\boldsymbol{b})$, и $\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbb{0}$.

Заметим, что в $\mathbb{R}^m_{\max,+}$ функция (1.5) для всех $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ совпадает с обычной метрикой

$$\rho_\infty(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \max_{1\leq i\leq m} |b_i - a_i|.$$

1.4. Идемпотентная алгебра матриц

Пусть $\mathbb{X}$ — идемпотентное полуполе. Будем рассматривать матрицы с элементами из $\mathbb{X}$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается символом $\mathbb{0}$.

Если в каждой строке матрицы A имеется, по крайней мере, один ненулевой элемент, то такая матрица называется регулярной. Ясно, что регулярная матрица не имеет нулевых строк.

Если для регулярной матрицы A матрица A^T также является регулярной, то матрица A называется правильной. Правильная матрица не имеет как нулевых строк, так и нулевых столбцов.

Для любых матриц

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}, \qquad B = (b_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}, \qquad C = (c_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times l}$$

операции сложения и умножения матриц, а также операция умножения матрицы на скаляр $x \in \mathbb{X}$ определяются обычным путем в соответствии с формулами

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \qquad \{BC\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}, \qquad \{xA\}_{ij} = xa_{ij}.$$

1.4.1. Свойства операций. Из свойств операций полукольца $\mathbb{X}$ следует, что при любых $A, B, C \in \mathbb{X}^{m\times n}$ сложение матриц обладает свойствами

1) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ (ассоциативность),
2) $A \oplus B = B \oplus A$ (коммутативность),
3) $A \oplus \mathbb{0} = A$ (существование нуля),
4) $A \oplus A = A$ (идемпотентность).

Умножение матрицы на скаляр при всех $x, y \in \mathbb{X}$ удовлетворяет условиям

5) $x(yA) = (xy)A$ (ассоциативность),
6) $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$ (существование единицы).

С учетом свойств дистрибутивности

7) $x(A \oplus B) = xA \oplus xB$,
8) $(x \oplus y)A = xA \oplus yA$,

множество $\mathbb{X}^{m\times n}$ с операциями сложения матриц и умножения на скаляр образует полумодуль над идемпотентным полукольцом $\mathbb{X}$.

Наконец, при любых матрицах A, B, C и D подходящего размера для операции умножения матриц выполняется

9) $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность),
10) $B(C \oplus D) = BC \oplus BD$ (дистрибутивность).

Перечисленные матричные операции обладают свойством монотонности, в соответствии с которым для любых согласованных по размеру матриц A, B, C, D и числа x из поэлементного неравенства $A \leq B$ следуют поэлементные неравенства $A \oplus C \leq B \oplus C$, $AD \leq BD$ и $xA \leq xB$.

Заметим, что из свойств дистрибутивности и идемпотентности вытекает еще одно полезное неравенство, которое имеет вид

$$(A \oplus B)(C \oplus D) \geq AC \oplus BD.$$

1.4.2. Норма матрицы. Рассмотрим произвольную матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$. Поставим в соответствие матрице A число

$$\|A\| = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij}. \tag{1.6}$$

Учитывая свойства операции сложения, легко понять, что для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ справедливо неравенство $a_{ij} \leq \|A\|$, откуда следует, что $\|A\|$ равно величине максимального элемента матрицы A. Кроме того, для любых матриц A, B и C подходящего размера и числа x выполняется

$$\|A \oplus B\| = \|A\| \oplus \|B\|, \qquad \|BC\| \leq \|B\|\|C\|, \qquad \|xA\| = x\|A\|.$$

Заметим, что величина $\|A\|$ принимает значения на интервале $[\mathbb{0}, \infty)$. Например, для полукольца $\mathbb{R}_{\max,\times}^{m\times n}$ имеем $0 \leq \|A\| < \infty$. Нетрудно проверить, что в этом полукольце число $\|A\|$ совпадает с точностью до (обыкновенного) множителя $\sqrt{mn}$ с обычной нормой

$$M(A) = (mn)^{1/2} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Ясно, что в любом другом полукольце, изоморфном $\mathbb{R}_{\max,\times}^{m\times n}$, также можно определить соответствующую величину, которая будет иметь свойства нормы. Например, для $\mathbb{R}_{\max,+}^{m\times n}$ возьмем

$$\|A\|' = \exp\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij}\right).$$

Далее в качестве нормы будем использовать величину (1.6) для всех рассматриваемых полуколец, опуская для простоты дополнительные преобразования изоморфизма.

Пусть матрица A состоит из столбцов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, а матрица B — из строк $\boldsymbol{b}^1, \ldots, \boldsymbol{b}^n$. Легко проверить, что имеет место равенство

$$\|AB\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\| \|\boldsymbol{b}^i\|.$$

1.4.3. Квадратные матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу $A \in \mathbb{X}^{n \times n}$. Как обычно, матрица A называется диагональной, если все ее недиагональные элементы равны нулю. Диагональная матрица A с диагональными элементами $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ обозначается $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Если $a_{ii} \neq \mathbb{0}$ при всех $i = 1, \ldots, n$, то такая матрица называется строго диагональной.

Матрица $I = \operatorname{diag}(\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})$ называется единичной.

Множество $\mathbb{X}^{n \times n}$ замкнуто относительно умножения матриц, которое для любых $A, B, C \in \mathbb{X}^{n \times n}$ удовлетворяет условиям

1) $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность),
2) $AI = IA = A$ (существование единицы),
3) $A(B \oplus C) = AB \oplus AC$ (дистрибутивность).

По отношению к операциям сложения и умножения матриц множество $\mathbb{X}^{n \times n}$ образует ассоциативно-коммутативное идемпотентное полукольцо с единицей.

Операция возведения в степень для матрицы вводится обычным путем. Для любой матрицы $A \neq \mathbb{0}$ и целого $p > 0$ имеем

$$A^0 = I, \qquad A^p = A^{p-1} A = A A^{p-1}, \qquad \mathbb{0}^p = \mathbb{0}.$$

Матрица называется треугольной, если равны нулю все ее элементы выше (ниже) диагонали. Треугольную матрицу, у которой на диагонали стоят нули, будем называть строго треугольной.

Матрица A называется нильпотентной индекса r, если существует такое целое $r > 0$, что $A^r = \mathbb{0}$, причем r является наименьшим показателем, при котором степень матрицы равна нулю.

Очевидно, что верхняя (нижняя) строго треугольная матрица является нильпотентной.

Матрица называется разложимой, если при помощи перестановки строк вместе с такой же перестановкой столбцов ей может быть придана блочно-треугольная (нормальная) форма. В противном случае матрица называется неразложимой.

Нормальной формой разложимой матрицы $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ называется ее представление в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} \\ A_{21} & A_{22} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

где A_{ii} — неразложимая или нулевая квадратная матрица порядка n_i, A_{ij} — произвольная матрица размера $n_i \times n_j$ для всех $j < i$, $i = 1, \dots, s$, при условии, что $n_1 + \dots + n_s = n$.

Совокупность строк (столбцов) матрицы A, соответствующих каждому диагональному блоку A_{ii}, будем называть горизонтальным (вертикальным) рядом матрицы.

Ясно, что диагональная и треугольная матрицы — разложимые.

Матрица A называется симметричной, если $A^T = A$.

Матрица $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ называется матрицей подобия с коэффициентом (множителем) подобия α, если для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ выполняется равенство

$$\|A\boldsymbol{x}\| = \alpha\|\boldsymbol{x}\|.$$

При $\alpha = \mathbb{1}$ матрица подобия называется изометрической.

Если A — изометрическая матрица, то для любой матрицы B справедливо равенство

$$\|AB\| = \|B\|.$$

Множество изометрических матриц замкнуто относительно операций сложения и умножения. Действительно, пусть A_1 и A_2 — изометрические матрицы. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x}$

$$\|(A_1 \oplus A_2)\boldsymbol{x}\| = \|A_1\boldsymbol{x}\| \oplus \|A_2\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| \oplus \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|,$$
$$\|(A_1A_2)\boldsymbol{x}\| = \|A_2\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

Ясно, что матрица, все элементы которой равны $\mathbb{1}$, является изометрической. Кроме того, произведение такой матрицы на любую матрицу A представляет собой матрицу подобия с коэффициентом подобия, который равен $\|A\|$.

1.4.4. След матрицы. Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ следом матрицы называется величина

$$\operatorname{tr} A = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Нетрудно проверить, что для любых матриц A и B и числа x выполняется

$$\operatorname{tr}(A \oplus B) = \operatorname{tr} A \oplus \operatorname{tr} B, \qquad \operatorname{tr}(xA) = x \operatorname{tr} A, \qquad \operatorname{tr} A \leq \|A\|.$$

Покажем, что при всех целых $p \geq 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{tr} A^p \geq \operatorname{tr}^p(A).$$

Действительно, при $p = 0, 1$ имеем очевидные равенства. В случае, когда $p = 2$, получим

$$\operatorname{tr} A^2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji} \geq \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}^2 = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii} \right)^2 = \operatorname{tr}^2(A).$$

Случай произвольного целого p рассматривается аналогично.

1.4.5. Граф матрицы. Любой матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ можно сопоставить ориентированный граф $\langle V, E\rangle$ с множеством вершин $V = \{1, \ldots, n\}$ и множеством дуг $E = \{(i,j) | i,j \in V\}$. Для каждой пары вершин $i, j \in V$ множество E включает дугу (i,j), если $a_{ij} > \mathbb{0}$, и не включает такую дугу, если $a_{ij} = \mathbb{0}$.

Последовательность вершин $(i_0, i_1, \ldots, i_m)$ графа при условии, что $(i_{k-1}, i_k) \in E$ для всех $k = 1, \ldots, m$, называется путем, а число дуг m, из которых состоит путь, — длиной пути.

Величину a_{ij} естественно считать расстоянием между вершинами i и j вдоль дуги (i,j). Для любого пути $(i_0, i_1, \ldots, i_m)$ расстояние между вершинами i_0 и i_m вдоль этого пути определяется произведением $a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{m-1} i_m}$.

Путь $(i_0, i_1, \ldots, i_m)$, а также соответствующее ему произведение $a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{m-1} i_m}$ называются циклическими, если $i_m = i_0$. Граф называется ациклическим, если он не содержит циклических путей.

Граф строго треугольной матрицы является ациклическим.

Нетрудно видеть, что ациклический граф, состоящий из n вершин, не содержит путей, длина которых больше $n-1$.

Рассмотрим произвольную степень p матрицы A. Для элементов $a_{ij}^{(p)}$ матрицы A^p имеем

$$a_{ij}^{(p)} = \bigoplus_{1 \leq i_1, \ldots, i_{p-1} \leq n} a_{i i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{p-1} j},$$

откуда следует, что $a_{ij}^{(p)}$ имеет смысл наибольшего расстояния между вершинами i и j вдоль всех путей, которые состоят из p дуг. Если таких путей вообще нет, то $a_{ij}^{(p)} = \mathbb{0}$.

В частности, максимальное расстояние вдоль всех циклических путей длины p можно записать в виде

$$\bigoplus_{1 \leq i_0, \ldots, i_{p-1} \leq n} a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{p-1} i_0} = \operatorname{tr} A^p.$$

Рассмотрим матрицу A, граф которой является ациклическим. Нетрудно проверить, что матрица A является нильпотентной с индексом, который не превышает n. Действительно, в графе матрицы нет циклических путей, а максимальная длина любого пути не больше некоторого числа $r \leq n-1$. Следовательно, $a_{ij}^{(p)} = \mathbb{0}$ для каждого $p > r$ при всех $i, j = 1 \ldots, n$.

Опираясь на взаимосвязь между матрицей и ее графом, нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Матрица является неразложимой тогда и только тогда, когда граф матрицы сильно связный.

Если A — неразложимая матрица, то матрица $B = A \oplus \cdots \oplus A^n$ не имеет нулевых элементов.

Любая неразложимая матрица является правильной.

1.4.6. Обратная и псевдообратная матрицы. Пусть A — квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к A, если $A^{-1} A = A A^{-1} = I$.

Покажем, что для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце и в каждой строке матрицы стоял ровно один элемент, отличный от нуля.

Действительно, достаточность условия устанавливается непосредственной проверкой. Проверим необходимость.

Пусть для матрицы $A = (a_{ij})$ существует матрица $B = (b_{ij})$ такая, что $AB = BA = I$. Для произвольного $i = 1, \dots, n$, выполняется $a_{i1}b_{1i} \oplus \cdots \oplus a_{in}b_{ni} = \mathbb{1}$, откуда следует, что найдется такой индекс j, что $a_{ij} > \mathbb{0}$ и $b_{ji} > \mathbb{0}$.

Допустим, что в столбце j матрицы A имеется еще один ненулевой элемент, например $a_{mj} \neq \mathbb{0}$, где $m \neq i$. В этом случае имеем $a_{m1}b_{1i} \cdots a_{mn}b_{ni} > a_{mj}b_{ji} > \mathbb{0}$, что противоречит условию $AB = I$. Следовательно, матрица A не может иметь два ненулевых элемента в одном столбце.

Аналогично, на основе равенства $BA = I$ проверяется, что матрица A не может иметь два ненулевых элемента в одной строке.

Ясно, что в полукольце $\mathbb{X}^{n\times n}$ обратимы только строго диагональные матрицы и матрицы, полученные из них путем перестановки строк или столбцов. Для матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, где $d_1, \dots, d_n \neq \mathbb{0}$, обратной матрицей будет $D^{-1} = \operatorname{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1})$.

Для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$ можно определить псевдообратную матрицу $A^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{n\times m}$ с элементами

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & \text{если } a_{ji} \neq \mathbb{0}, \\ \mathbb{0}, & \text{если } a_{ji} = \mathbb{0}. \end{cases}$$

Легко видеть, что для правильной матрицы A выполняются неравенства $AA^{-} \geq I$ и $A^{-}A \geq I$.

Кроме того, если для матрицы A существует обратная, то очевидно, что $A^{-} = A^{-1}$.

Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{m\times n}$ носителем матрицы называется множество пар индексов ненулевых компонент этой матрицы

$$\operatorname{supp}(A) = \{(i,j) | a_{ij} \neq \mathbb{0}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Для матриц A и B одинакового размера с общим носителем из неравенства $A \leq B$ следует $A^{-} \geq B^{-}$.

Заметим, что для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{m\times n} \setminus \{\mathbb{0}\}$ минимальный ненулевой элемент определяется выражением

$$\min\{a_{ij} | a_{ij} \neq \mathbb{0}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} = \|A^-\|^{-1}.$$

Для любого вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{X}^n$ определим вектор $\boldsymbol{x}^- = (x_1^-, \ldots, x_n^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ в противном случае. Из неравенства $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с общим носителем следует $\boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{y}^-$.

Покажем, что для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}_+^n$ справедливо неравенство

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^- \geq (\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{y})^{-1} I. \tag{1.8}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{y} = x_1^{-1}y_1 \oplus \cdots \oplus x_n^{-1}y_n \geq x_i^{-1}y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, получим $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^- \geq \mathrm{diag}(x_1 y_1^{-1}, \ldots, x_n y_n^{-1}) \geq (\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{y})^{-1} I$.

При $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ неравенство (1.8) принимает вид $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- \geq I$.

Применяя (1.8), нетрудно проверить, что для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{m\times n} \setminus \{\mathbb{0}\}$ и вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_+^n$ справедливо неравенство

$$(A\boldsymbol{x})^- A \leq \boldsymbol{x}^-. \tag{1.9}$$

Действительно, если $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_+^n$, то $(A\boldsymbol{x})^- A \leq (A\boldsymbol{x})^- A\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- = \boldsymbol{x}^-$.

1.4.7. Ранг матрицы. Рассмотрим произвольную матрицу A. Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы A называется рангом матрицы и обозначается $\mathrm{rank}(A)$.

Нетрудно показать, что матрица A имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$, где $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — некоторые ненулевые векторы.

Пусть $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ — матрица ранга 1. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\|A\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

Определим область значений матрицы $A \in \mathbb{X}^{m\times n}$ как множество векторов

$$\mathrm{range}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^m | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n\}.$$

Если $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$, то $\mathrm{range}(A) = \{\alpha\boldsymbol{x} | \alpha \in \mathbb{X}\}$.

1.4.8. Метрика. Для любых матриц $A, B \in \mathbb{X}^{m\times n} \setminus \{\mathbb{0}\}$ таких, что $\operatorname{supp}(A) = \operatorname{supp}(B)$, определим функцию расстояния

$$\rho(A, B) = \operatorname{tr}(B^{-}A) \oplus \operatorname{tr}(A^{-}B). \tag{1.10}$$

При условии $\operatorname{supp}(A) \neq \operatorname{supp}(B)$ положим $\rho(A, B) = \infty$. Если $A = B = \mathbb{0}$, то положим $\rho(A, B) = \mathbb{1}$.

В полукольце $\mathbb{R}^{m\times n}_{\max,+}$ для любых матриц A и B с общим носителем метрика (1.10) с использованием обычных операций записывается в виде

$$\rho(A, B) = \max_{(i,j)\in\operatorname{supp}(A)} |b_{ij} - a_{ij}|.$$

Ясно, что эта метрика для всех $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ совпадает с обычной метрикой

$$\rho_{\infty}(A, B) = \max_{i,j} |b_{ij} - a_{ij}|.$$

1.5. Линейные уравнения

Любая матрица $A \in \mathbb{X}^{m\times n}$ задает некоторое отображение (оператор) из полумодуля $\mathbb{X}^n$ в полумодуль $\mathbb{X}^m$. Учитывая, что для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$ и числа $\alpha \in \mathbb{X}$ выполняются равенства

$$A(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} \oplus A\boldsymbol{y}, \qquad A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x},$$

отображение обладает свойством линейности. Такое отображение называется (обобщенным) линейным оператором.

Пусть $A, C \in \mathbb{X}^{m\times n}$ — заданные матрицы, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{X}^m$ — векторы. Общим линейным уравнением относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ называется уравнение

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = C\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d}. \tag{1.11}$$

Заметим, что в силу отсутствия обратного по сложению, уравнению (1.11) нельзя, как в обычной алгебре, придать форму, при которой все слагаемые, содержащие неизвестный вектор $\boldsymbol{x}$, оказываются слева, а слагаемые без $\boldsymbol{x}$ — справа.

Многие практические задачи сводятся к решению следующих частных случаев уравнения (1.11)

1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,

2) $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$,

которые будем называть соответственно уравнениями 1-го и 2-го рода. Заметим, что обычно в литературе уравнения

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}, \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

называют неоднородным и однородным уравнениями Беллмана.

Наряду с уравнениями, можно рассматривать неравенства 1-го и 2-го рода

1) $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$,

2) $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}$.

Пусть имеются два уравнения (неравенства), возможно, представленные в терминах различных полуколец. Будем называть эти уравнения (неравенства) эквивалентными, если множества их решений, отличных от нуля, совпадают.

Опираясь на изоморфизм соответствующих полуколец, нетрудно проверить эквивалентность уравнений

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \quad (\mathbb{R}_{\max,+}), \\ \boldsymbol{x}^{-}A^{-} &= \boldsymbol{b}^{-} \; (\mathbb{R}_{\min,+}). \end{aligned}$$

Учитывая, что отношение $\leq$ понимается всякий раз в смысле соответствующего полукольца, имеем эквивалентность следующих неравенств

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{b} \quad (\mathbb{R}_{\max,+}), \\ \boldsymbol{x}^{-}A^{-} &\leq \boldsymbol{b}^{-} \; (\mathbb{R}_{\min,+}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно установить эквивалентность следующих пар уравнений и неравенств

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \quad (\mathbb{R}_{\max,\times}), & A\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{b} \quad (\mathbb{R}_{\max,\times}), \\ \boldsymbol{x}^{-}A^{-} &= \boldsymbol{b}^{-} \; (\mathbb{R}_{\min,\times}), & \boldsymbol{x}^{-}A^{-} &\leq \boldsymbol{b}^{-} \; (\mathbb{R}_{\min,\times}). \end{aligned}$$

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО РОДА

2.1. Введение

Многие приложения идемпотентной алгебры [7, 8, 69, 55, 42, 39] приводят к необходимости решения в некотором идемпотентном полукольце векторного уравнения

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где A и $\boldsymbol{b}$ — заданные матрица и вектор, $\boldsymbol{x}$ — вектор неизвестных. Примеры таких практических задач в области сетевого планирования, управления производством и исследования надежности систем можно найти, например, в работах [8, 7, 31].

Учитывая, что указанное уравнение, которое будем называть уравнением 1-го рода, может рассматриваться как выражение линейной зависимости между векторами, методы его анализа и решения представляют не только практический, но и теоретический интерес. При этом особое значение приобретает разработка способов представления решений в компактной векторной форме, удобной как для решения формальных задач, так и для алгоритмической и программной реализаций вычислений, включая расчеты с применением векторных и параллельных вычислительных систем.

Задача решения уравнения и ее связь с линейной зависимостью векторов рассматривалась в работах Н. Н. Воробьева [7, 8] и Р. А. Кунингхайма-Грина [69]. Дальнейшее развитие эти вопросы получили в ряде других работ, включая [15, 16, 101, 100, 18, 55].

Для решения уравнения с матрицей, все элементы которой ненулевые, в [7, 8] предложен метод разрешающих покрытий, опирающийся на анализ подмножеств строк некоторой приведенной матрицы. На основе этого метода в терминах разрешающих покрытий множества строк определены условия существования решения и описана процедура нахождения всех решений. Получено выражение для максимального решения в виде $\boldsymbol{x} = A^{-} \otimes \boldsymbol{b}$, где A^{-} обозначает псевдообратную матрицу для A в исходном полукольце (эта матрица названа Н. Н. Воробьевым экстремально обратной), $\otimes$ — знак операции умножения в некотором двойственном полукольце.

Развитие теории и методов решения уравнений в работе [69] было направлено, в частности, на преодоление трудностей, которые возникают при решении уравнений с матрицей, имеющей нулевые элементы. На случай таких матриц была распространена операция вычисления псевдообратной матрицы (которая здесь называется сопряженной). Впервые найдено условие существования решений уравнения в виде равенства $A(A^{-} \otimes \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$, где $\otimes$ — знак операции умножения в двойственном полукольце, а также условие единственности решения. Предложена вычислительная процедура выявления линейной зависимости векторов.

В [101, 18, 55] определяется подрешение уравнения как любой вектор $\boldsymbol{x}$, для которого $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$. Вводится операция $\setminus$ вычисления остатка от деления A на $\boldsymbol{b}$ таким образом, чтобы выражение $A \setminus \boldsymbol{b}$ означало максимальное подрешение уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Показано, что в случае, когда обычное решение уравнения существует, оно может быть записано в терминах двойственного полукольца, т. е. выполняется равенство $A \setminus \boldsymbol{b} = A^{-} \otimes \boldsymbol{b}$. В [18, 55] для уравнения $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$ даны необходимое и достаточное условия существования подрешения в виде неравенства $\boldsymbol{d} \leq \boldsymbol{b}$, которое является лишь необходимым условием существования обычного решения.

Подход на основе аналога определителя матрицы, который называется доминантом, был предложен в [100]. Разработан метод решения уравнений при помощи правила Крамера с заменой определителя на доминант. Для применения этого метода, однако, требуется выполнение существенных ограничений, которым должны одновременно удовлетворять матрица A и вектор $\boldsymbol{b}$.

В настоящей главе представлены некоторые новые результаты, которые опираются на работы [24, 27, 35]. Предлагается подход, при котором решение уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ сводится к анализу расстояния между векторами в соответствующем метрическом пространстве. Выбирается метрика, для вычисления которой достаточно выполнения основных бинарных операций полукольца, дополненных операцией псевдообращения. Это позволяет представить последующие результаты в компактной векторной форме в терминах исходного полукольца, а также дать им простую и наглядную геометрическую интерпретацию на плоскости в декартовой системе координат.

В главе сначала находится общее выражение для вычисления расстояния от заданного вектора до линейной оболочки векторов, а также определяется вектор оболочки, для которого указанное расстояние минимально. Эти результаты используются для выяснения условий существования и единственности решения уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, а также для представления общего решения. Затем исследовано решение смешанной системы, которая состоит из уравнений и неравенств, а также изучено уравнение $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$.

В заключение представлены примеры моделей реальных систем и связанных с ними практических задач, предложенные в [31].

2.2. Расстояние от вектора до множества

Расстояние между произвольным вектором $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$ и множеством векторов $\mathcal{S} \subset \mathbb{X}^m$ определяется величиной

$$\rho(\mathcal{S}, \boldsymbol{b}) = \inf_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}} \rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Пусть имеется система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{X}^m$. Введем матрицу $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, составленную из векторов системы, а также их линейную оболочку $\mathcal{A} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$.

Рассмотрим задачи определения расстояния от произвольного вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$ до линейной оболочки $\mathcal{A}$, а затем расстояния от $\boldsymbol{b}$ до множеств:

$$\mathcal{A}_1 = \{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A} | \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}\}, \qquad \mathcal{A}_2 = \{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A} | \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}\}.$$

В силу того, что каждый вектор $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ можно представить в виде $\boldsymbol{a} = A\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, получаем

$$\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n} \rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}).$$

Пусть $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$. Учитывая, что $\mathcal{A}$ всегда содержит нулевой вектор, имеем $\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$. Кроме того, $\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\}$ и $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, откуда следует, что $\rho(\mathcal{A}_1, \boldsymbol{b}) = \rho(\mathcal{A}_2, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$.

Допустим, что в системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ есть нулевой вектор. Очевидно, что удаление такого вектора из системы оставит множество $\mathcal{A}$ без изменений. При $A = \mathbb{0}$ выполняется равенство $\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$, когда $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$, и $\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \infty$ — в противном случае.

Далее будем считать, что $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbb{0}$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим случай, когда векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ имеют общую нулевую координату. Учитывая, что эта координата не может влиять на величину расстояния между векторами, ее можно везде вычеркнуть с тем, чтобы сразу перейти к задаче для векторов меньшей размерности. Поэтому ниже такой случай будем исключать.

Предположим, что вектор $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$ имеет нулевые координаты. Наряду с матрицей A рассмотрим матрицу $\widehat{A}$, которая получается из A путем применения следующей процедуры. Введем множества индексов $I = \{i | b_i = \mathbb{0}\}$ и $J = \{j | a_{ij} > \mathbb{0}, i \in I\}$. Определим элементы матрицы $\widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})$, исходя из условия

$$\widehat{a}_{ij} = \begin{cases} \mathbb{0}, & \text{если } i \notin I \text{ и } j \in J, \\ a_{ij}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Понятно, что у матриц $\widehat{A}$ и A могут различаться только столбцы, имеющие ненулевые элементы на пересечении со строками, которые соответствуют нулевым координатам вектора $\boldsymbol{b}$. В матрице $\widehat{A}$ все элементы таких столбцов, которые не лежат на пересечении с указанными строками, приравниваются к нулю.

Будем называть матрицу $\widehat{A}$ согласованной с вектором $\boldsymbol{b}$.

Заметим, что при условии $\boldsymbol{b} > \mathbb{0}$ выполняется равенство $\widehat{A} = A$, то есть исходная матрица и полученная из нее матрица, согласованная с $\boldsymbol{b}$, совпадают.

Покажем, что задачи определения расстояния от $\boldsymbol{b}$ до линейных оболочек столбцов матриц A и $\widehat{A}$ эквивалентны в смысле следующего утверждения.

Предложение 2.1. При всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ выполняется равенство

$$\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \rho(\widehat{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}).$$

Доказательство. При условии $\boldsymbol{b} > \mathbb{0}$ справедливость утверждения очевидна.

Предположим, что вектор $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$ имеет нулевые координаты. Величина $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ принимает конечное значение тогда и только тогда, когда $\mathrm{supp}(A\boldsymbol{x}) = \mathrm{supp}(\boldsymbol{b})$. Это условие равносильно выполнению равенства $a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n = \mathbb{0}$ всякий раз, когда $b_i = \mathbb{0}$.

Для выполнения указанного равенства необходимо положить $x_j = \mathbb{0}$ для всех индексов j таких, что $a_{ij} \neq \mathbb{0}$ хотя бы для одного индекса i, для которого $b_i = \mathbb{0}$. Ясно, что тогда величина $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) < \infty$ не изменится при замене матрицы A на $\widehat{A}$.

Наконец, легко проверить, что из условия $\mathrm{supp}(A\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{supp}(\boldsymbol{b})$ следует выполнение условия $\mathrm{supp}(\widehat{A}\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{supp}(\boldsymbol{b})$ и наоборот. $\square$

Заметим, что полученный результат позволяет в дальнейшем ограничиться изучением только таких задач, в которых матрица A и вектор $\boldsymbol{b}$ оказываются согласованными.

Пусть матрица A согласована с вектором $\boldsymbol{b}$. При условии, что матрица A является регулярной, определим величину

$$\Delta(A, \boldsymbol{b}) = (A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-})^{-}\boldsymbol{b}.$$

Если матрица A — нерегулярная, то положим $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \infty$.

2.2.1. Вектор с ненулевыми координатами. Допустим, что все координаты вектора $\boldsymbol{b}$ отличны от нуля. Покажем, что тогда для определения минимума величины $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ достаточно рассмотреть только те векторы $\boldsymbol{x}$, у которых нет нулевых координат.

Предложение 2.2. Для любого вектора $\boldsymbol{b} > \mathbb{0}$ выполняется

$$\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x} > \mathbb{0}} \rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}).$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, при котором достигается минимум величины $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$. Если среди координат вектора $\boldsymbol{y}$ есть нулевые, то $\mathrm{supp}(\boldsymbol{y}) \neq \mathrm{supp}(\boldsymbol{b})$, откуда следует, что $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \infty$ при всех $\boldsymbol{x}$, включая $\boldsymbol{x} > \mathbb{0}$.

Предположим, что $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T > \mathbb{0}$, и допустим, что $\boldsymbol{x}$ имеет нулевую координату, например, $x_j = \mathbb{0}$. Введем множество $I = \{i | a_{ij} > \mathbb{0}\} \neq \emptyset$ и определим число $\varepsilon = \min\{a_{ij}^{-1} y_i | i \in I\} > \mathbb{0}$.

Заметим, что при замене $x_j = \mathbb{0}$ на $x_j = \varepsilon$ координаты вектора $\boldsymbol{y}$ не меняются. Следовательно, для определения минимума $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ достаточно исследовать множество векторов $\boldsymbol{x} > \mathbb{0}$. $\square$

Следующее утверждение раскрывает смысл величины $\Delta(A, \boldsymbol{b})$.

Лемма 2.1. Для любой матрицы A и вектора $\boldsymbol{b} > \mathbb{0}$ выполняется равенство

$$\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\Delta(A, \boldsymbol{b})}.$$

Если $\Delta(A, \boldsymbol{b}) < \infty$, то минимум величины $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ достигается при $\boldsymbol{x} = \sqrt{\Delta(A, \boldsymbol{b})}(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$.

Доказательство. Утверждение леммы верно, если матрица A не является регулярной. Действительно, в этом случае для любого $\boldsymbol{x}$ имеем $\operatorname{supp}(A\boldsymbol{x}) \neq \operatorname{supp}(\boldsymbol{b})$, откуда следует, что $\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \infty$.

Предположим, что A — регулярная матрица. Для краткости обозначим $\Delta = \Delta(A, \boldsymbol{b}) = (A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-})^{-}\boldsymbol{b}$. Возьмем произвольный вектор $A\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$, где $\boldsymbol{x} > \mathbb{0}$, и рассмотрим величину $r = \rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$.

Имеем равенство $r = \boldsymbol{b}^{-}A\boldsymbol{x} \oplus (A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{b}$, из которого вытекают два неравенства

$$r \geq \boldsymbol{b}^{-}A\boldsymbol{x}, \qquad r \geq (A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{b}.$$

Умножая первое неравенство на $\boldsymbol{x}^{-}$ справа и применяя (1.8), получим $r\boldsymbol{x}^{-} \geq \boldsymbol{b}^{-}A\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-} \geq \boldsymbol{b}^{-}A$, откуда следует $\boldsymbol{x} \leq r(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$, а затем $(A\boldsymbol{x})^{-} \geq r^{-1}(A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-})^{-}$.

Из второго неравенства имеем $r \geq r^{-1}(A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-})^{-}\boldsymbol{b} = r^{-1}\Delta$, а потому всегда выполняется неравенство $r \geq \Delta^{1/2}$.

Осталось проверить, что $r = \Delta^{1/2}$, если $\boldsymbol{x} = \Delta^{1/2}(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$. Действительно, при таком значении вектора $\boldsymbol{x}$ имеем

$$r = \Delta^{1/2}\boldsymbol{b}^{-}A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-} \oplus \Delta^{-1/2}(A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-})^{-}\boldsymbol{b} = \Delta^{1/2} \oplus \Delta^{1/2} = \Delta^{1/2}.$$

Ясно, что вектору $\boldsymbol{x}$ соответствует $\boldsymbol{y} = \Delta^{1/2}A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-} \in \mathcal{A}$. $\square$

На рис. 2.1 представлены примеры взаимного расположения линейной оболочки $\mathcal{A}$ и вектора $\boldsymbol{b}$ для полумодуля $\mathbb{R}^{2}_{\max,+}$.

Найдем расстояния от вектора $\boldsymbol{b}$ до множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Лемма 2.2. Для любой матрицы A и вектора $\boldsymbol{b} > \mathbb{0}$ выполняются равенства

$$\rho(\mathcal{A}_1, \boldsymbol{b}) = \rho(\mathcal{A}_2, \boldsymbol{b}) = \Delta(A, \boldsymbol{b}).$$

Если $\Delta(A, \boldsymbol{b}) < \infty$, то минимум величины $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ при условиях $A\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_1$ и $A\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2$ достигается при $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$ и $\boldsymbol{x}_2 = \Delta(A, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$ соответственно.

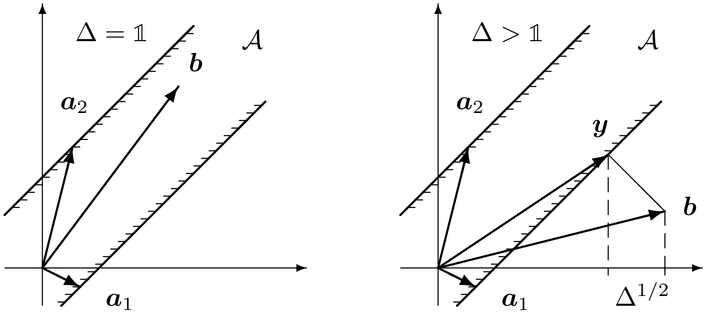


Рис. 2.1. Линейная оболочка $\mathcal{A}$ и вектор $\boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ при разных Δ

Доказательство. Введем обозначение $\Delta = \Delta(A, \boldsymbol{b})$.

Так же, как при доказательстве леммы 2.1, нетрудно проверить выполнение равенства $\rho(\mathcal{A}_1, \boldsymbol{b}) = \rho(\mathcal{A}_2, \boldsymbol{b}) = \Delta$, если матрица A не является регулярной. Покажем, что это равенство сохраняется в случае регулярной матрицы A.

Из неравенства $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ с помощью умножения на $\boldsymbol{x}^-$ справа и применения неравенства (1.8) получим $A \leq A\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- \leq \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^-$. Умножая последнее неравенство на $\boldsymbol{b}^-$ слева, приходим к неравенству $\boldsymbol{b}^- A \leq \boldsymbol{x}^-$, откуда следует, что $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^- A)^-$.

Тогда для любого вектора $A\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_1$ имеем

$$\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (A\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{b} \geq (A(\boldsymbol{b}^- A)^-)^- \boldsymbol{b} = \Delta.$$

Ясно, что $\rho(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{b}) = \Delta$, если $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{b}^- A)^-$.

Рассмотрим произвольный вектор $A\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2$. Применяя (1.9) и учитывая, что $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$, получим

$$\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^- A\boldsymbol{x} \geq (A(\boldsymbol{b}^- A)^-)^- A\boldsymbol{x} \geq (A(\boldsymbol{b}^- A)^-)^- \boldsymbol{b} = \Delta.$$

Осталось проверить, что подстановка $\boldsymbol{x}_2 = \Delta(\boldsymbol{b}^- A)^-$ дает результат $\rho(A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{b}) = \Delta \boldsymbol{b}^- A(\boldsymbol{b}^- A)^- = \Delta$.

Легко видеть, что при условии $\Delta < \infty$ минимум расстояния от $\boldsymbol{b}$ до множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ достигается на векторах $\boldsymbol{y}_1 = A(\boldsymbol{b}^- A)^-$ и $\boldsymbol{y}_2 = \Delta A(\boldsymbol{b}^- A)^-$ соответственно. $\square$

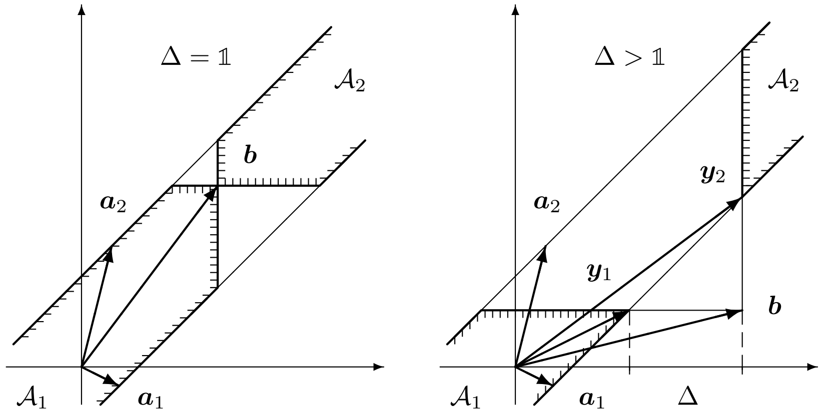


Рис. 2.2. Множества $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и вектор $\boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ при разных Δ

Геометрическая интерпретация полученного результата для полумодуля $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ представлена на рис. 2.2.

Следствие 2.1. Для любой матрицы A и вектора $\boldsymbol{b} > \mathbb{0}$ решение неравенства $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ имеет вид $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^- A)^-$.

Доказательство. Проверим, что два неравенства $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^- A)^-$ равносильны. Из доказательства леммы 2.2 ясно, что из первого неравенства следует второе.

Пусть выполнено неравенство $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^- A)^-$. Тогда с учетом (1.9) имеем $A\boldsymbol{x} \leq A(\boldsymbol{b}^- A)^- \leq \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^- A(\boldsymbol{b}^- A)^- = \boldsymbol{b}$. □

2.2.2. Произвольный ненулевой вектор. Исследуем расстояние между линейной оболочкой $\mathcal{A}$ и вектором $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$. Достаточно рассмотреть только случай, когда матрица A согласована с $\boldsymbol{b}$.

Лемма 2.3. Для любой матрицы A, согласованной с вектором $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$, выполняется

$$\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\Delta(A, \boldsymbol{b})}.$$

Если $\Delta(A, \boldsymbol{b}) < \infty$, то минимум величины $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ достигается при $\boldsymbol{x} = \sqrt{\Delta(A, \boldsymbol{b})}(\boldsymbol{b}^- A)^-$.

Доказательство. Случай, когда $\boldsymbol{b} > \mathbb{0}$, был рассмотрен при доказательстве леммы 2.1. Пусть вектор $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$ имеет нулевые координаты. Положим $I = \{i | b_i = \mathbb{0}\}$ и $J = \{j | a_{ij} > \mathbb{0}, i \in I\}$.

Зафиксируем значения $x_j = \mathbb{0}$ для всех индексов $j \in J$. Теперь можно исключить из рассмотрения компоненты вектора $\boldsymbol{b}$ и строки матрицы A с индексами $i \in I$, а также столбцы A с индексами $j \in J$. Вычеркивая указанные элементы, получим некоторую новую матрицу A' и новый вектор $\boldsymbol{b}'$.

Обозначим линейную оболочку столбцов матрицы A' через $\mathcal{A}'$ и заметим, что вектор $\boldsymbol{b}'$ не имеет нулевых координат. Тогда, применяя лемму 2.1, находим

$$\rho(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \rho(\mathcal{A}', \boldsymbol{b}') = \sqrt{\Delta(A', \boldsymbol{b}')}.$$

Заметим, что минимум расстояния $\rho(A'\boldsymbol{x}', \boldsymbol{b}')$ достигается при условии $\boldsymbol{x}' = \sqrt{\Delta(A', \boldsymbol{b}')}(\boldsymbol{b}'^{-} A')^{-}$, где $\boldsymbol{x}'$ — некоторый вектор, размерность которого меньше, чем n.

Матрица A отличается от A' только дополнительными ненулевыми строками и столбцами. Понятно, что из регулярности (нерегулярности) одной матрицы следует регулярность (нерегулярность) другой и наоборот.

Пусть матрицы A и A' являются регулярными. Учитывая, что вектор $\boldsymbol{b}'$ был получен из $\boldsymbol{b}$ путем удаления нулевых координат, легко проверить, что

$$\Delta(A', \boldsymbol{b}') = (A'(\boldsymbol{b}'^{-} A')^{-})^{-} \boldsymbol{b}' = (A(\boldsymbol{b}^{-} A)^{-})^{-} \boldsymbol{b} = \Delta(A, \boldsymbol{b}).$$

Наконец, вектор $\boldsymbol{x}$ отличается от $\boldsymbol{x}'$ только дополнительными нулевыми координатами, откуда следует, что $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ имеет минимум при $\boldsymbol{x} = \sqrt{\Delta(A, \boldsymbol{b})}(\boldsymbol{b}^{-} A)^{-}$. $\square$

Опираясь на ту же схему доказательства, нетрудно проверить справедливость следующих утверждений.

Лемма 2.4. Для любой матрицы A, согласованной с вектором $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$, выполняется

$$\rho(\mathcal{A}_1, \boldsymbol{b}) = \rho(\mathcal{A}_2, \boldsymbol{b}) = \Delta(A, \boldsymbol{b}).$$

Если $\Delta(A, \boldsymbol{b}) < \infty$, то минимум величины $\rho(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ при условиях $A\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_1$ и $A\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2$ достигается при $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{b}^{-} A)^{-}$ и $\boldsymbol{x}_2 = \Delta(A, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^{-} A)^{-}$ соответственно.

Следствие 2.2. Для любой матрицы A и вектора $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$ решение неравенства $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ имеет вид $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$.

Из представленных доказательств вытекает, что $\Delta(A, \boldsymbol{b}) \geq \mathbb{1}$. Равенство $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$ означает, что $\boldsymbol{b} \in \mathcal{A}$, в то время как неравенство $\Delta(A, \boldsymbol{b}) > \mathbb{1}$ — что $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{A}$. Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.5. Вектор $\boldsymbol{b}$ принадлежит линейной оболочке столбцов согласованной с ним матрицы A тогда и только тогда, когда $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$. При этом $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$.

2.3. Линейная зависимость векторов

Пусть вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Это значит, что существует разложение $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$.

Введем матрицу $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ и вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Тогда это разложение можно записать в форме $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$.

Из утверждения леммы 2.5 прямо следует, что вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$.

Пусть $A_{(i)} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ — матрица, полученная из A путем вычеркивания столбца i. Введем обозначение

$$\delta(A) = \min_{1 \leq i \leq n} \Delta(A_{(i)}, \boldsymbol{a}_i).$$

Лемма 2.6. Система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда $\delta(A) > \mathbb{1}$.

Доказательство. Условие $\delta(A) > \mathbb{1}$ означает, что выполняется неравенство $\Delta(A_{(i)}, \boldsymbol{a}_i) > \mathbb{1}$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда в силу леммы 2.5 ни один из векторов системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ не зависит от остальных, то есть система линейно независима. □

Две системы ненулевых векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ называются эквивалентными, если каждый из векторов одной системы линейно зависит от векторов другой системы.

Рассмотрим систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, среди которых могут быть линейно зависимые векторы. Для построения эквивалентной линейно независимой системы применим следующую процедуру.

Для всех $i = 1, \ldots, n$ будем последовательно исключать из системы каждый вектор $\boldsymbol{a}_i$, для которого $\Delta(\widetilde{A}_{(i)}, \boldsymbol{a}_i) = \mathbb{1}$, где матрица $\widetilde{A}_{(i)}$ составлена только из тех столбцов $A_{(i)}$, которые еще не исключены. После исключения всех таких векторов получим систему $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k$, где $k \leq n$.

Предложение 2.3. Система векторов $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k$ является линейно независимой системой, эквивалентной системе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Доказательство. В соответствии с процедурой построения системы $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k$ любой вектор $\widetilde{\boldsymbol{a}}_i$, $i = 1, \ldots, k$, совпадает с одним из векторов системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. В то же время для всякого $\boldsymbol{a}_j$, $j = 1, \ldots, n$, выполняется $\boldsymbol{a}_j \in \operatorname{span}\{\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k\}$. Следовательно, обе системы эквивалентны.

В силу леммы 2.6 система $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k$ линейно независима. □

Любая линейно независимая система, эквивалентная системе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, называется базой этой системы.

2.4. Решение уравнений и неравенств

Покажем, как полученные результаты могут быть применены для решения уравнений 1-го рода и связанных с ними неравенств.

Пусть заданы некоторая матрица $A \in \mathbb{X}^{m \times n}$ и вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$. Рассмотрим задачи решения относительно $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ уравнения

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.1}$$

и неравенства

$$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}. \tag{2.2}$$

Далее будем считать, что в уравнении (2.1) и неравенстве (2.2) матрица A является согласованной с вектором $\boldsymbol{b}$.

Решение $\boldsymbol{x}_0$ является максимальным, если $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}_0$ для любого решения $\boldsymbol{x}$.

Если матрица A имеет нулевой столбец, например $\boldsymbol{a}_i$, то решение уравнения (2.1) эквивалентно решению уравнения, полученного из (2.1) путем удаления координаты x_i вектора $\boldsymbol{x}$ вместе с вычеркиванием столбца $\boldsymbol{a}_i$. Каждому решению полученного уравнения будет отвечать множество решений (2.1), соответствующих всем возможным значениям $x_i \in \mathbb{X}$. Ясно, что аналогичные рассуждения справедливы и в отношении неравенства (2.2).

Пусть $A = \mathbb{0}$. Тогда при $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$ решением уравнения становится любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, а при $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$ — решений нет. Решением неравенства является любой $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$.

При $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$ уравнение и неравенство имеют тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$. Если у матрицы A нет нулевых столбцов, то это решение единственное.

Далее будем предполагать, что вектор $\boldsymbol{b}$ и все столбцы матрицы A — ненулевые.

В силу следствия 2.2 решение неравенства всегда существует и записывается в виде $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^- A)^-$.

2.4.1. Существование и единственность решения. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Уравнение (2.1) имеет решение тогда и только тогда, когда $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$.

При этом $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A)^-$ является максимальным решением. Если столбцы матрицы A образуют минимальную систему, порождающую $\boldsymbol{b}$, то других решений нет.

Доказательство. Условие существования решения и вид частного решения вытекают из леммы 2.5. Результат следствия 2.2 указывает на то, что это частное решение — максимальное. Единственность решения следует из свойства единственности разложения по векторам минимальной порождающей системы. $\square$

Заметим, что вычисление величины $\Delta(A, \boldsymbol{b})$ требует $2n^2 + 4n$ операций умножения и обращения, а также $2n^2 + n$ операций сложения. Решение $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A)^-$ может быть получено за $n^2 + 2n$ операций умножения и n^2 операций сложения.

Назовем псевдорешением уравнения (2.1) решение уравнения

$$A\boldsymbol{x} = \sqrt{\Delta(A, \boldsymbol{b})} A (\boldsymbol{b}^- A)^-,$$

которое всегда существует и имеет вид $\boldsymbol{x} = \sqrt{\Delta(A, \boldsymbol{b})} (\boldsymbol{b}^- A)^-$.

Ясно, что при $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$ псевдорешение превращается в решение. Кроме того, из леммы 2.4 следует, что среди всех векторов линейной оболочки столбцов матрицы A псевдорешение обеспечивает минимум расстояния до вектора $\boldsymbol{b}$ в смысле метрики ρ.

Если разрешимость уравнения (2.1) не гарантируется, то в качестве $\boldsymbol{x}$ можно взять его псевдорешение, которое, с одной стороны, совпадает с решением, если оно существует, а, с другой, — минимизирует невязку правой и левой частей уравнения.

Предположим, что $\Delta(A,\boldsymbol{b}) > \mathbb{1}$, то есть уравнение (2.1) не имеет решений. В этом случае может представлять интерес определение таких векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, которые, являясь оптимальными с точки зрения невязки обеих частей уравнения, в то же время обеспечивают выполнение соответствующих неравенств $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ и $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$.

Опираясь на лемму 2.4, нетрудно понять, что такие векторы имеют вид

$$\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{b}^- A)^-, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \Delta(A,\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^- A)^-.$$

Заметим, что при $\Delta(A,\boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$ векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ совпадают.

2.4.2. Общее решение уравнения. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Предположим, что вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от некоторого подмножества столбцов матрицы A. Обозначим через I множество индексов таких столбцов. Введем матрицу $G_I = \mathrm{diag}(g_1(I),\dots,g_n(I))$, где $g_i(I) = \mathbb{0}$, если $i \in I$, и $g_i(I) = \mathbb{1}$, если $i \notin I$.

Предложение 2.4. Если $\boldsymbol{b} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_i | i \in I\}$, то любой вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A \oplus \boldsymbol{v}^T G_I)^-$, где $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$, является решением (2.1).

Доказательство. Условие $\boldsymbol{b} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_i | i \in I\}$ равносильно равенству $\boldsymbol{b} = \bigoplus_{i\in I} x_i \boldsymbol{a}_i$, которое выполняется, если для всех $i \in I$ положить $x_i = (\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{a}_i)^-$.

Для всех $i \notin I$ определим $x_i = (\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{a}_i \oplus v_i)^- \leq (\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{a}_i)^-$, где $v_i \in \mathbb{X}$. Заметим, что тогда $\boldsymbol{b} \geq \bigoplus_{i\notin I} x_i \boldsymbol{a}_i$.

Для $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$ выполняется $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n \boldsymbol{a}_n$, откуда следует, что вектор $\boldsymbol{x}$ является решением (2.1).

Записывая все такие решения в векторной форме с использованием матрицы G_I, приходим к требуемому результату. □

Рассмотрим набор индексов I такой, что $\boldsymbol{b} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_i | i \in I\}$ и $\boldsymbol{b} \notin \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_i | i \in I'\}$ для всех $I' \subset I$. Это означает, что набор I

определяет подмножество столбцов матрицы A, которое образует минимальную порождающую $\boldsymbol{b}$ систему векторов.

Обозначим через $\mathcal{I}$ множество всех таких наборов индексов. Очевидно, что $\mathcal{I} \neq \emptyset$ только тогда, когда уравнение имеет решение.

Для каждого $I \in \mathcal{I}$ так же, как раньше, определим диагональную матрицу G_I.

Теперь, опираясь на предложение 2.4, нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.2. Пусть уравнение (2.1) разрешимо. Тогда его общим решением является семейство решений

$$\boldsymbol{x}_I = (\boldsymbol{b}^- A \oplus \boldsymbol{v}^T G_I)^-, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n, \quad I \in \mathcal{I}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим частный случай, когда семейство сокращается до одного множества решений. Пусть столбцы матрицы A линейно независимы. Тогда существует только одно подмножество столбцов, которое образует минимальную систему для $\boldsymbol{b}$, и одна матрица G. Общее решение принимает вид $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A \oplus \boldsymbol{v}^T G)^-$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$.

Если это подмножество совпадает с множеством всех столбцов матрицы, то $G = \mathbb{0}$, а общее решение сводится к единственному решению $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A)^-$.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение (2.1) с матрицей второго порядка, для которого

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

при условии, что $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} > \mathbb{0}$ и $b_1, b_2 > \mathbb{0}$.

Пусть выполняется условие $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = (A(\boldsymbol{b}^- A)^-)^- \boldsymbol{b} = \mathbb{1}$.

Максимальное решение уравнения имеет вид

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A)^- = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{a}_1)^{-1} \\ (\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{a}_2)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_1^{-1} a_{11} \oplus b_2^{-1} a_{21})^{-1} \\ (b_1^{-1} a_{12} \oplus b_2^{-1} a_{22})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Если вектор $\boldsymbol{b}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\boldsymbol{a}_1$ или $\boldsymbol{a}_2$, то решение $\boldsymbol{x}$ является единственным (рис. 2.3).

Два случая, в которых уравнение (2.1) имеет более одного решения, показаны на рис. 2.4.

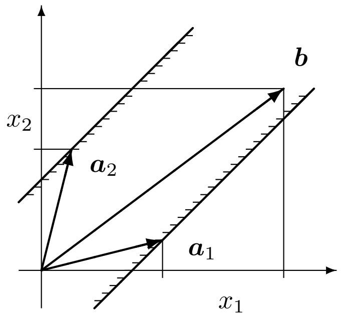


Рис. 2.3. Единственное решение уравнения в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$

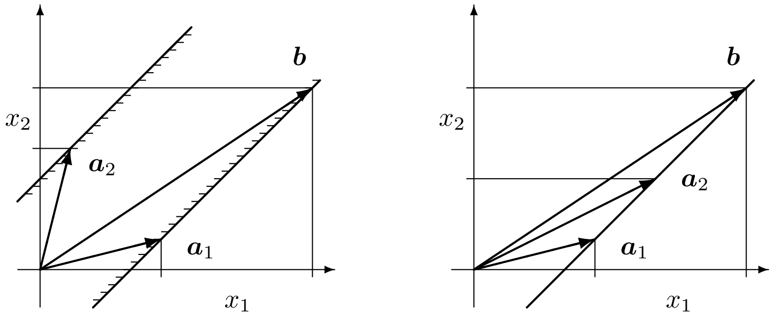


Рис. 2.4. Случаи не единственного решения уравнения в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$

В случае, представленном слева, вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен $\boldsymbol{a}_1$, но не коллинеарен $\boldsymbol{a}_2$. Решением уравнения будет любой вектор $\boldsymbol{x}$ с координатами

$$x_1 = (b_1^{-1} a_{11} \oplus b_2^{-1} a_{21})^{-1},$$
$$x_2 \leq (b_1^{-1} a_{12} \oplus b_2^{-1} a_{22})^{-1}.$$

Справа изображен случай, когда сами векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны. При таком условии имеется два семейства решений, которые состоят из векторов $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ с координатами

$$\begin{aligned} x_1' &= (b_1^{-1}a_{11} \oplus b_2^{-1}a_{21})^{-1}, & x_1'' &\leq (b_1^{-1}a_{11} \oplus b_2^{-1}a_{21})^{-1}, \\ x_2' &\leq (b_1^{-1}a_{12} \oplus b_2^{-1}a_{22})^{-1}, & x_2'' &= (b_1^{-1}a_{12} \oplus b_2^{-1}a_{22})^{-1}. \end{aligned}$$

2.4.3. Решение смешанной системы. Рассмотрим систему относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.4}$$

$$C\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}, \tag{2.5}$$

где A и C — матрицы, а $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы подходящего размера.

Обозначим через I произвольный набор индексов, который задает минимальную порождающую вектор $\boldsymbol{b}$ систему столбцов матрицы A. Пусть $\mathcal{I}$ — множество всех таких наборов. Определим подмножество $\widetilde{\mathcal{I}} = \{I \in \mathcal{I} | \boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c}_i \leq \boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a}_i, i \in I\} \subset \mathcal{I}$, где $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{c}_i$ обозначают столбцы с индексом i матриц A и C соответственно.

Лемма 2.7. Система (2.4)-(2.5) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$ и $\widetilde{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. При этом общим решением является семейство

$$\boldsymbol{x}_I = (\boldsymbol{b}^{-}A \oplus \boldsymbol{d}^{-}C \oplus \boldsymbol{v}^T G_I)^{-}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n, \quad I \in \widetilde{\mathcal{I}}.$$

Доказательство. Ясно, что для разрешимости системы необходимо и достаточно существование решения $\boldsymbol{x}$ уравнения (2.4) такого, что $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{d}^{-}C)^{-}$.

Уравнение (2.4) имеет решение, если только $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$. Общее решение уравнения записывается в виде (2.3). Рассмотрим решение, которое отвечает произвольному набору $I \in \mathcal{I}$. Таким решением является множество векторов $\boldsymbol{x}$ с координатами $x_i = (\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a}_i)^{-}$, если $i \in I$, и $x_i = (\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a}_i \oplus v_i)^{-}$ при всех $v_i \in \mathbb{X}$, если $i \notin I$.

Среди векторов этого множества найдутся решения неравенства (2.5) только тогда, когда $(\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a}_i)^{-} \leq (\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c}_i)^{-}$ для всех $i \in I$. Отбирая только те наборы I, для которых последнее условие выполняется, получим множество $\widetilde{\mathcal{I}}$.

Осталось заметить, что каждому множеству $I \in \widetilde{\mathcal{I}}$ соответствует решение системы (2.4)-(2.5) в виде множества векторов $\boldsymbol{x}$ с координатами $x_i = (\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a}_i)^{-}$, если $i \in I$, и $x_i = (\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a}_i \oplus \boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c}_i \oplus v_i)^{-}$ при всех $v_i \in \mathbb{X}$, если $i \notin I$. $\square$

2.4.4. Решение уравнения $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$. Рассмотрим задачу решения относительно $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ уравнения

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}, \tag{2.6}$$

где A — матрица, а $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы подходящего размера.

Ниже будем предполагать, что $\boldsymbol{d} \leq \boldsymbol{b}$. Очевидно, что при нарушении этого условия уравнение решений не имеет.

Введем множества индексов $I_1 = \{i | d_i < b_i\}$ и $I_2 = \{i | d_i = b_i\}$.

Обозначим через A_1 и A_2 подматрицы, составленные из строк матрицы A с индексами из множеств I_1 и I_2 соответственно. Аналогичным образом определим векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$, составленные из координат векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$.

Понятно, что тогда уравнение (2.6) равносильно системе

$$\begin{aligned} A_1\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}_1, \\ A_2\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{d}_2. \end{aligned}$$

Как и раньше, найдем множество $\mathcal{I}_1$ всех наборов индексов I минимальных подмножеств столбцов матрицы A_1 относительно $\boldsymbol{b}_1$, а также подмножество $\widetilde{\mathcal{I}}_1$ наборов, которые определяют общие решения для уравнения и неравенства.

Лемма 2.8. Уравнение (2.6) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия $\Delta(A_1, \boldsymbol{b}_1) = \mathbb{1}$ и $\widetilde{\mathcal{I}}_1 \neq \emptyset$. При этом общим решением является семейство

$$\boldsymbol{x}_I = (\boldsymbol{b}^- A \oplus \boldsymbol{v}^T G_I)^-, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n, \quad I \in \widetilde{\mathcal{I}}_1.$$

Доказательство. Применяя лемму 2.7, получим условия существования решения, а также общее решение, которое записывается в виде $\boldsymbol{x}_I = (\boldsymbol{b}_1^- A_1 \oplus \boldsymbol{d}_2^- A_2 \oplus \boldsymbol{v}^T G_I)^-$, где $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$, $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_1$.

Заметим, что $\boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{b}_2$, а потому $\boldsymbol{b}_1^- A_1 \oplus \boldsymbol{d}_2^- A_2 = \boldsymbol{b}^- A$. □

На рис. 2.5 приведены примеры в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ взаимного расположения векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$, при котором решение уравнения существует.

Заметим, что решение уравнения (2.6) может существовать тогда, когда уравнения (2.1) его не имеет (пример справа на рис. 2.5).

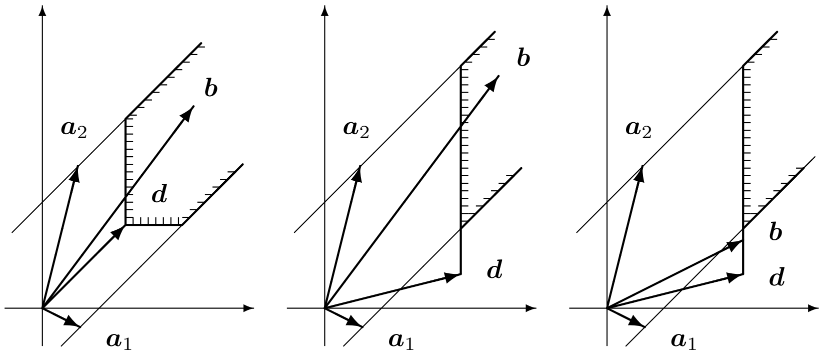


Рис. 2.5. Существование решения уравнения $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$

2.5. Приложения и примеры

Рассмотрим некоторые примеры применения полученных выше результатов в различных приложениях. Примеры, представленные в п. 2.5.2. и 2.5.3., представляют собой модификации задач из [8].

2.5.1. Сетевое планирование. Пусть имеется проект, который состоит в параллельном выполнении n работ. Для завершения каждой из работ могут потребоваться промежуточные результаты других работ, время получения которых задано.

Для каждой работы $i = 1, \ldots, n$ введем обозначения:

x_i — время начала работы;

y_i — время завершения работы;

a_{ij} — время получения промежуточного результата работы j, который необходим для завершения работы i.

Время завершения каждой работы i определяется выражением

$$y_i = \max(x_1 + a_{i1}, \ldots, x_n + a_{in}),$$

которое в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ принимает вид

$$y_i = a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n.$$

С учетом обозначений

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеем равенство

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$

На рис. 2.6 представлена сетевая модель некоторого проекта.

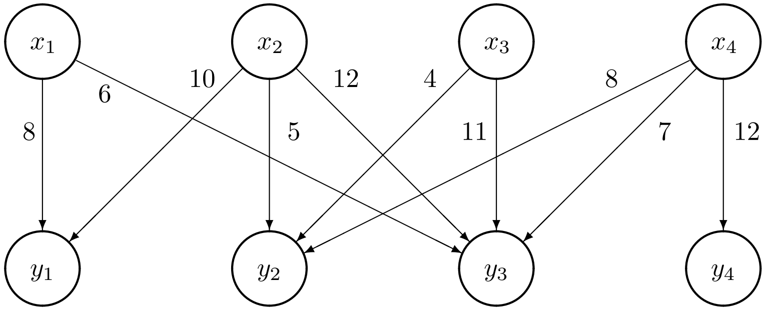


Рис. 2.6. Сетевая модель проекта

Соответствующая матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 5 & 4 & 8 \\ 6 & 12 & 11 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 12 \end{pmatrix}.$$

Пусть для всех работ заданы директивные сроки завершения их выполнения. Требуется определить сроки начала работ, при которых время завершения совпадает с директивными сроками. Если такие сроки начала работ определить невозможно, то следует найти приближенные решения задачи, которые являются оптимальными с точки зрения минимального нарушения директивных сроков.

Обозначим через $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$ вектор директивных сроков завершения работ. Тогда рассматриваемая задача планирования сводится к исследованию в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ уравнения (2.1).

Рассмотрим величину $\Delta = \Delta(A, \boldsymbol{b})$. Если $\Delta = \mathbb{1} = 0$, то решение уравнения существует. Выполнение сроков $\boldsymbol{b}$ обеспечивает, например, максимальное решение уравнения $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$. Это решение задает самые поздние допустимые сроки начала работ.

При условии $\Delta > 0$ можно найти приближенные решения

$$\boldsymbol{x}_0 = \sqrt{\Delta}(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}, \qquad \boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \Delta(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}.$$

Этим решениям отвечают сроки окончания работ

$$\boldsymbol{y}_0 = A\boldsymbol{x}_0, \qquad \boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x}_1 \leq \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b},$$

отклонения которых от директивных сроков определяют величины

$$\rho(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\Delta}, \qquad \rho(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{b}) = \rho(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{b}) = \Delta.$$

Предположим, что допускается корректировка первоначальных директивных сроков. Тогда для определения новых сроков завершения работ можно взять, например, любой вектор $\boldsymbol{b}'$ такой, что $\boldsymbol{y}_1 \leq \boldsymbol{b}' \leq \boldsymbol{y}_2$. При этом величина отклонения новых сроков от первоначальных не будет превосходить Δ. Минимум отклонения, равный $\sqrt{\Delta}$, достигается при $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{y}_0$.

Для проекта, представленного на рис. 2.6, найдем самые поздние допустимые сроки начала работ для набора директивных сроков окончания $\boldsymbol{b} = (14, 11, 16, 15)^T$.

Вычислим величину $\Delta = \Delta(A, \boldsymbol{b}) = (A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-})^{-}\boldsymbol{b} = 0$. В силу равенства $\Delta = 0$ решение уравнения (2.1) существует и равно

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

Найдем сроки начала работ для $\boldsymbol{b} = (15, 15, 15, 15)^T$.

Поскольку $\Delta = \Delta(A, \boldsymbol{b}) = 4 > 0$, уравнение (2.1) не имеет решений. Найдем приближенные решения и соответствующие им сроки окончания работ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 &= \sqrt{\Delta}(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-} = (9, 5, 6, 5)^T, & \boldsymbol{y}_0 &= A\boldsymbol{x}_0 = (17, 13, 17, 17)^T, \\ \boldsymbol{x}_1 &= (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-} = (7, 3, 4, 3)^T, & \boldsymbol{y}_1 &= A\boldsymbol{x}_1 = (15, 11, 15, 15)^T, \\ \boldsymbol{x}_2 &= \Delta(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-} = (11, 7, 8, 7)^T, & \boldsymbol{y}_2 &= A\boldsymbol{x}_2 = (19, 15, 19, 19)^T. \end{aligned}$$

2.5.2. Исследование надежности. Рассмотрим модель технического устройства, которое может работать в одном из m режимов. Работоспособность устройства зависит от исправности некоторого установленного в нем узла, которое может выпускаться n различными производителями и определяется заданным для каждого режима и производителя набором вероятностей выхода из строя устройства при условии неисправности узла.

Для каждого режима работы устройства $i = 1, \ldots, m$ введем обозначения:

y_i — максимальная по всем производителям узла вероятность выхода устройства из строя при неисправности узла;

a_{ij} — вероятность выхода из строя устройства при неисправности узла от производителя j.

Для каждого производителя $j = 1, \ldots, n$ определим величину

x_j — вероятность выхода узла из строя.

Максимальная вероятность выхода из строя устройства в режиме i определяется выражением в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\max,\times}$

$$y_i = a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n.$$

Переходя к векторным обозначениям, имеем равенство

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$

Пусть $\boldsymbol{b}$ — вектор допустимых для каждого режима вероятностей выхода устройства из строя. Составим неравенство

$$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},$$

решение $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$ которого определяет максимально допустимые для каждого производителя вероятности выхода из строя узла.

Найдем максимальное решение неравенства при условии, что

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0{,}025 \\ 0{,}02 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}.$$

После выполнения необходимых вычислений в $\mathbb{R}_{\max,\times}$ получим

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}04 & 0{,}06 \end{pmatrix}^{T}.$$

2.5.3. Планирование производства. Пусть имеется n видов сырья, которые должны использоваться в любом из m производственных процессов. Для всех процессов заданы нормы времени на потребление каждого вида сырья. Процесс останавливается, когда сырье хотя бы одного вида оказывается исчерпанным.

Для каждого процесса $i = 1, \ldots, m$ введем обозначения:

y_i — максимальная продолжительность процесса;

a_{ij} — среднее время потребления единицы сырья j.

Для каждого вида сырья $j = 1, \ldots, n$ определим величину

x_j — начальное количество сырья.

Максимальная продолжительность процесса i определяется равенством в полукольце $\mathbb{R}_{\min,\times}$

$$y_i = a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n.$$

В векторных обозначениях имеем равенство

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$

Предположим, что для каждого процесса i запланирована определенная продолжительность b_i. Необходимо установить такой минимальный начальный запас каждого вида сырья, чтобы при запуске любого из процессов обеспечить запланированную продолжительность процесса.

Пусть $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$. Решение задачи сводится к нахождению максимального (минимального в смысле обычного порядка) решения уравнения (2.1).

Найдем решение при условии, что

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Проверив выполнение условия $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1} = 1$, имеем

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A)^- = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Допустим, что продолжительность процесса i (например, по технологическим причинам) не может превышать некоторой величины d_i. Введем вектор $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_m)^T$. Имеем в полукольце $\mathbb{R}_{\min,\times}$ уравнение (2.6).

Пусть матрица A определена так же, как в предыдущей задаче. Найдем решение уравнения (2.6) при условии, что

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Если уравнение имеет решение, то его максимальное (минимальное в смысле обычного порядка) решение имеет вид

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A)^- = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

и является решением задачи. Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что вектор $\boldsymbol{x}$ является решением уравнения.

2.5.4. Анализ цен предложения товарного рынка. Предположим, что на рынке представлен товар одного и того же назначения от n различных производителей. В зависимости от наличия дополнительных опций соответствующий вариант товара предлагается в одной из m ценовых категорий по цене, пропорциональной некоторой базовой цене производителя.

Для каждой категории $i = 1, \ldots, m$ определим величины

y_i — минимальная цена предложения товара по всем производителям;

z_i — максимальная цена предложения товара по всем производителям.

Для каждого производителя $j = 1, \ldots, n$ введем обозначения:

x_j — базовая цена товара;

a_{ij} — коэффициент, определяющий цену предложения варианта товара в ценовой категории i.

Для всех $i = 1, \ldots, m$ имеем в полукольцах $\mathbb{R}_{\min,\times}$ и $\mathbb{R}_{\max,\times}$ равенства

$$\begin{aligned} y_i &= a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n \quad (\mathbb{R}_{\min,\times}), \\ z_i &= a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n \quad (\mathbb{R}_{\max,\times}), \end{aligned}$$

или, в векторных обозначениях,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= A\boldsymbol{x} \quad (\mathbb{R}_{\min,\times}), \\ \boldsymbol{z} &= A\boldsymbol{x} \quad (\mathbb{R}_{\max,\times}). \end{aligned}$$

Предположим, что для каждой ценовой категории заданы ее нижняя и верхняя границы. Определим величину базовой цены товара для каждого производителя, при которой цена варианта товара во всех ценовых категориях удовлетворяет указанным границам.

Обозначим через $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы нижних и верхних границ соответственно. Имеем неравенства

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{b} \quad (\mathbb{R}_{\min,\times}), \\ A\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{c} \quad (\mathbb{R}_{\max,\times}). \end{aligned}$$

Учитывая, что первое неравенство эквивалентно неравенству $\boldsymbol{x}^{-}A^{-} \leq \boldsymbol{b}^{-}$ в полукольце $\mathbb{R}_{\max,\times}$, получим в этом полукольце систему неравенств

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{-}A^{-} &\leq \boldsymbol{b}^{-}, \\ A\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

Совместное решение неравенств приводит к результату в виде

$$\boldsymbol{x}_1 = A^{-}\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{c}^{-}A)^{-} = \boldsymbol{x}_2.$$

Найдем границы для базовых цен товара в случае четырех производителей при условии, что

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 1{,}2 & 1{,}5 & 1{,}0 \\ 2{,}7 & 3{,}2 & 2{,}5 & 4{,}1 \\ 4{,}0 & 5{,}0 & 4{,}0 & 6{,}4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Вычисление нижних и верхних границ дает

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 15{,}0 & 12{,}5 & 16{,}0 & 10{,}0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 20{,}0 & 16{,}0 & 20{,}0 & 12{,}5 \end{pmatrix}^T.$$

Глава 3

ОДНОРОДНОЕ И НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Введение

Одним из основных объектов исследования идемпотентной алгебры являются уравнения 2-го рода относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$, которые имеют вид

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \qquad A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x},$$

где A и $\boldsymbol{b}$ — заданные квадратная матрица и некоторый вектор.

Эти уравнения часто встречаются при исследовании различных технических, экономических, производственных и других систем и обычно называются однородным и неоднородным уравнениями Беллмана. К решению таких уравнений, по существу, сводятся многие классические задачи [60, 101, 42], включая задачи о кратчайшем пути в графе, транзитивном замыкании, минимальном разрезе.

В идемпотентной алгебре эти уравнения играют роль однородного и неоднородного линейных уравнений обычной алгебры в том смысле, что общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

В существующей литературе задача решения однородного уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, как правило, сводится к проблеме собственных значений матрицы A. Иногда эта задача рассматривается в контексте анализа более общего уравнения $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ (которое, очевидно, становится однородным при $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$). Вопросы исследования и численного решения неоднородного уравнения $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ затрагиваются в целом ряде работ, опубликованных начиная с середины 1950-х годов. Обзор литературы и представленных в ней результатов можно найти, например, в [61, 101, 74, 95, 55, 42].

Большинство имеющихся работ посвящено исследованию условий существования решения уравнения и предлагают только его минимальное решение $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b}$, где $A^{+} = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1}$ — матрица, которую иногда называют квазиобратной матрицей [74] или матрицей Клини [95]. Условия существования и единственности решения обычно формулируются в этих работах в терминах теории графов в виде ограничений на значения весов циклических путей в графе, соответствующим матрице A.

К числу первых публикаций по вычислительным методам решения неоднородного уравнения относятся работы С. К. Клини [80] и Б. А. Карре [60]. В [80] для нахождения вектора $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b}$ предложена вычислительная схема, которая использует тот же подход, что и классический метод исключения Гаусса. В [60] показано, что для решения уравнения могут быть применены итерационные процедуры, которые являются аналогами классических вычислительных схем Якоби и Гаусса-Зейделя.

Проблема построения общего решения однородного и неоднородного уравнений рассматривалась в работах [18, 55]. Было показано, что общее решение неоднородного уравнения представляется в виде суммы его минимального решения и общего решения однородного уравнения. В работе [18] представлено (без доказательства) общее решение однородного уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, которое имеет вид линейной оболочки некоторых столбцов матрицы A^{+}. Выбор столбцов осуществляется на основе некоторой довольно сложной процедуры анализа циклических путей в соответствующем графе.

В настоящей главе предложен новый подход к решению линейных уравнений для случая идемпотентного полукольца с обратным по умножению (полуполя), который направлен на получение результатов в компактной форме, удобной как для их реализации в виде вычислительных процедур, так и для формального анализа [27]. При доказательстве некоторых утверждений использованы приемы, разработанные в [8, 69, 55].

Сначала определяется некоторая функция, заданная на множестве квадратных матриц, которая затем играет роль идемпотентного аналога определителя матрицы. Функция, которая обозначается знаком Tr, вводится так, чтобы величина $\mathrm{Tr}\, A$ являлась (идемпотентным) многочленом от элементов матрицы A и могла быть использована при исследовании линейных уравнений по возможности так же, как обычный определитель в арифметическом пространстве. Такой аналог определителя представляется более удобным инструментом анализа уравнений, чем другие подобные конструкции, известные в литературе, включая перманент [69], бидетерминант [74] и доминант [100].

Для произвольной квадратной матрицы A определяется смысл обозначений A^{+}, $A^{\times}$ и A^{*} для специальных матриц, которые вычисляются на основе A, и устанавливается ряд соотношений между ними. В частности, получены неравенства, которые обобщают известное неравенство Карре для степеней матрицы A.

Для однородного и неоднородного уравнений с неразложимой матрицей A находятся условия существования решения, которые опираются на величину $\operatorname{Tr} A$ аналогично тому, как используется определитель при анализе обычных линейных уравнений. Впервые получены выражения для общих решений уравнений в замкнутой векторной форме. В качестве примера рассмотрены произвольные уравнения второго порядка, для которых в явном виде представлены условия существования и общее решение.

Определены условия существования и единственности решения, а также общее решение уравнений с разложимой матрицей. В качестве прямого следствия полученных результатов найдены решения однородного $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}$ и неоднородного $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}$ неравенств. Рассмотрены задачи совместного решения уравнений и неравенств разных типов. Обсуждаются вопросы определения размерности пространства решений уравнений и неравенств, а также формы представления самих решений. Представлены примеры практических приложений полученных результатов [31].

3.2. Определения и предварительные результаты

Пусть $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ — квадратная матрица. Сумму всех циклических произведений элементов матрицы A обозначим символом

$$\operatorname{Tr} A = \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{1\leq i_0,\ldots,i_{m-1}\leq n} a_{i_0 i_1}\cdots a_{i_{m-1}i_0} = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr} A^m.$$

Ниже будет показано, что при исследовании линейных уравнений в идемпотентной алгебре функция $\operatorname{Tr} A$ играет роль определителя матрицы в том смысле, что ее значение может быть использовано для ответа на вопрос, имеет ли уравнение только тривиальное решение или у него существуют и другие решения.

Сначала рассмотрим некоторые свойства матриц, связанные с величиной Tr.

Лемма 3.1. Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$ справедливы следующие утверждения:

1) если $\mathrm{Tr}\, A \leq \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} \geq \mathrm{Tr}\, A$;

2) если $\mathrm{Tr}\, A > \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} \geq (\mathrm{Tr}\, A)^{1/n}$.

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} x_i^{-1} a_{ij} x_j.$$

Возьмем любую последовательность индексов $i_0, \ldots, i_m$ такую, что $i_0 = i_m$, $1 \leq m \leq n$. Применяя неравенства между арифметическим и геометрическим средними и условие $x_{i_0}, \ldots, x_{i_{m-1}} \neq \mathbb{0}$, имеем

$$\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} \geq x_{i_0}^{-1} a_{i_0 i_1} x_{i_1} \oplus \cdots \oplus x_{i_{m-1}}^{-1} a_{i_{m-1} i_m} x_{i_m} \geq (a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{m-1} i_m})^{1/m}.$$

Учитывая произвольный выбор индексов $i_0, \ldots, i_m$ и числа m, приходим к неравенству $\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} \geq \mathrm{tr}\, A \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/n}(A^n)$.

Пусть $\mathrm{Tr}\, A \leq \mathbb{1}$. В этом случае $\mathrm{tr}\, A^m \leq \mathbb{1}$ и $\mathrm{tr}^{1/m}(A^m) \geq \mathrm{tr}\, A^m$ для всех m, откуда следует, что $\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} \geq \mathrm{tr}\, A \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}\, A^n = \mathrm{Tr}\, A$.

Если $\mathrm{Tr}\, A > \mathbb{1}$, то среди чисел m найдутся такие, для которых $\mathrm{tr}\, A^m > \mathbb{1}$ и, следовательно, $\mathrm{tr}^{1/m}(A^m) \geq \mathrm{tr}^{1/n}(A^m)$. В этом случае имеем $\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} \geq \mathrm{tr}^{1/n}(A) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/n}(A^n) = (\mathrm{Tr}\, A)^{1/n}$. ☐

Для любой матрицы A определим матрицы A^{+} и $A^{\times}$ следующим образом

$$A^{+} = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1}, \qquad A^{\times} = A A^{+} = A \oplus \cdots \oplus A^{n}.$$

В работе [60] Б. А. Карре показал, что в случае $\mathrm{Tr}\, A \leq \mathbb{1}$ для любого целого $k \geq 0$ выполняется неравенство $A^k \leq A^{+}$. Следующий результат представляет собой обобщение неравенства Карре.

Лемма 3.2. Если $\mathrm{Tr}\, A \neq \mathbb{0}$, то при любом целом $k \geq n$ справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A \le \mathbb{1}$, то $A^k \le (\operatorname{Tr} A)^{(k+1)/n-1} A^+$;

2) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то $A^k \le (\operatorname{Tr} A)^k A^+$.

Доказательство. Возьмем любое $k \ge n$. Покажем, что неравенства выполняются для соответствующих элементов $a_{ij}^{(k)}$ и $a_{ij}^{(+)}$ матриц A^k и A^+. Положив $i_0 = i$ и $i_k = j$, запишем

$$a_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{1 \le i_1, \dots, i_{k-1} \le n} a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{k-1} i_k}.$$

Рассмотрим произведение $S_{ij} = a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{k-1} i_k}$. Если среди сомножителей произведения S_{ij} есть нуль, то $S_{ij} = \mathbb{0}$. Очевидно, что тогда $S_{ij} \le (\operatorname{Tr} A)^\alpha a_{ij}^{(+)}$ при любом α.

Пусть $S_{ij} > \mathbb{0}$. Перегруппируем множители произведения S_{ij}. Сначала объединим все циклические произведения, состоящие из $m = 1$ множителя. Пусть $\alpha_1 \ge 0$ — количество таких произведений. Из числа оставшихся выберем циклические произведения из $m = 2$ множителей, а их число обозначим через α_2. Затем продолжим эту процедуру для всех последующих значений $m \le n$.

Учитывая, что циклическое произведение из m множителей не превосходит $\operatorname{tr} A^m$, будем иметь

$$S_{ij} \le \operatorname{tr}^{\alpha_1}(A) \cdots \operatorname{tr}^{\alpha_n}(A^n) S'_{ij} \le (\operatorname{Tr} A)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} S'_{ij},$$

где S'_{ij} — произведение без циклов, которое состоит из не более чем $n-1$ множителя. Ясно, что при этом выполняется неравенство $S'_{ij} \le a_{ij}^{(+)}$, а также неравенство $k-n+1 \le \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n \le k$.

В силу того, что

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n \le n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n),$$

имеем неравенство $(k-n+1)/n \le \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le k$.

Тогда, если $\operatorname{Tr} A \le \mathbb{1}$, то

$$S_{ij} = a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{k-1} i_k} \le (\operatorname{Tr} A)^{(k+1)/n-1} a_{ij}^{(+)}$$

при любом наборе индексов $i_1, \dots, i_{k-1}$ и, следовательно,

$$a_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{1 \le i_1, \dots, i_{k-1} \le n} a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{k-1} i_k} \le (\operatorname{Tr} A)^{(k+1)/n-1} a_{ij}^{(+)}.$$

.

Если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то $S_{ij} \leq (\operatorname{Tr} A)^k a_{ij}^{(+)}$. В этом случае имеем неравенство $a_{ij}^{(k)} \leq (\operatorname{Tr} A)^k a_{ij}^{(+)}$. □

Следствие 3.1. Если $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$, то выполняются равенства

$$I \oplus A^{\times} = A^{+}, \qquad A^{+} A^{+} = A^{+}.$$

Доказательство. Учитывая, что $A^k \leq A^{+}$ для всех $k \geq n$, получаем первое равенство $I \oplus A^{\times} = A^{+} \oplus A^n = A^{+}$. Второе равенство проверяется аналогично. □

Из равенства $I \oplus A^{\times} = A^{+}$ следует, что $A^{\times} \leq A^{+}$, причем соответствующие элементы $a_{ij}^{(+)}$ и $a_{ij}^{(\times)}$ этих матриц совпадают за исключением, быть может, диагональных элементов, которые, как нетрудно видеть, удовлетворяют условиям $a_{ii}^{(+)} = \mathbb{1}$ и $a_{ii}^{(\times)} \leq \mathbb{1}$.

Обозначим через $\boldsymbol{a}_i^{+}$ и $\boldsymbol{a}_i^{\times}$ столбцы с индексом i матриц A^{+} и $A^{\times}$, а через $a_{ii}^{(m)}$ диагональные элементы матрицы A^m. Следующее утверждение использует свойства функции Tr для получения аналога результата, установленного в работах [69, 101, 55].

Предложение 3.1. Если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то матрицы A^{+} и $A^{\times}$ имеют общие одноименные столбцы, которые совпадают, причем равенство $\boldsymbol{a}_i^{+} = \boldsymbol{a}_i^{\times}$ выполняется тогда и только тогда, когда $a_{ii}^{(m)} = \mathbb{1}$ для некоторого $m = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то недиагональные элементы матриц A^{+} и $A^{\times}$ совпадают. Равенство $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$ равносильно тому, что $\operatorname{tr} A^m = \mathbb{1}$ хотя бы для одного $m = 1, \ldots, n$. Последнее имеет место, если только $a_{ii}^{(m)} = \mathbb{1}$ для некоторого индекса i. Учитывая, что тогда $a_{ii}^{(\times)} = \mathbb{1}$, имеем $a_{ii}^{(\times)} = a_{ii}^{(+)} = \mathbb{1}$, то есть $\boldsymbol{a}_i^{+} = \boldsymbol{a}_i^{\times}$. □

Для любой матрицы A такой, что $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, обозначим через A^{*} матрицу того же размера, столбцы которой удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{a}_i^{*} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{+}, & \text{если } \boldsymbol{a}_i^{+} = \boldsymbol{a}_i^{\times}, \\ \mathbb{0}, & \text{если } \boldsymbol{a}_i^{+} \neq \boldsymbol{a}_i^{\times}, \end{cases}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Если $\operatorname{Tr} A \neq \mathbb{1}$, то положим $A^{*} = \mathbb{0}$.

3.3. Однородное и неоднородное уравнения

Пусть $A \in \mathbb{X}^{n \times n}$ — матрица, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ — вектор. Однородным уравнением относительно $\boldsymbol{x}$ называется уравнение

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}. \tag{3.1}$$

Предположим также, что задан некоторый вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^n$. Неоднородным уравнением относительно $\boldsymbol{x}$ называется уравнение

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}. \tag{3.2}$$

Решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$ этих уравнений называется тривиальным.

Решение $\boldsymbol{x}_0$ уравнения называется минимальным, если для любого решения $\boldsymbol{x}$ этого уравнения выполняется $\boldsymbol{x}_0 \leq \boldsymbol{x}$.

Ясно, что все решения однородного уравнения образуют полумодуль в $\mathbb{X}^n$. Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.2. Если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то решением однородного уравнения (3.1) является вектор $\boldsymbol{x} = A^* \boldsymbol{v}$ для любого $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$. Тогда у матриц A^+ и $A^\times$ найдутся общие столбцы $\boldsymbol{a}_i^+ = \boldsymbol{a}_i^\times$. В силу равенства $A^\times = AA^+$ имеем $A\boldsymbol{a}_i^+ = \boldsymbol{a}_i^\times = \boldsymbol{a}_i^+$, то есть $\boldsymbol{a}_i^+$ удовлетворяет уравнению (3.1). Учитывая, что все такие столбцы и только они являются ненулевыми столбцами матрицы A^*, заключаем, что всякий вектор $\boldsymbol{x} = A^* \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — любой вектор, является решением (3.1). $\square$

3.4. Неразложимые матрицы

Будем искать условия существования решения, а также общее решение уравнений при условии, что матрица A является неразложимой. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 3.3. Если A — неразложимая матрица, то любое нетривиальное решение $\boldsymbol{x}$ уравнений (3.1) и (3.2) не имеет нулевых координат.

Доказательство. Рассмотрим однородное уравнение (3.1) (исследование (3.2) проводится аналогичным образом). Пусть вектор

$\boldsymbol{x}$ является нетривиальным решением (3.1). Покажем, что все координаты вектора $\boldsymbol{x}$ отличны от нуля.

Допустим, что имеется одна координата $x_i = \mathbb{0}$ и $x_j > \mathbb{0}$ при всех $j \neq i$. Из равенства $a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n = \mathbb{0}$ следует, что $a_{ij} = \mathbb{0}$, если $j \neq i$. Тогда, меняя местами строки 1 и i, а затем столбцы с теми же индексами, можно привести матрицу A к треугольной форме, что противоречит условию неразложимости матрицы.

Предположение о том, что вектор $\boldsymbol{x}$ имеет любое число $l < n$ нулевых координат, рассматривается аналогично. □

3.4.1. Решение однородного уравнения.

Предложение 3.4. Однородное уравнение (3.1) с неразложимой матрицей A имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$.

Доказательство. Достаточность условия $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$ следует из результата предложения 3.2.

Проверим необходимость, используя те же рассуждения, что и в работе [8]. Пусть $\boldsymbol{x}$ — нетривиальное решение уравнения. Покажем, что тогда $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$.

Рассмотрим любую последовательность индексов $i_0, \ldots, i_m$, где $i_m = i_0$, $1 \leq m \leq n$. Из уравнения (3.1) следуют неравенства

$$a_{i_0 i_1} x_{i_1} \leq x_{i_0}, \qquad a_{i_1 i_2} x_{i_2} \leq x_{i_1}, \qquad \ldots, \qquad a_{i_{m-1} i_m} x_{i_m} \leq x_{i_{m-1}}.$$

Перемножая левые и правые части этих неравенств, а затем сокращая на величину $x_{i_1} \cdots x_{i_m} \neq \mathbb{0}$, приходим к неравенству $a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{m-1} i_m} \leq \mathbb{1}$.

Учитывая произвольный выбор $i_0, \ldots, i_{m-1}$, имеем $\operatorname{tr} A^m \leq \mathbb{1}$ для всех $m = 1, \ldots, n$. Следовательно, $\operatorname{Tr} A = \operatorname{tr} A \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} A^n \leq \mathbb{1}$.

Кроме того, из уравнения (3.1) следует, что для любого индекса i найдется такой индекс j, для которого $a_{ij} x_j = x_i$. Возьмем произвольный индекс i_0 и будем последовательно определять индексы $i_1, i_2, \ldots$ так, чтобы выполнялись равенства

$$a_{i_0 i_1} x_{i_1} = x_{i_0}, \qquad a_{i_1 i_2} x_{i_2} = x_{i_1}, \qquad \ldots,$$

вплоть до первого повторения индексов.

Из полученной последовательности индексов выберем подпоследовательность $i_l, i_{l+1}, \ldots, i_{l+m}$, где $i_l = i_{l+m}$, $l \geq 0$, $1 \leq m \leq n$.

Перемножая равенства, соответствующие подпоследовательности, а затем, сокращая на величину $x_{i_l} \cdots x_{i_{l+m}} \neq \mathbb{0}$, получим равенство $a_{i_l i_{l+1}} \cdots a_{i_{l+m-1} i_{l+m}} = \mathbb{1}$. Из этого равенства, в частности, следует, что $\operatorname{Tr} A \geq \operatorname{tr} A^m \geq \mathbb{1}$. Так как одновременно выполняется неравенство $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$, заключаем, что $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$. □

Найдем общее решение однородного уравнения. Имеет место следующий результат.

Лемма 3.3. Пусть $\boldsymbol{x}$ — общее решение однородного уравнения (3.1) с неразложимой матрицей A. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^* \boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$;
2) если $\operatorname{Tr} A \neq \mathbb{1}$, то уравнение имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$.

Доказательство. Ясно, что $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$ является решением (3.1). При этом, если $\operatorname{Tr} A \neq \mathbb{1}$, то из предложения 3.4 следует, что других решений нет.

Пусть $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$. Заметим, что тогда $A^+ A^+ = A^+$, а матрицы A^+ и $A^\times$ имеют общие столбцы. Предположим для простоты, что совпадают первые m столбцов этих матриц.

Запишем вектор $\boldsymbol{x}$ в виде $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1^T, \boldsymbol{x}_2^T)^T$, где $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — векторы размерности m и $n-m$ соответственно.

Представим матрицы A^+, $A^\times$ и A^* в блочной форме

$$A^+ = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}, \quad A^\times = \begin{pmatrix} B & C \\ D & G \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} B & \mathbb{0} \\ D & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

где матрица B имеет размер $m \times m$, а матрицы F и G имеют размер $(n-m) \times (n-m)$.

Установим некоторые соотношения для блоков. Сначала заметим, что $F \geq G$, причем $\operatorname{Tr} F = \operatorname{tr} F = \mathbb{1}$, $\operatorname{tr} G < \mathbb{1}$ и $\operatorname{Tr} G \leq \mathbb{1}$.

Нетрудно проверить, что $\operatorname{Tr} G < \mathbb{1}$. Действительно, предположим что, $\operatorname{Tr} G = \mathbb{1}$. Сначала заметим, что матрица G является диагональным блоком матрицы $A^\times$, а каждому элементу G соответствует некоторое произведение элементов матрицы A.

В силу предположения найдется циклическое произведение элементов матрицы G, равное $\mathbb{1}$. Этому произведению будет соответствовать некоторое циклическое произведение элементов матрицы A, которое также равно $\mathbb{1}$. Но тогда на диагонали матрицы G имеется единичный элемент, что противоречит условию $\operatorname{tr} G < \mathbb{1}$.

Наконец, легко видеть, что из равенства

$$A^+ A^+ = \begin{pmatrix} B^2 \oplus CD & BC \oplus CF \\ DB \oplus FD & DC \oplus F^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} = A^+,$$

следуют, в частности, неравенства $D \geq FD \geq GD$ и $B \geq CD$.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — нетривиальное решение уравнения (3.1). Заметим, что в силу предложения 3.3 вектор $\boldsymbol{x}$ не имеет нулевых координат.

Ясно, что $\boldsymbol{x}$ является также решением однородного уравнения $A^\times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Запишем последнее уравнение в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= B\boldsymbol{x}_1 \oplus C\boldsymbol{x}_2, \\ \boldsymbol{x}_2 &= D\boldsymbol{x}_1 \oplus G\boldsymbol{x}_2. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства для блоков, из второго уравнения путем итераций для любого целого $k \geq 1$ получим $\boldsymbol{x}_2 = D\boldsymbol{x}_1 \oplus G^k \boldsymbol{x}_2$.

Поскольку $\operatorname{Tr} G < \mathbb{1}$, применяя лемму 3.2, имеем неравенство

$$G^k \leq (\operatorname{Tr} G)^{(k+1)/(n-m)-1} G^+.$$

Теперь, каким бы ни был вектор $\boldsymbol{x} > \mathbb{0}$, число k всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$D\boldsymbol{x}_1 \geq (\operatorname{Tr} G)^{(k+1)/(n-m)-1} G^+ \boldsymbol{x}_2 \geq G^k \boldsymbol{x}_2,$$

откуда следует, что второе уравнение имеет вид $\boldsymbol{x}_2 = D\boldsymbol{x}_1$.

Подставим $\boldsymbol{x}_2 = D\boldsymbol{x}_1$ в первое уравнение. Учитывая неравенство $B \geq CD$, получим $\boldsymbol{x}_1 = B\boldsymbol{x}_1$. Таким образом, будем иметь

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbb{0} \\ D & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = A^* \boldsymbol{x},$$

а это означает, что любое нетривиальное решение уравнения (3.1) имеет вид $\boldsymbol{x} = A^* \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — некоторый вектор. Осталось проверить, что $\boldsymbol{x} = A^* \boldsymbol{v}$ является решением (3.1) при любом векторе $\boldsymbol{v}$. Последнее было установлено в предложении 3.2. $\square$

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение (3.1) с неразложимой матрицей второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

при условии $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$. Предположим, что $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} > \mathbb{0}$.

Учитывая, что $a_{11}, a_{22} \le \mathbb{1}$ и $a_{12}a_{21} \le \mathbb{1}$, найдем матрицы

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad A^{\times} = \begin{pmatrix} a_{11} \oplus a_{12}a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12}a_{21} \oplus a_{22} \end{pmatrix}.$$

Будем искать общее решение уравнения в виде $\boldsymbol{x} = A^{*}\boldsymbol{v}$. При условии $a_{11} = \mathbb{1}$, $a_{22} < \mathbb{1}$ и $a_{12}a_{21} < \mathbb{1}$, имеем

$$A^{\times} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12}a_{21} \oplus a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что второй столбец матрицы A^{*} можно отбросить и записать окончательное решение в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ a_{21} \end{pmatrix} v, \quad v \in \mathbb{X}.$$

Аналогично, если $a_{11} < \mathbb{1}$, $a_{22} = \mathbb{1}$ и $a_{12}a_{21} < \mathbb{1}$, то

$$A^{\times} = \begin{pmatrix} a_{11} \oplus a_{12}a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Если выполняется хотя бы одно из условий $a_{11} = a_{22} = \mathbb{1}$ и $a_{12}a_{21} = \mathbb{1}$, то

$$A^{\times} = A^{*} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Тогда при $a_{12}, a_{21} \ne \mathbb{1}$ имеем решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{2},$$

а при $a_{12} = a_{21} = \mathbb{1}$, — решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} v, \quad v \in \mathbb{X}.$$

На рис. 3.1 для полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$ представлены решения $\boldsymbol{x}$ однородных уравнений второго порядка. Для примера слева множество решений $\operatorname{range}(A^*)$ является полумодулем размерности 1 и изображено при помощи жирной прямой, проходящая через конец вектора $\boldsymbol{a}_2$. Справа представлен случай, когда $\operatorname{range}(A^*)$ совпадает с линейной оболочкой $\operatorname{range}(A)$ столбцов матрицы A.

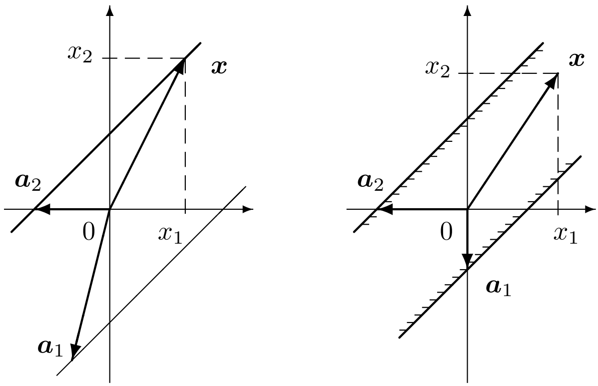


Рис. 3.1. Решение однородного уравнения в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$

3.4.2. Решение неоднородного уравнения. Перейдем к исследованию неоднородного уравнения.

Лемма 3.4. Неоднородное уравнение (3.2) с неразложимой матрицей A имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

1) $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$;

2) $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$.

При этом $\boldsymbol{x} = A^+\boldsymbol{b}$ является минимальным частным решением.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$. Тогда уравнение (3.2) путем итераций с последующим применением леммы 3.2 приводится к виду $A^n\boldsymbol{x} \oplus A^+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$, откуда следует неравенство $\boldsymbol{x} \geq A^+\boldsymbol{b}$.

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что вектор $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b}$ является решением (3.2), а с учетом предыдущего неравенства — его минимальным решением. Действительно,

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = A(A^{+}\boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{b} = (A^{\times} \oplus I)\boldsymbol{b} = A^{+}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}.$$

Пусть $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$. Покажем, что при этом условии уравнение не имеет нетривиальных решений. Действительно, для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$ в силу леммы 3.1 будем иметь

$$\boldsymbol{x}^{-}(A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}) \geq \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{x} \geq (\operatorname{Tr} A)^{1/n} > \mathbb{1},$$

откуда следует, что $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{x}$.

Наконец, очевидно, что решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$ существует тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$. $\square$

При доказательстве следующего утверждения применим подход, который был предложен в [55].

Лемма 3.5. Общее решение уравнения (3.2) с неразложимой матрицей A имеет вид $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u}$ — минимальное частное решение уравнения (3.2), $\boldsymbol{v}$ — общее решение уравнения (3.1).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u}$ — любое решение уравнения (3.2), а $\boldsymbol{v}$ — любое решение уравнения (3.1). Тогда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$ также является решением (3.2) так как

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = A(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{b} = (A\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus (A\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольное решение уравнения (3.2). Покажем, что его можно представить в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u}$ — минимальное решение (3.2), а $\boldsymbol{v}$ — некоторое решение (3.1). Сначала заметим, что при условии $\operatorname{Tr} A \neq \mathbb{1}$ уравнение (3.1) имеет только тривиальное решение, и тогда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v} = \mathbb{0}$.

Предположим, что $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$. Пусть $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$ — минимальное решение (3.2). В силу неравенства $\boldsymbol{x} \geq A^{+}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}$ всегда найдется вектор $\boldsymbol{v}'$, для которого $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}'$.

Так как $A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}') = AA^{+}\boldsymbol{b} \oplus A\boldsymbol{v}'$, с учетом (3.2) будем иметь $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = A^{+}\boldsymbol{b} \oplus A\boldsymbol{v}'$. Следовательно, для $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}'$ равенство $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$ остается в силе. Ясно, что это равенство сохраняется для каждого вектора $\boldsymbol{v} = A^m \boldsymbol{v}'$ при всех целых $m \geq 0$, а потому и для векторов $A^+ \boldsymbol{v}'$ и $A^\times \boldsymbol{v}'$.

Возьмем вектор $\boldsymbol{v}'$ с координатами $v'_i = x_i$, если $u_i < x_i$, и $v'_i = \mathbb{0}$, если $u_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Легко видеть, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}'$ и, кроме того, $\boldsymbol{v}' \leq \boldsymbol{v}$ для любого вектора $\boldsymbol{v}$ такого, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$. Из этого следует, что выполняется неравенство $\boldsymbol{v}' \leq A\boldsymbol{v}'$, а тогда — и неравенство $A^+ \boldsymbol{v}' \leq A^\times \boldsymbol{v}'$. Так как всегда выполняется неравенство $A^+ \boldsymbol{v}' \geq A^\times \boldsymbol{v}'$, заключаем, что $A^+ \boldsymbol{v}' = A^\times \boldsymbol{v}'$.

Осталось положить $\boldsymbol{v} = A^+ \boldsymbol{v}'$. Тогда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$ является решением (3.2), причем $A\boldsymbol{v} = A^\times \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$. Последнее означает, что вектор $\boldsymbol{v}$ является решением (3.1). $\square$

Опираясь на леммы 3.3 и 3.5, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть решение неоднородного уравнения (3.2) с неразложимой матрицей A существует, $\boldsymbol{x}$ — общее решение (3.2). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A < \mathbb{1}$, то имеется единственное решение $\boldsymbol{x} = A^+ \boldsymbol{b}$;
2) если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^+ \boldsymbol{b} \oplus A^* \boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$;
3) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то уравнение имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$.

Легко видеть, что теорема верна и при $A = \mathbb{0}$. В этом случае уравнение принимает вид $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. В то же время из теоремы в силу условия $\operatorname{Tr} A = \mathbb{0} < \mathbb{1}$ следует, что $\boldsymbol{x} = A^+ \boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение (3.2) при условии

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

и предположим, что $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} > \mathbb{0}$ и $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$.

Так же, как при решении однородного уравнения, найдем матрицу A^+, а затем вектор $A^+ \boldsymbol{b}$:

$$A^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad A^+ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \oplus a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 \oplus b_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$. Используя полученные выше результаты анализа однородного уравнения с матрицей второго порядка, нетрудно записать общее решение уравнения (3.2) в виде $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b} \oplus A^{*}\boldsymbol{v}$.

На рис. 3.2 представлены примеры решений неоднородных уравнений в полумодуле $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ при $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1} = 0$.

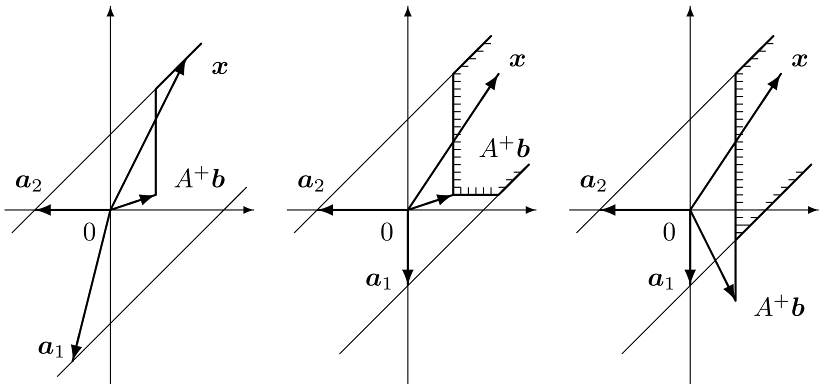


Рис. 3.2. Решение неоднородного уравнения в $\mathbb{R}^2_{\max,+}$ при $\operatorname{Tr} A = 0$

3.5. Разложимые матрицы

Предположим, что матрица A является разложимой и приведена к нормальной форме (1.7)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} \\ A_{21} & A_{22} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что тогда $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A_{11} \oplus \dots \oplus \operatorname{Tr} A_{ss}$.

Обозначим через I_0 множество индексов i, для которых выполняется $\operatorname{Tr} A_{ii} = \mathbb{1}$, а через I_1 — множество индексов, для которых $\operatorname{Tr} A_{ii} > \mathbb{1}$.

Пусть сначала $I_1 = \emptyset$. Ясно, что матрицу A можно представить в виде $A = T \oplus D$, где T — блочная строго треугольная, а D —

блочно-диагональная матрица,

$$T = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \dots & \dots & \mathbb{0} \\ A_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \dots & A_{s,s-1} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} A_{11} & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

Определим следующие вспомогательные матрицы

$$D^+ = \operatorname{diag}(A_{11}^+, \dots, A_{ss}^+), \quad C = D^+T, \quad D^* = \operatorname{diag}(A_{11}^*, \dots, A_{ss}^*).$$

Легко видеть, что $C^s = \mathbb{0}$, а тогда $C^+ = I \oplus C \oplus \dots \oplus C^{s-1}$.

Заметим, что матрица C^+ имеет нижнюю блочно-треугольную форму с блоками C_{ii}^+ и C_{ij}^+, размер которых совпадает с размером соответствующих блоков A_{ii} и A_{ij} матрицы A.

Если $I_1 \neq \emptyset$, то рассмотрим матрицу $\bar{A}$, полученную из A путем замены всех блоков ее вертикальных рядов $i \in I_1$ на нулевые матрицы. Обозначим диагональные блоки матрицы $\bar{A}$ через $\bar{A}_{ii}$, а блоки, лежащие ниже диагонали, через $\bar{A}_{ij}$.

Представим $\bar{A}$ в виде $\bar{A} = \bar{T} \oplus \bar{D}$, где $\bar{T}$ — блочная строго треугольная, а $\bar{D}$ — блочно-диагональная матрицы. Положим

$$\bar{D}^+ = \operatorname{diag}(\bar{A}_{11}^+, \dots, \bar{A}_{ss}^+), \quad \bar{C} = \bar{D}^+\bar{T}, \quad \bar{D}^* = \operatorname{diag}(\bar{D}_{11}^*, \dots, \bar{D}_{ss}^*),$$

где $\bar{D}_{jj}^* = \mathbb{0}$, если выполнены условия $j \in I_0$ и $\bar{C}_{ij}^+ \neq \mathbb{0}$ хотя бы для одного $i \in I_1$, и $\bar{D}_{jj}^* = \bar{A}_{jj}^* = A_{jj}^*$ — в противном случае.

Рассмотрим уравнения (3.1) и (3.2). Для каждого $i = 1, \dots, s$ обозначим через $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{b}_i$ векторы порядка n_i, образованные теми координатами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{b}$, которые соответствуют горизонтальному ряду i матрицы A.

3.5.1. Решение однородного уравнения. Сначала исследуем однородное уравнение (3.1).

Лемма 3.6. Пусть $\boldsymbol{x}$ — общее решение однородного уравнения (3.1) с матрицей A, представленной в форме (1.7).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A < \mathbb{1}$, то уравнение имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$;

2) если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = C^{+} D^{*} \boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{n}$;

3) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = \bar{C}^{+} \bar{D}^{*} \boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{n}$, причем имеется только тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$ когда $I_0 = \emptyset$.

Доказательство. Уравнение (3.1) можно представить как систему уравнений

$$A_{i1} \boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus A_{i,i-1} \boldsymbol{x}_{i-1} \oplus A_{ii} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i, \tag{3.3}$$

которые соответствуют горизонтальным рядам $i = 1, \ldots, s$.

Если $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A_{11} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Tr} A_{ss} \leq \mathbb{1}$, то по теореме 3.1 решение $\boldsymbol{x}_i$ каждого уравнения существует, а все векторы $\boldsymbol{x}_i$ могут быть последовательно определены из уравнений

$$\boldsymbol{x}_1 = A_{11}^{*} \boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{x}_i = A_{ii}^{+} (A_{i1} \boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus A_{i,i-1} \boldsymbol{x}_{i-1}) \oplus A_{ii}^{*} \boldsymbol{v}_i, \quad i > 1,$$

где $\boldsymbol{v}_i$ — любой вектор размерности n_i, $i = 1, \ldots, s$.

Положив $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1^T, \ldots, \boldsymbol{v}_s^T)^T$, эти уравнения можно записать в виде одного уравнения

$$\boldsymbol{x} = C \boldsymbol{x} \oplus D^{*} \boldsymbol{v},$$

решение которого с помощью итераций дает

$$\boldsymbol{x} = C^{s} \boldsymbol{x} \oplus C^{+} D^{*} \boldsymbol{v} = C^{+} D^{*} \boldsymbol{v}.$$

В частности, при $\operatorname{Tr} A < \mathbb{1}$ имеем $D^{*} = \mathbb{0}$, а следовательно, $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$.

Предположим, что $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$. Рассмотрим уравнение (3.3) для любого ряда $i \in I_1$. По теореме 3.1, если решение $\boldsymbol{x}_i$ такого уравнения существует, то $\boldsymbol{x}_i = \mathbb{0}$.

Пусть $\boldsymbol{x}_i = \mathbb{0}$ для всех $i \in I_1$. При таком условии решение уравнения (3.1) не изменится, если положить все элементы вертикальных рядов $i \in I_1$ матрицы A равными $\mathbb{0}$. Тогда уравнения (3.3) для каждого $i = 1, \ldots, s$ примут вид

$$\bar{A}_{i1} \boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{A}_{i,i-1} \boldsymbol{x}_{i-1} \oplus \bar{A}_{ii} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i.$$

Учитывая, что $\operatorname{Tr} \bar{A} \leq \mathbb{1}$ и $\bar{A}_{ii}^{*} = A_{ii}^{*}$ для всех $i = 1, \ldots, s$, общим решением этой системы уравнений будет $\boldsymbol{x} = \bar{C}^{+} D^{*} \boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{n}$.

Для того, чтобы полученное решение при всех $i \in I_1$ удовлетворяло условию $\boldsymbol{x}_i = \mathbb{0}$, потребуем для каждого такого i выполнения при любых $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$ равенства

$$\bar{C}_{i1}^{+} A_{11}^{*} \boldsymbol{v}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{C}_{is}^{+} A_{ss}^{*} \boldsymbol{v}_s = \mathbb{0}.$$

Так как $A_{jj}^{*} = \mathbb{0}$ при каждом $j \notin I_0$, то для выполнения указанных равенств необходимо и достаточно, чтобы $A_{jj}^{*} \boldsymbol{v}_j = \mathbb{0}$ для индексов $j \in I_0$ таких, что $\bar{C}_{ij}^{+} \neq \mathbb{0}$ хотя бы для одного $i \in I_1$. Последнее будет иметь место при формальной замене всех таких матриц A_{jj}^{*} на нулевые. Так как это эквивалентно переходу от D^{*} к $\bar{D}^{*}$, то получаем общее решение уравнения (3.1) в виде $\boldsymbol{x} = \bar{C}^{+} \bar{D}^{*} \boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$. Осталось заметить, что $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$, если $I_0 = \emptyset$. $\square$

При решении некоторых задач (например, при нахождении собственных чисел матрицы) особое значение приобретает выяснение условий существования нетривиальных решений однородного уравнения с разложимой матрицей. В частности, опираясь на лемму 3.6, легко проверить справедливость следующих утверждений.

Следствие 3.2. Уравнение (3.1) имеет нетривиальное решение только тогда, когда $\operatorname{Tr} A_{ii} = \mathbb{1}$ хотя бы для одного $i = 1, \ldots, s$.

Следствие 3.3. Уравнение (3.1) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\bar{D}^{*} \neq \mathbb{0}$.

Следствие 3.4. Если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то уравнение (3.1) имеет нетривиальное решение.

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение (3.1) с матрицей второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbb{0} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$. Найдем матрицы

$$D^{+} = I, \qquad D^{*} = \begin{pmatrix} a_{11}^{*} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & a_{22}^{*} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii}^{*} = \mathbb{0}$, если $a_{ii} < \mathbb{1}$, и $a_{ii}^{*} = a_{ii}$ в противном случае, $i = 1, 2$.

Учитывая, что

$$C = T = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad C^{+} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

найдем матрицу

$$C^+D^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \mathbb{0} \\ a_{21}a_{11}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Общее решение принимает вид

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \mathbb{0} \\ a_{21}a_{11}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^2.$$

В частности, при $a_{11} = \mathbb{1}$ и $a_{22} < \mathbb{1}$ получаем решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ a_{21} \end{pmatrix} v, \quad v \in \mathbb{X}.$$

Если $a_{11} < \mathbb{1}$ и $a_{22} = \mathbb{1}$, то имеем решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} v, \quad v \in \mathbb{X}.$$

Наконец, если $a_{11} = a_{22} = \mathbb{1}$, то

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^2.$$

Предположим, что $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$. Пусть $a_{11} = \mathbb{1}$, $a_{22} > \mathbb{1}$. Перейдем от матрицы A к матрице

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы

$$\bar{D}^+ = I, \qquad \bar{D}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

а затем матрицы

$$\bar{C} = \bar{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad \bar{C}^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Определив матрицу

$$\bar{C}^+\bar{D}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

найдем общее решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix} v, \quad v \in \mathbb{X}.$$

Если $a_{11} > \mathbb{1}$, $a_{22} = \mathbb{1}$, то

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{D}^{+} = I, \quad \bar{D}^{*} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$\bar{C} = \mathbb{0}, \quad \bar{C}^{+} = I, \quad \bar{C}^{+}\bar{D}^{*} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} v, \quad v \in \mathbb{X}.$$

3.5.2. Решение неоднородного уравнения. В случае неоднородного уравнения справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.7. Неоднородное уравнение (3.2) с матрицей A в форме (1.7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

1) $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$;
2) $\boldsymbol{b}_i = \mathbb{0}$ для всех $i \in I_1$ и $\boldsymbol{b}_j = \mathbb{0}$ для каждого $j \notin I_1$ такого, что $\bar{A}^{+}_{ij} \neq \mathbb{0}$ хотя бы для одного $i \in I_1$.

При этом $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{b}$ является минимальным частным решением.

Доказательство. Если $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$, то также как при доказательстве леммы 3.4 можно показать, что решение уравнения (3.2) существует, а минимальным решением является $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{b}$.

Предположим, что $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$. Представим уравнение (3.2) в виде системы уравнений, соответствующих рядам $i = 1, \ldots, s$,

$$A_{i1}\boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus A_{i,i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} \oplus A_{ii}\boldsymbol{x}_i \oplus \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{x}_i. \tag{3.4}$$

Ясно, что для каждого $i \in I_1$ единственно возможным решением уравнения (3.4) является $\boldsymbol{x}_i = \mathbb{0}$, для существования которого необходимо, чтобы $\boldsymbol{b}_i = \mathbb{0}$. Тогда, как и при доказательстве леммы 3.6, можно заменить матрицу A на $\bar{A}$.

Так как $\operatorname{Tr}\bar{A} \leq \mathbb{1}$, то минимальным решением уравнения (3.2) с матрицей $\bar{A}$ является $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{b}$. При этом для каждого $i = 1,\ldots,s$ будем иметь вектор

$$\boldsymbol{x}_i = \bar{A}_{i1}^{+}\boldsymbol{b}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{A}_{i,i-1}^{+}\boldsymbol{b}_{i-1} \oplus \bar{A}_{ii}^{+}\boldsymbol{b}_i,$$

который должен удовлетворять условию $\boldsymbol{x}_i = \mathbb{0}$, если $i \in I_1$. Это равносильно тому, что $\boldsymbol{b}_j = \mathbb{0}$ для каждого $j \notin I_1$ такого, что $\bar{A}_{ij}^{+} \neq \mathbb{0}$ хотя бы для одного $i \in I_1$. □

Точно так же, как при доказательстве леммы 3.5, можно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.8. Общее решение неоднородного уравнения (3.2) с матрицей A, представленной в форме (1.7), имеет вид $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u}$ — минимальное частное решение неоднородного уравнения (3.2), $\boldsymbol{v}$ — общее решение однородного уравнения (3.1).

Наконец, применяя леммы 3.6 и 3.8, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 3.2. Пусть решение неоднородного уравнения (3.2) с матрицей A, представленной в форме (1.7), существует, $\boldsymbol{x}$ — общее решение (3.2). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A < \mathbb{1}$, то имеется единственное решение $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b}$;
2) если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b} \oplus C^{+}D^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$;
3) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{b} \oplus \bar{C}^{+}\bar{D}^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$, причем имеется единственное решение $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{b}$ когда $I_0 = \emptyset$.

3.6. Однородные и неоднородные неравенства

Однородным неравенством относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$ называется неравенство вида

$$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \tag{3.5}$$

а неоднородным — неравенство вида

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}. \tag{3.6}$$

Покажем, как полученные выше результаты могут быть применены для решения неравенств (3.5) и (3.6). Предположим сначала, что матрица A является неразложимой.

Лемма 3.9. Пусть $\boldsymbol{x}$ — общее решение однородного неравенства (3.5) с неразложимой матрицей A.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{u}$ для всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}$;
2) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то неравенство имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$.

Доказательство. Ясно, что множество решений однородного неравенства (3.5) совпадает с множеством решений $\boldsymbol{x}$ уравнения $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$ относительно двух неизвестных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ при всех возможных значениях $\boldsymbol{u}$. Применим к этому уравнению лемму 3.4 и теорему 3.1. Учитывая, что ненулевые столбцы матрицы A^{*} совпадают с соответствующими столбцами A^{+}, решения для случаев $\operatorname{Tr} A < \mathbb{1}$ и $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$ можно объединить. □

Справедливость остальных утверждений проверяется аналогичным путем.

Лемма 3.10. Неоднородное неравенство (3.6) с неразложимой матрицей A имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

1) $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$;
2) $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$.

При этом $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b}$ является минимальным решением (3.6).

Теорема 3.3. Пусть решение неоднородного неравенства (3.6) с неразложимой матрицей A существует, $\boldsymbol{x}$ — общее решение (3.6).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{+}(\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{u})$ для всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}$;
2) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то неравенство имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$.

Пусть теперь A — разложимая матрица. Используя лемму 3.7 и теорему 3.2 так же, как в случае с неразложимой матрицей, нетрудно получить следующие результаты.

Лемма 3.11. Пусть $\boldsymbol{x}$ — общее решение однородного неравенства (3.5) с матрицей A, представленной в форме (1.7).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A < \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{u}$ для всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n$;
2) если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{u} \oplus C^{+}D^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$;
3) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{u} \oplus \bar{C}^{+}\bar{D}^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$, причем $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{u}$, когда $I_0 = \emptyset$.

Лемма 3.12. Неоднородное неравенство (3.6) с матрицей A в форме (1.7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

1) $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1}$;
2) $\boldsymbol{b}_i = \mathbb{0}$ для всех $i \in I_1$ и $\boldsymbol{b}_j = \mathbb{0}$ для каждого $j \notin I_1$ такого, что $\bar{A}^{+}_{ij} \neq \mathbb{0}$ хотя бы для одного $i \in I_1$.

При этом $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}\boldsymbol{b}$ является минимальным решением (3.6).

Теорема 3.4. Пусть решение неоднородного неравенства (3.6) с матрицей A, представленной в форме (1.7), существует, $\boldsymbol{x}$ — общее решение (3.6). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\operatorname{Tr} A < \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{+}(\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{u})$ для всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n$;
2) если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{+}(\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{u}) \oplus C^{+}D^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$;
3) если $\operatorname{Tr} A > \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}(\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{u}) \oplus \bar{C}^{+}\bar{D}^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$, причем $\boldsymbol{x} = \bar{A}^{+}(\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{u})$, когда $I_0 = \emptyset$.

3.7. Решение систем уравнений и неравенств

Рассмотрим примеры решения систем, которые, наряду с однородными или неоднородными уравнениями и неравенствами 2-го рода, включают уравнения или неравенства 1-го рода.

Пусть имеется система уравнений относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$, которая имеет вид

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{x}, \\
C\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{d},
\end{aligned}
$$

где A и C — заданные регулярные матрицы, а $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы подходящего размера.

Будем предполагать, что каждое уравнение системы по отдельности разрешимо (в противном случае система решений не имеет).

Пусть для простоты матрица A является неразложимой (случай разложимой матрицы рассматривается аналогично).

Подстановка общего решения первого уравнения $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b} \oplus A^{*}\boldsymbol{v}$ во второе сводит решение системы к решению относительно вектора $\boldsymbol{v}$ уравнения

$$CA^{*}\boldsymbol{v} \oplus A^{+}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$$

или, если $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$, уравнения

$$CA^{*}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{d},$$

которые являются уравнениями 1-го рода.

Допустим, что полученное уравнение имеет решение. Тогда, например, его максимальное решение имеет вид $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{d}^{-}CA^{*})^{-}$. Ясно, что ему будет соответствовать решение системы

$$\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b} \oplus A^{*}(\boldsymbol{d}^{-}CA^{*})^{-}.$$

В качестве другого примера рассмотрим систему

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}, \\ C\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{d}, \end{aligned}$$

и предположим, что она имеет решение.

Подставляя общее решение уравнения $\boldsymbol{x} = A^{*}\boldsymbol{v}$ в неравенство, приходим к неравенству $CA^{*}\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{d}$ относительно вектора $\boldsymbol{v}$, общим решением которого является вектор $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{d}^{-}CA^{*} \oplus \boldsymbol{v}_1^{T})^{-}$ для всех $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{X}^{n}$. Окончательно имеем решение системы в виде

$$\boldsymbol{x} = A^{*}(\boldsymbol{d}^{-}CA^{*} \oplus \boldsymbol{v}^{T})^{-}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{n}.$$

3.8. Размерность пространства решений

Заметим, что в предыдущих разделах общие решения уравнений и неравенств в полумодуле $\mathbb{X}^{n}$ для простоты представляются с помощью эндоморфизмов этого же полумодуля.

Например, общее решение однородного уравнения с неразложимой матрицей A имеет вид $\boldsymbol{x} = A^*\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$, т.е. образует полумодуль векторов вида $\boldsymbol{x} = v_1\boldsymbol{a}_1^* \oplus \cdots \oplus v_n\boldsymbol{a}_n^*$, где $\boldsymbol{a}_i^*$ — столбцы матрицы A^*, $i = 1,\ldots,n$. Ясно, однако, что среди векторов $\boldsymbol{a}_1^*,\ldots,\boldsymbol{a}_n^*$ могут быть линейно зависимые, а тогда указанный полумодуль будет иметь размерность, меньше чем n.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{a}}_1^*,\ldots,\tilde{\boldsymbol{a}}_m^*$ — линейно независимая подсистема векторов, эквивалентная системе $\boldsymbol{a}_1^*,\ldots,\boldsymbol{a}_n^*$, $m \leq n$. Такую подсистему можно построить, применяя процедуру построения эквивалентной линейно независимой системы, описанную в предыдущей главе.

Обозначим через $\tilde{A}^*$ матрицу со столбцами $\tilde{\boldsymbol{a}}_1^*,\ldots,\tilde{\boldsymbol{a}}_m^*$. Тогда общее решение однородного уравнения можно представить в виде $\boldsymbol{x} = \tilde{A}^*\tilde{\boldsymbol{v}}$ для всех $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{X}^m$.

Аналогичным образом можно уточнить форму представления общего решения для всех других рассмотренных выше уравнений и неравенств.

3.9. Приложения и примеры

3.9.1. Сетевое планирование. Рассмотрим некоторый проект, который состоит в выполнении n работ. Пусть имеются ограничения на величину интервалов времени между началом выполнения различных работ. Требуется определить сроки начала работ проекта так, чтобы указанные ограничения были удовлетворены.

Для каждой работы $i = 1,\ldots,n$ введем обозначения:

x_i — время начала работы;

a_{ij} — интервал, который устанавливает ограничение на время начала работ i и j в форме (обыкновенного) неравенства

$$x_i \geq x_j + a_{ij}.$$

Выполнение этих неравенств для каждой работы i равносильно выполнению в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$ неравенства

$$x_i \geq a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n.$$

Определим соответствующие вектор $\boldsymbol{x}$ и матрицу A. Ограничения на время начала работ могут быть представлены в виде нера-

венства для полумодуля $\mathbb{R}^n_{\max,+}$
$$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}.$$

Наряду с неравенством можно рассматривать уравнение
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$
решение которого, если оно существует, обеспечивает выполнение ограничений с минимальным отклонением от границ.

Предположим для простоты, что матрица A является неразложимой. По лемме 3.9, если $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1} = 0$, то нетривиальное решение неравенства существует и записывается в виде $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{u} \oplus A^{*}\boldsymbol{v}$. По лемме 3.3 нетривиальное решение уравнения существует, если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1} = 0$, и равно $\boldsymbol{x} = A^{*}\boldsymbol{v}$.

Рассмотрим проект, модель которого представлена на рис. 3.3.

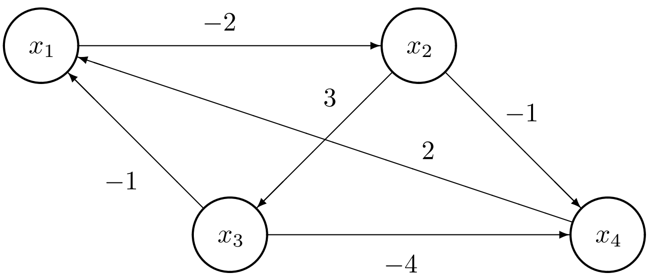


Рис. 3.3. Сетевая модель проекта

Матрица проекта принимает вид
$$A = \left(\begin{array}{rrrr} 0 & -2 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 0 & 3 & -1 \\ -1 & \mathbb{0} & 0 & -4 \\ 2 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 0 \end{array} \right)$$

Определим сроки начала выполнения работ, которые удовлетворяют требуемым ограничениям.

Сначала заметим, что матрица A является неразложимой и $\operatorname{Tr} A = 0$. Следовательно, однородное уравнение имеет решение.

Найдем матрицы

$$A^{+} = A^{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \\ -3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы A^{+} и $A^{\times}$ совпадают, а потому следовало положить $A^{*} = A^{+}$. Однако, учитывая, что три первых столбца A^{+} коллинеарны, при составлении матрицы A^{*} достаточно взять только один из них.

Ограничениям задачи будет удовлетворять любой вектор

$$\boldsymbol{x} = A^{*}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{2}.$$

Предположим, что для каждой работы задан самый ранний возможный срок начала ее выполнения. Пусть $\boldsymbol{b}$ — вектор, который определяет набор таких сроков для всех работ. Тогда вектор $\boldsymbol{x}$ времени начала работ должен удовлетворять неравенству

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}$$

или уравнению

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}.$$

В случае неразложимой матрицы в силу теорем 3.3 и 3.1 неравенство и уравнение имеют нетривиальные решения, если выполняется условие $\operatorname{Tr} A \leq \mathbb{1} = 0$. Их решения записываются соответственно в виде $\boldsymbol{x} = A^{+}(\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{u})$ и $\boldsymbol{x} = A^{+}\boldsymbol{b} \oplus A^{*}\boldsymbol{v}$.

Пусть в дополнение к условиям предыдущей задачи задан вектор $\boldsymbol{b} = (1, 1, 2, 1)^{T}$. Для определения вектора $\boldsymbol{x}$ имеем

$$A^{+}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \\ -3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{2}.$$

Рассмотрим следующую задачу определения сроков начала работ. Пусть имеется модель проекта с заданными временем получения промежуточных результатов и директивными сроками завершения работ, которая описывается неравенством

$$A_{1}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}.$$

Предположим, что для этой модели также заданы ограничения на время начала работ в виде

$$A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

Пусть для последнего уравнения существует решение $\boldsymbol{x} = A_2^*\boldsymbol{v}$. Подставляя его в первое неравенство, получим

$$A_1 A_2^*\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{b}.$$

Максимальное решение полученного неравенства записывается в виде $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}^- A_1 A_2^*)^-$. Тогда вектор сроков начала работ определяется выражением

$$\boldsymbol{x} = A_2^*(\boldsymbol{b}^- A_1 A_2^*)^-.$$

В заключение определим вектор сроков начала работ при условиях $\boldsymbol{b} = (13, 11, 15, 15)^T$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 10 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 5 & 4 & 8 \\ 6 & 12 & 11 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 12 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 0 & 3 & -1 \\ -1 & \mathbb{0} & 0 & -4 \\ 2 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Опираясь на результаты предыдущих примеров, последовательно найдем

$$A_1 A_2^* = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 8 \\ 12 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{b}^- A_1 A_2^*)^- = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим

$$\boldsymbol{x} = A_2^*(\boldsymbol{b}^- A_1 A_2^*)^- = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

3.9.2. Планирование производства. Рассмотрим производственный процесс, который состоит из n технологических операций. Пусть имеются ограничения на относительную продолжительность каждой операции по отношению к другим операциям. Выполнение операции прекращается, как только истекает соответствующая часть времени выполнения какой-либо другой операции. Требуется определить длительности всех операций, при которых указанные ограничения оказываются выполнены.

Для каждой операции $i = 1, \ldots, n$ введем обозначения:

x_i — длительность операции;

a_{ij} — величина, которая определяет ограничение на длительности операций i и j в форме (обыкновенного) неравенства

$$x_i \le a_{ij} x_j.$$

Длительности каждой операции i соответствует равенство в полукольце $\mathbb{R}_{\min,\times}$

$$x_i = a_{i1} x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in} x_n.$$

В векторных обозначениях имеем уравнение относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

Найдем вектор $\boldsymbol{x}$ при условии

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & 2{,}0 & 1{,}0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 0{,}4 \\ \mathbb{0} & 3{,}0 & \mathbb{0} & 1{,}0 \\ 2{,}0 & \mathbb{0} & 1{,}0 & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матрица A является неразложимой. Кроме того, $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1} = 1$. Теперь найдем

$$A^{+} = A^{\times} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 2{,}0 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 1{,}0 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 3{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 1{,}5 & 3{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix}, \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 1{,}0 \\ 1{,}5 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Решением задачи будет любой вектор

$$\boldsymbol{x} = A^{*}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^2.$$

Предположим, что существует m производственных процессов. Любой процесс состоит из параллельного выполнения n типов технологических операций, длительность которых удовлетворяет рассмотренным выше ограничениям. Операция каждого типа выполняется многократно и независимо от операций других типов с использованием своего собственного технологического оборудования.

Выполнение операций начинается в момент запуска процесса и повторяется без перерывов необходимое количество раз.

Необходимо определить минимальную длительность операции каждого типа так, чтобы при запуске любого процесса его продолжительность была не меньше некоторых заданных значений.

Пусть для каждого процесса $i = 1, \ldots, m$ заданы величины

c_{ij} — число повторений операции типа j;

d_i — минимальная продолжительность процесса.

Определив соответствующие матрицу и вектор, получим неравенство $C\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}$ в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\min,\times}$. Тогда решение задачи сводится к нахождению максимального (минимального в смысле обычного порядка) решения системы

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}, \\
C\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{d}.
\end{aligned}
$$

Если первое уравнение имеет решение $\boldsymbol{x} = A^{*}\boldsymbol{v}$, то подставляя его во второе неравенство, получим $CA^{*}\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{d}$.

Учитывая, что максимальным решением последнего неравенства является вектор $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{d}^{-}CA^{*})^{-}$, имеем решение задачи в виде

$$
\boldsymbol{x} = A^{*}(\boldsymbol{d}^{-}CA^{*})^{-}.
$$

В дополнение к условиям предыдущей задачи, определим вектор и матрицу

$$
C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 & 9 \\ 10 & 15 & 8 & 13 \\ 11 & 12 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

Последовательно найдем

$$
CA^{*} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}0 \\ 6{,}0 & 6{,}0 \\ 6{,}0 & 4{,}8 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{d}^{-}CA^{*})^{-} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.
$$

Окончательно получим

$$
\boldsymbol{x} = A^{*}(\boldsymbol{d}^{-}CA^{*})^{-} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}^{T}.
$$

3.9.3. Модель товарного обмена. Пусть на рынке представлены n товаров, которые могут обмениваться друг на друга. Для каждой пары товаров определены курсы обмена одного товара на другой и обратно.

Допустим, что на рынке всегда предлагается некоторое количество каждого товара. Всякий раз при обмене на новый товар выбирается такой товар, обмен которого обеспечивает наибольшее количество нового товара. Предполагая, что такой рынок достигает некоторого равновесного состояния, необходимо определить соответствующее такому состоянию количество каждого товара.

Для каждого товара $i = 1, \ldots, n$ введем обозначения:

x_i — количество товара;

a_{ij} — обменный курс товара j на товар i при условии $a_{ii} = 0$.

Количество товара i в равновесном состоянии определяется равенством в полукольце $\mathbb{R}_{\max,\times}$

$$x_i = a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n.$$

В векторных обозначениях имеем уравнение

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

Если уравнение имеет решение, то оно не будет единственным. Пусть дополнительно задана величина c, которая определяет максимальное количество любого товара на рынке. Тогда задача нахождения количества каждого товара на рынке принимает вид

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}, \\ \|\boldsymbol{x}\| &= c, \end{aligned}$$

где обозначение нормы понимается в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\max,\times}$.

Найдем вектор количества товаров при условиях

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & 1{,}0 & 1{,}8 & 3{,}2 \\ 0{,}8 & \mathbb{0} & 2{,}0 & 3{,}0 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & \mathbb{0} & 1{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad c = 1000.$$

Ясно, что матрица A является неразложимой. Нетрудно проверить, что $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1} = 1$. Учитывая, что

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 & 2{,}0 & 3{,}2 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 2{,}0 & 3{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}0 & 1{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}6 & 1{,}0 \end{pmatrix}, \qquad A^{\times} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 & 2{,}0 & 3{,}2 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 2{,}0 & 3{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}0 & 1{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}96 \end{pmatrix},$$

имеем

$$A^{*} = (1{,}0, 1{,}0, 0{,}5, 0{,}3)^{T}, \qquad \boldsymbol{x} = A^{*} v, \quad v \in \mathbb{X}.$$

С учетом условия $\|\boldsymbol{x}\| = 1000$, окончательно получим

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 500 & 300 \end{pmatrix}^{T}.$$

Глава 4

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

4.1. Введение

Проблема собственных значений матрицы линейного оператора относится к числу наиболее важных теоретических проблем идемпотентной алгебры, решение которой, кроме того, имеет большое практическое значение. Одно из первых исследований в этой области было проведено в работах Н. Н. Воробьева [7, 8, 9]. Дальнейшее развитие теория и методы решения указанной проблемы получили в работах [69, 101, 74, 43, 11, 55, 42, 53] (см. также представленные там обзоры литературы).

В работах [7, 8, 9] собственные значения и векторы находятся прямо из уравнения $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ путем его решения относительно λ и $\boldsymbol{x}$. При доказательстве существования собственного вектора использовалась теорема Брауэра о неподвижной точке. Затем определялось понятие контурного графа, соответствующего матрице оператора. Для нахождения собственных векторов применялась процедура на основе построения и анализа контурных графов.

Подход к решению проблемы собственных значений на основе изучения контурных графов развивался в работах [43, 44, 98]. Похожая техника, которая сочетает алгебраический подход и методы теории графов, применялась также в [69, 101, 55, 59].

В весьма общем виде проблема собственных значений решается в работах [11, 42, 53] в рамках развитого в этих работах идемпотентного функционального анализа.

Другие подходы, которые опираются на различные способы задания идемпотентного аналога характеристического многочлена и его анализ, рассматриваются в работах [74, 70, 100]. Различия в определении характеристического многочлена, по существу, связаны в этих работах с использованием различных аналогов определителя, включая бидетерминант, перманент и доминант. Однако, применяемые в работах способы задания определителя часто затрудняют решение задачи или не позволяют в полной мере воспользоваться преимуществами аналогии с обычной линейной алгеброй.

Например, бидетерминант в [74] характеризуется парой значений, а не одним значением, как обычный определитель, что усложняет выкладки и рассуждения. При использовании перманента в [70] обычное понятие корня уравнения заменяется на понятие угловой точки многочлена. Решение получаемых характеристических уравнений обычно не может быть получено в явном виде и требует применения некоторой вычислительной процедуры.

В настоящей главе предлагается разработанный в [28] подход к решению проблемы собственных значений в случае идемпотентных полуполей, который опирается на применение идемпотентного аналога определителя, введенного в предыдущей главе, а также характеристического многочлена матрицы. В случае неразложимых матриц это позволяет, как и в обычной алгебре, свести проблему существования собственного значения к задаче отыскания корней характеристического уравнения, которая в идемпотентной алгебре решается достаточно просто. Кроме того, указанный подход обеспечивает вывод известного выражения для собственного числа неразложимой матрицы как результат решения характеристического уравнения, не прибегая при этом к громоздким доказательствам. При этом оказывается возможным искать собственные векторы матрицы как решение некоторого однородного уравнения, применяя методы решения уравнений, разработанные выше.

Сначала изучаются вопросы существования и единственности собственного числа неразложимой матрицы. Получено выражение для его вычисления, а также общий вид собственного вектора. Эти результаты обобщаются на случай разложимой матрицы, и обсуждается задача нахождения базиса собственного полумодуля. В качестве иллюстрации проблема собственных значений решена в общем виде для произвольной матрицы второго порядка.

Получено неравенство для степеней матрицы и ее спектрального радиуса, которое является дальнейшим обобщением неравенства Карре [60]. Изучены некоторые экстремальные свойства собственных значений и векторов матрицы.

Представлены результаты вычисления спектрального радиуса для определенных типов матриц линейных операторов, включая симметричные матрицы, матрицы подобия, а также матрицы единичного ранга, которые опираются на работы [22, 26, 28]. Показано, что для симметричных матриц и матриц подобия величина спектрального радиуса совпадает со значением нормы матрицы. Затем изучаются матрицы единичного ранга. Полученные результаты применяются для решения задачи аппроксимации произвольной матрицы с помощью матрицы единичного ранга.

Приводятся примеры решения практических задач [31].

4.2. Предварительные результаты

Многочленом от одной переменной x называется выражение

$$P(x) = a_0 \oplus \bigoplus_{m=1}^{n} a_m x^m,$$

где числа $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{X}$ — коэффициенты многочлена.

Следующий результат будет использован при доказательстве существования и единственности собственного числа для неразложимых матриц (см. также [52]).

Лемма 4.1. Если $a_0 < \mathbb{1}$ и $a_m \neq \mathbb{0}$ хотя бы для одного $m > 0$, то уравнение $P(x) = \mathbb{1}$ имеет единственное решение

$$x = \left(\bigoplus_{m=1}^{n} a_m^{1/m} \right)^{-1}.$$

Доказательство. Ясно, что функция $P(x)$ является непрерывной и при этом принимает значения как больше, так и меньше единицы. Следовательно, решение уравнения $P(x) = \mathbb{1}$ существует. Учитывая, что $P(x)$ — монотонная функция, нетрудно проверить, что уравнение имеет единственное решение.

Пусть x — решение уравнения. Тогда для всех $m = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство $a_m x^m \leq \mathbb{1}$, которое равносильно неравенству $x^{-1} \geq a_m^{1/m}$. Складывая эти неравенства и учитывая, что, по крайней мере, для одного m имеем равенство $x^{-1} = a_m^{1/m}$, получим $x^{-1} = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n^{1/n}$, откуда следует требуемое решение. $\square$

4.3. Собственные значения и векторы матрицы

Число λ называется собственным значением (числом) матрицы $A \in \mathbb{X}^{n \times n}$, если существует такой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n \setminus \{\mathbb{0}\}$, что

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{4.1}$$

Любой вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbb{0}$, который удовлетворяет этому уравнению, называется собственным вектором A, соответствующим числу λ.

Множество собственных векторов матрицы A, которые отвечают одному и тому же собственному числу λ, дополненное нулевым вектором, образует полумодуль и называется собственным полумодулем A, соответствующим λ.

Для любой матрицы A будем называть функцию $\operatorname{Tr}(\lambda^{-1}A)$ относительно числового параметра λ характеристическим многочленом, а уравнение

$$\operatorname{Tr}(\lambda^{-1}A) = \mathbb{1} \tag{4.2}$$

характеристическим уравнением матрицы A.

Для любой матрицы A и числа λ введем обозначения:

$$A_\lambda = \lambda^{-1}A, \qquad A_\lambda^* = (A_\lambda)^*.$$

В следующих разделах будет показано, как опираясь на решение однородного уравнения, можно найти все собственные числа и векторы матрицы.

4.4. Неразложимые матрицы

Пусть матрица A является неразложимой. Справедливо следующее утверждение, которое представляет собой аналог классического результата о корнях характеристического уравнения.

Теорема 4.1. Для того, чтобы число λ было собственным значением неразложимой матрицы A, необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения (4.2).

Доказательство. Представим (4.1) в виде уравнения $A_\lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. В силу леммы 3.3 уравнение имеет решение $\boldsymbol{x} \neq \mathbb{0}$ тогда и только тогда, когда выполняется $\operatorname{Tr} A_\lambda = \operatorname{Tr}(\lambda^{-1}A) = \mathbb{1}$. Последнее равенство означает, что λ является корнем характеристического уравнения матрицы A. $\square$

Следствие 4.1. Для любой неразложимой матрицы A существует единственное собственное число

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m). \tag{4.3}$$

Доказательство. Запишем характеристический многочлен для матрицы A в виде

$$\operatorname{Tr}(\lambda^{-1}A) = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}(\lambda^{-m}A^m) = \bigoplus_{m=1}^{n} \lambda^{-m} \operatorname{tr} A^m.$$

Составим характеристическое уравнение (4.2). Теперь требуемый результат прямо следует из леммы 4.1. $\square$

Заметим, что выражение (4.3) можно записать с использованием элементов матрицы $A = (a_{ij})$ в эквивалентной форме

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{1 \le i_0, \ldots, i_{m-1} \le n} \left(a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{m-1} i_0}\right)^{1/m}.$$

Следствие 4.2. Собственный вектор неразложимой матрицы A, соответствующий собственному числу λ, имеет вид $\boldsymbol{x} = A_\lambda^* \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$.

Доказательство. Учитывая, что собственный вектор матрицы A удовлетворяет уравнению $A_\lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, применим лемму 3.3. $\square$

Заметим, что собственный полумодуль матрицы, который отвечает какому-либо ее собственному числу, состоит из векторов вида $\boldsymbol{x} = A_\lambda^* \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — любой вектор. Чтобы найти все линейно независимые собственные векторы, достаточно рассмотреть столбцы матрицы A_λ^* и применить к ним процедуру, аналогичную процедуре нахождения базиса пространства решений однородного уравнения.

Пример 4.1. Рассмотрим матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

при условии, что $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} > \mathbb{0}$.

Найдем собственное число матрицы A по формуле (4.3)

$$\lambda = a_{11} \oplus \sqrt{a_{12}a_{21}} \oplus a_{22}.$$

Запишем матрицу

$$A_\lambda = \lambda^{-1}A = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}a_{11} & \lambda^{-1}a_{12} \\ \lambda^{-1}a_{21} & \lambda^{-1}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $a_{11} \le \lambda$ и $a_{22} \le \lambda$, вычислим матрицу

$$A_\lambda^+ = I \oplus A_\lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \lambda^{-1}a_{12} \\ \lambda^{-1}a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

а затем матрицу

$$A_\lambda^\times = A_\lambda A_\lambda^+ = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}a_{11} \oplus \lambda^{-2}a_{12}a_{21} & \lambda^{-1}a_{12} \\ \lambda^{-1}a_{21} & \lambda^{-2}a_{12}a_{21} \oplus \lambda^{-1}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A_λ^*. Предположим сначала, что матрицы A_λ^+ и $A_\lambda^\times$ имеют только один общий столбец, например, первый. Это равносильно выполнению условий

$$\lambda^{-1}a_{11} \oplus \lambda^{-2}a_{12}a_{21} = \mathbb{1},$$
$$\lambda^{-2}a_{12}a_{21} \oplus \lambda^{-1}a_{22} < \mathbb{1},$$

откуда следует, что $\lambda = a_{11} > \sqrt{a_{12}a_{21}} \oplus a_{22}$. Тогда матрица A_λ^* состоит из одного столбца,

$$A_\lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \lambda^{-1}a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ a_{11}^{-1}a_{21} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, при совпадении только второго столбца у матриц A_λ^+ и $A_\lambda^\times$, имеем условия

$$\lambda^{-1}a_{11} \oplus \lambda^{-2}a_{12}a_{21} < \mathbb{1},$$
$$\lambda^{-2}a_{12}a_{21} \oplus \lambda^{-1}a_{22} = \mathbb{1},$$

из которых вытекает, что $\lambda = a_{22} > a_{11} \oplus \sqrt{a_{12}a_{21}}$. При этом

$$A_\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}a_{12} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}a_{22}^{-1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Наконец, оба столбца совпадают, когда выполняются равенства

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}a_{11} \oplus \lambda^{-2}a_{12}a_{21} &= \mathbb{1}, \\ \lambda^{-2}a_{12}a_{21} \oplus \lambda^{-1}a_{22} &= \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, последнее имеет место, если справедливо хотя бы одно из условий $\lambda = a_{11} = a_{22}$ или $\lambda = \sqrt{a_{12}a_{21}}$. В этом случае матрица A_λ^* имеет два столбца,

$$A_\lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \lambda^{-1}a_{12} \\ \lambda^{-1}a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Выясним, когда столбцы матрицы A_λ^* линейно зависимы. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \mu\lambda^{-1}a_{12}, \\ \lambda^{-1}a_{21} &= \mu, \end{aligned}$$

решение которой относительно λ дает $\lambda = \sqrt{a_{12}a_{21}}$.

Следовательно, если $\lambda = a_{11} = a_{22} > \sqrt{a_{12}a_{21}}$, то матрицу A_λ^* можно представить в виде

$$A_\lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{22}^{-1}a_{12} \\ a_{11}^{-1}a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда $\lambda = \sqrt{a_{12}a_{21}}$, один из столбцов матрицы A_λ^* можно отбросить, а саму матрицу представить в виде

$$A_\lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ a_{12}^{-1/2}a_{21}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты для неразложимой матрицы второго порядка можно кратко сформулировать в следующем виде.

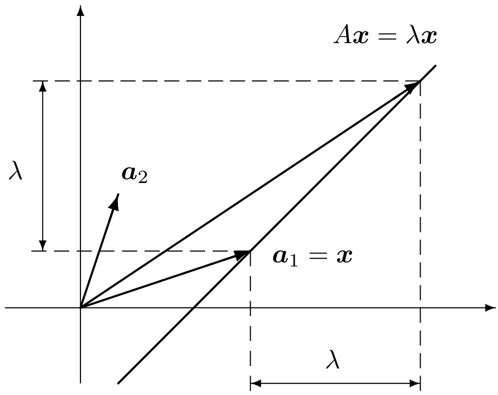


Рис. 4.1. Собственный вектор при условиях $a_{11} > \sqrt{a_{12}a_{21}}$, $a_{11} > a_{22}$

Если $a_{11} > \sqrt{a_{12}a_{21}}$ и $a_{11} > a_{22}$, то собственное подпространство матрицы A состоит из линейной оболочки вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},$$

который совпадает с первым столбцом матрицы (см. рис. 4.1).

При условии, что $a_{22} > a_{11}$ и $a_{22} > \sqrt{a_{12}a_{21}}$, собственное подпространство является линейной оболочкой вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

который совпадает со вторым столбцом матрицы A.

Если $a_{11} = a_{22} > \sqrt{a_{12}a_{21}}$, то собственное подпространство состоит из линейной оболочки векторов

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

которые являются столбцами матрицы.

Наконец, если $\sqrt{a_{12}a_{21}} \geq a_{11}$ и $\sqrt{a_{12}a_{21}} \geq a_{22}$, то собственное подпространство является линейной оболочкой вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{12}^{1/2} \\ a_{21}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

На рис. 4.2 представлен собственный вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ некоторой матрицы второго порядка $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$.

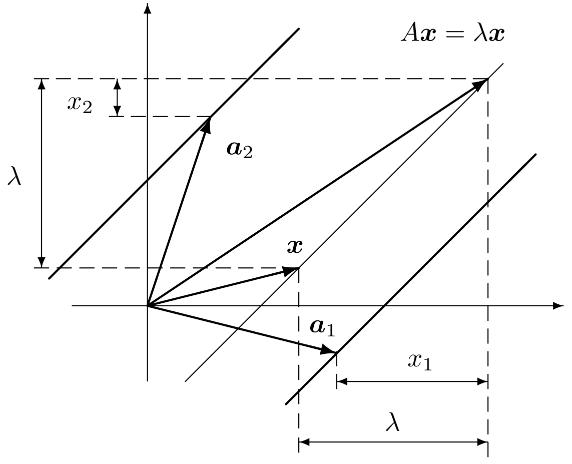


Рис. 4.2. Собственный вектор при условии $\sqrt{a_{12}a_{21}} \geq a_{11}, a_{22}$

4.5. Разложимые матрицы

Рассмотрим матрицу A, которая является разложимой и имеет блочно-треугольную нормальную форму (1.7).

Пусть λ — некоторое число и $A_\lambda = \lambda^{-1}A$. Так же, как при исследовании однородного уравнения в предыдущей главе, введем матрицу $\bar{A}_\lambda$ и представим ее в виде $\bar{A}_\lambda = \bar{T}_\lambda \oplus \bar{D}_\lambda$, где $\bar{T}_\lambda$ — блочная строго треугольная матрица, $\bar{D}_\lambda$ — блочно-диагональная матрица. Затем определим соответствующие матрицы $\bar{D}_\lambda^+$, $\bar{C}_\lambda$ и $\bar{D}_\lambda^*$.

Теорема 4.2. Пусть матрица A имеет форму (1.7), λ_i обозначает собственное число диагонального блока A_{ii}, $i = 1, \ldots, s$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) все собственные значения матрицы A находятся среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$;
2) для того, чтобы некоторое число λ являлось собственным значением A, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{D}_\lambda^* \neq \mathbb{0}$;
3) матрица A всегда имеет, по крайней мере, одно собственное значение $\lambda = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s$.

Доказательство. Представим (4.1) в виде уравнения $A_\lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. В силу следствия 3.2, это уравнение имеет нетривиальное решение, если только $\operatorname{Tr}(\lambda^{-1} A_{ii}) = \mathbb{1}$ для некоторого $i = 1, \ldots, s$, откуда следует, что $\lambda = \lambda_i$ является собственным числом A_{ii}.

Другие два утверждения вытекают из следствий 3.3 и 3.4. □

Следствие 4.3. Собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ, имеет вид $\boldsymbol{x} = \bar{C}_\lambda^+ \bar{D}_\lambda^* \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из теоремы 4.2 и леммы 3.6. □

Пример 4.2. Рассмотрим диагональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и предположим, что $a_{11}, a_{22} > \mathbb{0}$.

Нетрудно проверить, что матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1 = a_{11}$ и $\lambda_2 = a_{22}$, которым отвечают собственные векторы

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Пример 4.3. Пусть для нижней треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbb{0} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

выполняются условия $a_{11}, a_{21}, a_{22} > \mathbb{0}$.

Если $a_{11} > a_{22}$, то имеется одно собственное число $\lambda = a_{11}$, которому соответствует собственный вектор

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}.$$

При условии $a_{22} = a_{11}$ имеем одно собственное число $\lambda = a_{11}$ и два собственных вектора

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

При $a_{11} < a_{22}$ имеем собственное число $\lambda = a_{22}$ и вектор

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

4.6. Неравенства для степеней матрицы

В главе 3 были получены неравенства (см. результат леммы 3.2), которые являлись обобщением неравенства Карре и использовались при анализе решений линейных уравнений. Теперь покажем, как, применяя аналогичные рассуждения, можно получить более точный результат.

Лемма 4.2. Для любой матрицы A и целого $k \geq 0$ выполняется неравенство

$$A^k \leq \bigoplus_{l=0}^{n-1} \lambda^{k-l} A^l, \tag{4.4}$$

где число λ определяется по формуле (4.3).

Доказательство. Нетрудно проверить, что неравенство справедливо при $k < n$. Пусть $k \geq n$. Покажем, что неравенство выполняется для каждого элемента $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k. Положим $i_0 = i$ и $i_k = j$ и представим $a_{ij}^{(k)}$ в виде

$$a_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^{n} a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{k-1} i_k},$$

Рассмотрим любое произведение $S_{ij} = a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{k-1} i_k}$. Если среди множителей $a_{i_0 i_1}, \ldots, a_{i_{k-1} i_k}$ есть нуль, то $S_{ij} = \mathbb{0}$. В этом случае $S_{ij} \leq \lambda^{k-l} a_{ij}^{(l)}$ при любых целых $k, l \geq 0$.

Пусть $S_{ij} > \mathbb{0}$. Повторяя рассуждения леммы 3.2, перегруппируем множители произведения S_{ij} и получим неравенство

$$S_{ij} \leq \operatorname{tr}^{\alpha_1}(A) \cdots \operatorname{tr}^{\alpha_n}(A^n) S'_{ij} = S'_{ij} \bigotimes_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{\alpha_m}(A^m),$$

где S'_{ij} — произведение, которое не содержит циклов и состоит из некоторого числа l множителей, причем $0 \leq l < n$.

Ясно, что $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n + l = k$.

Нетрудно понять, что $l = 0$ только в случае, когда $i = j$. Тогда, положив $S'_{ij} = \mathbb{1}$, если $l = 0$, приходим к неравенству $S'_{ij} \leq a_{ij}^{(l)}$.

Обозначим $\beta_m = m\alpha_m$. Учитывая, что $\beta_1 + \cdots + \beta_n = k - l$, будем иметь

$$\bigotimes_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{\alpha_m}(A^m) = \bigotimes_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{\beta_m/m}(A^m) \leq \\ \leq \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m) \right)^{\beta_1 + \cdots + \beta_n} = \lambda^{k-l}.$$

Таким образом, приходим к неравенству $S_{ij} \leq \lambda^{k-l} a_{ij}^{(l)}$, откуда следует, что при любых $i, j = 1, \ldots, n$ выполняется

$$a_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^{n} a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{k-1} i_k} \leq \bigoplus_{l=0}^{n-1} \lambda^{k-l} a_{ij}^{(l)}. \quad \square$$

Следствие 4.4. Для любого целого $k \geq 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{tr} A^k \leq \lambda^k. \tag{4.5}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что при $\lambda = \mathbb{0}$ неравенство выполняется в форме равенства. Предположим, что $\lambda > \mathbb{0}$.

Из (4.3) следует, что неравенство (4.5), а вместе с ним и неравенство $\lambda^{-k} \operatorname{tr} A^k \leq \mathbb{1}$ справедливы, если $0 \leq k < n$. Тогда с учетом

(4.4) при всех $k \geq n$ будем иметь

$$\operatorname{tr} A^k \leq \lambda^k \bigoplus_{l=0}^{n-1} \lambda^{-l} \operatorname{tr} A^l \leq \lambda^k. \quad \square$$

4.7. Спектральный радиус матрицы

Спектральным радиусом $\varrho(A)$ матрицы A называют ее максимальное (в смысле отношения порядка, индуцированного идемпотентным сложением) собственное число. В случае неразложимой матрицы спектральный радиус совпадает с ее единственным собственным числом.

Выясним связь между максимальным собственным числом матрицы и формулой (4.3). Докажем следующее утверждение.

Лемма 4.3. Пусть A — матрица, представленная в форме (1.7), числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ являются собственными значениями диагональных блоков матрицы и $\varrho(A) = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s$ — ее спектральный радиус. Тогда величина $\varrho(A)$ определяется выражением (4.3).

Доказательство. Сначала заметим, что любая целая степень $m \geq 0$ матрицы A имеет нижнюю блочно-треугольную форму.

В силу неравенства (4.5) имеем

$$\varrho(A) = \bigoplus_{i=1}^{s} \lambda_i = \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{m=1}^{n_i} \operatorname{tr}^{1/m}(A_{ii}^m) =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A_{ii}^m) = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m). \quad \square$$

Опираясь на последнее утверждение, а также теорему 4.2, легко понять, что любая матрица, независимо от того, является она разложимой или нет, всегда имеет собственной число, которое вычисляется по формуле (4.3).

4.8. Свойства спектрального радиуса

Докажем ряд утверждений, в которых символ min понимается в смысле отношения порядка, индуцированного идемпотентным сложением. Сначала рассмотрим случай неразложимых матриц.

4.8.1. Неразложимые матрицы.

Лемма 4.4. Пусть A — неразложимая матрица, λ — ее собственное число. Тогда имеют место равенства

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}_{+}^{n}} \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{x} = \lambda, \tag{4.6}$$

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}_{+}^{n}} (A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}, \tag{4.7}$$

причем минимум достигается на собственном векторе матрицы A.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий ее собственному числу λ. Докажем сначала (4.6). Используя неравенство (1.8), получим

$$\boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0^{-}\boldsymbol{x}_0 \geq \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{x}_0)^{-1} = \lambda.$$

Осталось проверить, что $\boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{x} = \lambda$ при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$.

Для доказательства (4.7) применим неравенство (1.8). Имеем

$$(A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} \geq (A\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{-}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_0^{-}\boldsymbol{x})^{-1}(A\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}.$$

Учитывая, что $(A\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{x}_0 = \lambda^{-1}$, приходим к требуемому результату. □

Объединяя (4.6) и (4.7), получим следующий результат.

Следствие 4.5. Пусть A — неразложимая матрица, λ — ее собственное число. Тогда имеет место равенство

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}_{+}^{n}} \rho(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \lambda \oplus \lambda^{-1}.$$

4.8.2. Разложимые матрицы. Покажем, как результат леммы 4.4 может быть распространен на случай разложимых матриц.

Пусть матрица A имеет форму (1.7). Введем нижнюю блочно-треугольную матрицу $\hat{A}$ с блоками $\hat{A}_{ij} = \lambda_i^{-1}A_{ij}$, где λ_i — собственное число матрицы A_{ii}, для всех $i = 1,\dots,s$, $j = 1,\dots,i$. Пусть $\lambda = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s$ — спектральный радиус матрицы.

Как и раньше, представим $\hat{A}$ в виде $\hat{A} = \hat{T} \oplus \hat{D}$, а также определим матрицы

$$\hat{D}^{+} = \mathrm{diag}(\hat{A}_{11}^{+}, \ldots, \hat{A}_{ss}^{+}), \quad \hat{C} = \hat{D}^{+}\hat{T}, \quad \hat{D}^{*} = \mathrm{diag}(\hat{A}_{11}^{*}, \ldots, \hat{A}_{ss}^{*}).$$

Лемма 4.5. Пусть A — матрица, представленная в форме (1.7), $\lambda_i > \mathbb{0}$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Тогда имеет место равенство

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}} \boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} = \lambda,$$

причем минимум достигается при $\boldsymbol{x} = \hat{C}^{+}\hat{D}^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_i \neq \mathbb{0}$ обозначает вектор размерности n_i для всех $i = 1, \ldots, s$. Для любого вектора $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1^T, \ldots, \boldsymbol{x}_s^T)^T$ в силу (4.6) будем иметь неравенство

$$\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} = \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{j=1}^{i} \boldsymbol{x}_i^{-} A_{ij} \boldsymbol{x}_j \geq \bigoplus_{i=1}^{s} \boldsymbol{x}_i^{-} A_{ii} \boldsymbol{x}_i \geq \bigoplus_{i=1}^{s} \lambda_i = \lambda.$$

Предположим, что вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$ является нетривиальным решением однородного уравнения $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Покажем, что при таком выборе $\boldsymbol{x}$ полученное неравенство превращается в равенство.

Рассмотрим уравнение, соответствующее горизонтальному ряду i матрицы $\hat{A}$,

$$\boldsymbol{x}_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \hat{A}_{ij} \boldsymbol{x}_j = \lambda_i^{-1} \bigoplus_{j=1}^{i} A_{ij} \boldsymbol{x}_j.$$

Умножая обе части уравнения слева на $\lambda_i \boldsymbol{x}_i^{-}$, будем иметь

$$\bigoplus_{j=1}^{i} \boldsymbol{x}_i^{-} A_{ij} \boldsymbol{x}_j = \lambda_i,$$

откуда следует, что

$$\boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} = \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{j=1}^{i} \boldsymbol{x}_i^{-} A_{ij} \boldsymbol{x}_j = \bigoplus_{i=1}^{s} \lambda_i = \lambda.$$

Применим к уравнению $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ лемму 3.6. Учитывая равенство $\operatorname{Tr}\hat{A} = \mathbb{1}$, получим решение уравнения в виде $\boldsymbol{x} = \hat{C}^{+}\hat{D}^{*}\boldsymbol{v}$ при любом $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$. $\square$

Для матрицы A в форме (1.7) обозначим через I множество индексов i таких, что $A_{ij} = \mathbb{0}$ для всех $j = 1, \ldots, i-1$. Будем считать, что множество I всегда содержит индекс 1.

Обозначим через λ_i собственное число матрицы A_{ii} для всех $i = 1, \ldots, s$. Определим величину

$$\tilde{\lambda}^{-1} = \bigoplus_{i \in I} \lambda_i^{-1}.$$

Построим нижнюю блочно-треугольную матрицу $\tilde{A}$. Для всех $i = 1, \ldots, s$ положим $\tilde{A}_{ij} = \tilde{\lambda}^{-1} A_{ij}$, если $j < i$, и

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{cases} \lambda_i^{-1} A_{ii}, & \text{если } i \in I, \\ \mathbb{0}, & \text{если } i \notin I. \end{cases}$$

Представим матрицу $\tilde{A}$ в виде $\tilde{A} = \tilde{T} \oplus \tilde{D}$ и введем матрицы

$$\tilde{D}^{+} = \operatorname{diag}(\tilde{A}_{11}^{+}, \ldots, \tilde{A}_{ss}^{+}), \quad \tilde{C} = \tilde{D}^{+}\tilde{T}, \quad \tilde{D}^{*} = \operatorname{diag}(\tilde{A}_{11}^{*}, \ldots, \tilde{A}_{ss}^{*}).$$

Лемма 4.6. Пусть A — матрица, представленная в форме (1.7), $\lambda_i > \mathbb{0}$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Тогда имеет место равенство

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}} (A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \tilde{\lambda}^{-1},$$

причем минимум достигается при $\boldsymbol{x} = \tilde{C}^{+}\tilde{D}^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$.

Доказательство. В силу (4.7) при любом векторе $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$ выполняется

$$(A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \bigoplus_{i=1}^{s} \left(\bigoplus_{j=1}^{i} A_{ij}\boldsymbol{x}_j \right)^{-} \boldsymbol{x}_i \geq \bigoplus_{i \in I} (A_{ii}\boldsymbol{x}_i)^{-}\boldsymbol{x}_i \geq \bigoplus_{i \in I} \lambda_i^{-1} = \tilde{\lambda}^{-1}.$$

Пусть вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbb{0}$ удовлетворяет однородному уравнению $\tilde{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Покажем, что тогда имеет место равенство $(A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \tilde{\lambda}^{-1}$.

Действительно, из уравнения $\tilde{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для каждого $i \in I$ получим равенство

$$\boldsymbol{x}_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \tilde{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j = \lambda_i^{-1} A_{ii}\boldsymbol{x}_i.$$

Применим ко всем частям равенства операцию псевдообращения, а затем умножим их справа на $\lambda_i^{-1}\boldsymbol{x}_i$. В результате получим

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{i} A_{ij}\boldsymbol{x}_j\right)^{-} \boldsymbol{x}_i = (A_{ii}\boldsymbol{x}_i)^{-}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i^{-1}.$$

В случае, когда $i \notin I$, будем иметь

$$\boldsymbol{x}_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \tilde{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j = \tilde{\lambda}^{-1} \bigoplus_{j=1}^{i-1} A_{ij}\boldsymbol{x}_j \leq \tilde{\lambda}^{-1} \bigoplus_{j=1}^{i} A_{ij}\boldsymbol{x}_j,$$

откуда следует, что

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{i} A_{ij}\boldsymbol{x}_j\right)^{-} \boldsymbol{x}_i \leq \tilde{\lambda}^{-1}.$$

Тогда для рассматриваемого вектора $\boldsymbol{x}$ имеем неравенство

$$(A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \bigoplus_{i \in I} \left(\bigoplus_{j=1}^{i} A_{ij}\boldsymbol{x}_j\right)^{-} \boldsymbol{x}_i \oplus \bigoplus_{i \notin I} \left(\bigoplus_{j=1}^{i} A_{ij}\boldsymbol{x}_j\right)^{-} \boldsymbol{x}_i \leq \tilde{\lambda}^{-1}.$$

Так как всегда выполняется противоположное неравенство, то приходим к заключению, что $(A\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \tilde{\lambda}^{-1}$.

Ясно, что $\operatorname{Tr} \tilde{A} = \mathbb{1}$. Тогда по лемме 3.6 однородное уравнение $\tilde{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ имеет решение $\boldsymbol{x} = \tilde{C}^{+}\tilde{D}^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$. $\square$

4.9. Вычисление спектрального радиуса

Из предыдущих результатов следует, что для любой матрицы A порядка n спектральный радиус λ вычисляется по формуле (4.3). В случае матриц специального вида величина спектрального радиуса может определяться более простыми выражениями. Например, легко проверить справедливость следующего утверждения.

Предложение 4.1. Для любой треугольной матрицы A имеет место равенство
$$\lambda = \operatorname{tr} A.$$

Примеры анализа других типов матриц представлены ниже.

4.9.1. Симметричные матрицы. Пусть матрица A является симметричной. Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.7. Для любой симметричной матрицы A при всяком целом $m \geq 0$ выполняется равенство
$$\|A^m\| = \|A\|^m.$$

Доказательство. При $m = 1$ равенство, очевидно, выполняется. Проверим, что оно выполняется при $m = 2$. Действительно,
$$\|A^2\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\| \|\boldsymbol{a}^i\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\|^2 = \|A\|^2,$$
где $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}^i$ обозначают столбец и строку матрицы A с номером i.

Предположим, что $m > 1$ и запишем
$$\|A^m\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{k_1=1}^{n} \bigoplus_{k_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{k_{m-1}=1}^{n} a_{ik_1} a_{k_1k_2} \cdots a_{k_{m-1}j}.$$

Исследуем случай, когда m — нечетное. Для произвольных индексов i и j рассмотрим выражение
$$\bigoplus_{k_1=1}^{n} \bigoplus_{k_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{k_{m-1}=1}^{n} a_{ik_1} a_{k_1k_2} \cdots a_{k_{m-1}j}.$$

Учитывая симметричность матрицы, поменяем местами индексы у каждого из сомножителей, стоящих на четных местах, и заметим, что $a_{ik_1} a_{k_2k_1} \cdots a_{k_{m-1}j} = a_{ij}^m$, если $k_1 = k_3 = \cdots = k_m = j$ и $k_2 = k_4 = \cdots = k_{m-1} = i$. Тогда выполняется неравенство
$$\bigoplus_{k_1=1}^{n} \bigoplus_{k_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{k_{m-1}=1}^{n} a_{ik_1} a_{k_2k_1} \cdots a_{k_{m-1}j} \geq a_{ij}^m,$$

откуда следует, что

$$\|A^m\| \geq \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij}^m = \|A\|^m.$$

Учитывая, что всегда выполняется неравенство $\|A^m\| \leq \|A\|^m$, для нечетных m будем иметь

$$\|A^m\| = \|A\|^m.$$

Пусть $m = 2m_1$ — четное. В силу того, что равенство справедливо при $m = 2$, имеем

$$\|A^{2m_1}\| = \|A^{m_1}\|^2.$$

Если m_1 — нечетное, то утверждение леммы следует из рассмотренного выше случая нечетной степени. В противном случае положим $m_1 = 2m_2$ и снова повторим те же самые рассуждения. $\square$

Лемма 4.8. Для любой симметричной матрицы A и целого $m \geq 0$ выполняется равенство

$$\mathrm{tr}(A^{2m}) = \|A\|^{2m}.$$

Доказательство. Ясно, что при $m = 0$ равенство выполняется. Теперь заметим, что $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(AA^T) = \|A\|^2$. Тогда с учетом предыдущей леммы при любом целом $m \geq 1$ имеем

$$\mathrm{tr}(A^{2m}) = \|A^m\|^2 = \|A\|^{2m}. \quad \square$$

Опираясь на полученные результаты, нетрудно придти к следующему выводу.

Лемма 4.9. Для любой симметричной матрицы A выполняется равенство

$$\lambda = \|A\|.$$

Доказательство. Выберем произвольное четное число m_1 такое, что $1 < m_1 \leq n$. Применяя предыдущую лемму, получим

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(A^m) \geq \mathrm{tr}^{1/m_1}(A^{m_1}) = \|A\|.$$

Учитывая, что всегда выполняется противоположное неравенство $\lambda \leq \|A\|$, получаем требуемый результат. $\square$

4.9.2. Матрицы подобия. Предположим, что матрица A является матрицей подобия. Докажем следующее утверждение.

Лемма 4.10. Для любой матрицы подобия A с коэффициентом подобия α выполняется равенство

$$\lambda = \|A\| = \alpha.$$

Доказательство. Ясно, что $\|A\| = \|A\mathbb{1}\| = \alpha\|\mathbb{1}\| = \alpha$. Кроме того, для любого собственного числа λ и соответствующего ему собственного вектора $\boldsymbol{x}$ матрицы A выполняется $\|A\boldsymbol{x}\| = \lambda\|\boldsymbol{x}\|$, откуда следует, что $\lambda = \alpha$. □

Определим простые достаточные условия для того, чтобы матрица являлась матрицей подобия.

Лемма 4.11. Матрица A является матрицей подобия, если для всех столбцов $\boldsymbol{a}_j$, $j = 1, \ldots, n$, величина $\|\boldsymbol{a}_j\|$ совпадает.

Доказательство. Пусть $\|\boldsymbol{a}_j\| = \alpha$ при всех $j = 1, \ldots, n$. Тогда для произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ будем иметь

$$\|A\boldsymbol{x}\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \bigoplus_{j=1}^{n} x_j \|\boldsymbol{a}_j\| = \alpha \bigoplus_{j=1}^{n} x_j = \alpha\|\boldsymbol{x}\|. \quad \square$$

4.9.3. Матрицы единичного ранга. Пусть матрица имеет ранг 1. Тогда $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — некоторые ненулевые векторы.

Нетрудно проверить, что спектральный радиус матрицы A записывается в виде $\lambda = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$, причем $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ являются собственным векторами матриц A и A^T, которые отвечают λ.

Очевидно, что линейная оболочка столбцов матрицы $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ представляет собой в декартовой системе координат прямую линию, проходящую через вектор $\boldsymbol{x}$. При этом все столбцы матрицы являются ее собственными векторами.

Лемма 4.12. Пусть ранг матрицы A равен 1, λ — спектральный радиус A, а μ — спектральный радиус матрицы AA^-.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\mu = \mathbb{1}$;

2) собственные векторы матриц A и AA^{-}, которые отвечают соответственно λ и μ, совпадают.

Доказательство. Положим $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ и найдем матрицу

$$AA^{-} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T)^{-} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{x}^{-} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-},$$

откуда следует, что $(AA^{-})^m = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}$ при любом целом $m \geq 1$.

В силу равенства $\mathrm{tr}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}) = \mathbb{1}$ имеем $\mu = \mathbb{1}$. Учитывая, что $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором A, осталось проверить, что

$$AA^{-}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}. \quad \square$$

Нетрудно показать, что множество матриц единичного ранга является замкнутым относительно операции умножения. Действительно, если $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ и $B = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$, то $AB = (\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{x}\boldsymbol{v}^T$.

4.9.4. Аппроксимация с помощью матриц ранга 1. Рассмотрим задачу приближения произвольной неразложимой матрицы A относительно метрики ρ при помощи матрицы ранга 1.

Лемма 4.13. Пусть $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ — неразложимая матрица, μ — спектральный радиус матрицы AA^{-}. Тогда имеет место равенство

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{X}_+^n} \rho(A, \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}) = \mu^{1/2},$$

причем минимум достигается, когда $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} = \mu^{-1/2}A^{-}\boldsymbol{x}$ — собственные векторы матриц AA^{-} и $A^{-}A$, соответствующие μ.

Доказательство. Сначала заметим, что для любой неразложимой матрицы A матрицы AA^{-} и $A^{-}A$ являются неразложимыми. Рассмотрим величину

$$r = \rho(A, \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}) = \mathrm{tr}(A(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-})^{-}) \oplus \mathrm{tr}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}A^{-}) = \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}A^{-}\boldsymbol{x}.$$

Имеем два неравенства

$$r \geq \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{y}, \qquad r \geq \boldsymbol{y}^{-}A^{-}\boldsymbol{x}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{-} \geq I$ при любом $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}_+^n$, из первого неравенства получаем $r\boldsymbol{y}^{-} \geq \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{-} \geq \boldsymbol{x}^{-}A$, а затем $\boldsymbol{y}^{-} \geq r^{-1}\boldsymbol{x}^{-}A$.

Подстановка во второе неравенство вместе с результатом леммы 4.4 дает $r \geq r^{-1}\boldsymbol{x}^{-}AA^{-}\boldsymbol{x} \geq r^{-1}\mu$, откуда следует, что $r \geq \mu^{1/2}$.

Выбирая $\boldsymbol{x}$ равным собственному вектору матрицы AA^{-}, а вектор $\boldsymbol{y}$ так, чтобы выполнялось равенство $\boldsymbol{y} = \mu^{-1/2}A^{-}\boldsymbol{x}$, будем иметь

$$r = \boldsymbol{x}^{-}A\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}A^{-}\boldsymbol{x} = \mu^{-1/2}\boldsymbol{x}^{-}AA^{-}\boldsymbol{x} \oplus \mu^{1/2}(A^{-}\boldsymbol{x})^{-}A^{-}\boldsymbol{x} = \mu^{1/2}.$$

Легко видеть, что вектор $\boldsymbol{y} = \mu^{-1/2}A^{-}\boldsymbol{x}$ является собственным для матрицы $A^{-}A$. Действительно,

$$A^{-}A\boldsymbol{y} = \mu^{-1/2}A^{-}AA^{-}\boldsymbol{x} = \mu^{1/2}A^{-}\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{y}. \quad \square$$

Следствие 4.6. Для любой неразложимой матрицы A справедливо двойное неравенство

$$\boldsymbol{x}(A^{-}\boldsymbol{x})^{-} \leq A \leq \mu\boldsymbol{x}(A^{-}\boldsymbol{x})^{-},$$

где μ и $\boldsymbol{x}$ — собственное число и вектор матрицы AA^{-}.

Нетрудно проверить, однако, что левое неравенство выполняется при любом $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$.

4.10. Приложения и примеры

4.10.1. Планирование производства. Пусть некоторый производственный процесс состоит из следующих друг за другом производственных циклов. Каждый цикл включает выполнение n взаимосвязанных технологических операций. Для завершения любой операции требуются определенные результаты выполнения других операций текущего цикла. Как только выполнение какой-либо операции текущего цикла оказывается завершено, начинается выполнение этой операции для следующего цикла.

Требуется определить, при каких условиях динамика процесса имеет регулярный характер, при котором длительность всех операций сохраняется постоянной на всех производственных циклах.

Для каждой операции $i = 1, \ldots, n$ и цикла $k = 1, 2, \ldots$ введем обозначения:

$x_{i}(k)$ — время начала операции;

a_{ij} — время после начала операции j, за которое производится результат, необходимый для завершения операции i.

Время начала операции $x_i(k)$ удовлетворяет равенству в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$

$$x_i(k) = a_{i1}x_1(k-1) \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n(k-1).$$

С учетом векторных обозначений

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеем динамическое уравнение

$$\boldsymbol{x}(k) = A\boldsymbol{x}(k-1).$$

Для решения задачи следует выбрать начальный вектор $\boldsymbol{x}(0)$ равным собственному вектору $\boldsymbol{x}$ матрицы A. В этом случае имеем

$$\boldsymbol{x}(k) = \lambda^k \boldsymbol{x},$$

где λ — собственное число матрицы A, которое определяет длительность всех операций процесса.

Найдем решение для системы с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисление собственного числа дает $\lambda = 4$. Найдем матрицы

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_\lambda^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

а затем матрицы

$$A_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_\lambda^\times = A_\lambda^+, \qquad A_\lambda^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решением задачи является вектор $\boldsymbol{x} = A_\lambda^* v$, где $v \in \mathbb{X}$. В частности, в качестве начального вектора можно выбрать $\boldsymbol{x}(0) = (1,1,0)^T$.

4.10.2. Модель экономического развития. Рассмотрим модель экономического развития с экстерналиями, которая была построена и изучена в работе [97].

Под термином «экстерналия» (externality) понимают некоторый косвенный, внешний эффект, который какая-либо производственная или потребительская деятельность оказывает на некоторую функцию полезности, множество потребления или производственное множество. Предполагается, что указанный эффект создается иным экономическим агентом, нежели тот, который этот эффект испытывает, а также, что этот эффект не передается через цены.

Пусть имеется система, которая включает n агентов (фирм, регионов, органов власти) с взаимными положительными экстерналиями. Эволюция системы ограничена потенциальными возможностями развития отдельных агентов, а также экстерналиями, создаваемыми различными агентами.

В любой момент времени каждый агент характеризуется некоторым положительным числом, которое будет называться значением агента. Это может быть, например, прибыль, доход, благосостояние, приведенная стоимость фирмы или некоторая агрегированная переменная, такая, как композит физического капитала и знания, или некоторая не измеримая непосредственно латентная переменная. Развитие агента состоит в изменении его значения, которое зависит от его собственного значения и значений других агентов в предыдущий период.

Для каждого агента $i = 1, \ldots, n$ и момента времени $k = 1, 2, \ldots$ введем обозначения:

$x_i(k)$ — значение агента;

$a_{ij} > 0$ — коэффициент, соответствующий экстерналии, которую создает агент j в форме (обыкновенного) неравенства

$$x_i(k) \leq a_{ij} x_j(k-1).$$

При $j = i$ коэффициент a_{ii} описывает потенциальные возможности развития самого агента i. Если недостаточное развитие агента j не может стать ограничением для i (в частности, если соответствующая экстерналия отсутствует), то полагаем $a_{ij} = +\infty$.

Динамика агента i описывается равенством в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\min,\times}$

$$x_i(k) = a_{i1}x_1(k-1) \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n(k-1).$$

Определив вектор $\boldsymbol{x}(k)$ и матрицу A, имеем равенство

$$\boldsymbol{x}(k) = A\boldsymbol{x}(k-1).$$

Для рассматриваемой модели максимальное собственное число λ матрицы A показывает среднюю асимптотическую скорость роста всей системы взаимодействующих агентов и может служить важным показателем эффективности системы.

Найдем среднюю скорость роста для системы с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 & 1{,}0 \\ 2{,}5 & 2{,}0 & 1{,}0 \\ 2{,}0 & 1{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Последовательно вычислим

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 & 0{,}5 \\ 2{,}0 & 1{,}25 & 1{,}5 \\ 3{,}0 & 1{,}0 & 1{,}5 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}625 & 0{,}125 \\ 3{,}0 & 1{,}0 & 1{,}25 \\ 2{,}5 & 1{,}5 & 1{,}0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\lambda = \operatorname{tr} A \oplus \sqrt{\operatorname{tr} A^2} \oplus \sqrt[3]{\operatorname{tr} A^3} = 1.$$

4.10.3. Анализ производственных процессов. Рассмотрим производственную линию, которая состоит из n технологических участков и предназначена для выпуска некоторого изделия (продукта). Заготовки изделия, поступающие на линию, последовательно перемещаются от первого участка до участка n, а затем покидают линию в виде готового продукта. В каждый момент времени любой участок может быть занят обработкой только одной заготовки. Заготовки перемещаются от одного участка к другому мгновенно.

Если после завершения обработки заготовки на одном участке оказывается, что следующий участок занят, то заготовка помещается в неограниченный накопитель, где присоединяется к очереди заготовок, ожидающих обработки на этом участке. Заготовки выбираются из накопителя в порядке их присоединения к очереди.

Для каждого участка $i = 1, \ldots, n$ введем обозначения:

$x_i(k)$ — время завершения обработки заготовки k;

τ_i — продолжительность обработки одной заготовки.

Предположим, что линия начинает работать в нулевой момент времени. Запас имеющихся заготовок не ограничен, а все участки в начальный момент времени свободны. Положив $x_i(k) = -\infty$ для всех $k \leq 0$, динамику системы можно описать при помощи (обыкновенных) уравнений

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_1(k-1) + \tau_1, \\ x_i(k) &= \max(x_{i-1}(k), x_i(k-1)) + \tau_i, \quad i = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

которым соответствуют в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ уравнения

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \tau_1 x_1(k-1), \\ x_i(k) &= \tau_i(x_{i-1}(k) \oplus x_i(k-1)), \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

С использованием обозначений $\boldsymbol{x}(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))^T$,

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \tau_n \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \cdots & \cdots & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

имеем динамическое уравнение

$$\boldsymbol{x}(k) = \mathcal{T} G^T \boldsymbol{x}(k) \oplus \mathcal{T} \boldsymbol{x}(k-1),$$

которое является неоднородным уравнением относительно $\boldsymbol{x}(k)$.

Нетрудно проверить, что $\mathrm{Tr}(\mathcal{T} G^T) = \mathbb{0}$. Решая неоднородное уравнение, получим

$$\boldsymbol{x}(k) = A\boldsymbol{x}(k-1),$$

где

$$A = (\mathcal{T}G^T)^+\mathcal{T} = (I \oplus \mathcal{T}G^T \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}G^T)^{n-1})\mathcal{T} =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_1 & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2 & & \mathbb{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tau_1\cdots\tau_n & \tau_2\cdots\tau_n & \cdots & \tau_n \end{pmatrix}.$$

При анализе эффективности системы часто представляет интерес определение среднего времени цикла производства изделия, которое может быть вычислено как спектральный радиус матрицы системы A. Другим важным показателем эффективности является средняя производительность линии, которая вычисляется как величина обратная (в обычном смысле) среднему времени цикла.

В силу треугольной формы матрицы A ее спектральный радиус равен

$$\lambda = \tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_n,$$

или, в обычных обозначениях, $\lambda = \max(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Предположим, что каждый накопитель, который предназначен для размещения заготовок, ожидающих обработки, имеет ограниченную емкость. В такой системе возможно блокирование передвижения заготовок между участками из-за отсутствия свободного места в накопителе участка, в который направляется заготовка.

Рассмотрим механизм блокирования, который заключается в том, что после завершения обработки заготовка не может освободить участок и перейти к следующему участку, если накопитель этого участка полностью заполнен. Пусть для простоты участки $i = 2, \ldots, n$ имеют нулевую емкость накопителей, а накопитель первого участка остается неограниченным, чтобы обеспечить условие неограниченного запаса заготовок, поступающих на линию.

Имеем динамические уравнения

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \max(x_1(k-1) + \tau_1, x_2(k-1)), \\ x_i(k) &= \max(\max(x_{i-1}(k), x_i(k-1)) + \tau_i, x_{i+1}(k-1)), \\ &\qquad i = 2, \ldots, n-1, \\ x_n(k) &= \max(x_{n-1}(k), x_n(k-1)) + \tau_n. \end{aligned}$$

В полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ эти уравнения записываются в виде

$$
\begin{aligned}
x_1(k) &= \tau_1 x_1(k-1) \oplus x_2(k-1), \\
x_i(k) &= \tau_i(x_{i-1}(k) \oplus x_i(k-1)) \oplus x_{i+1}(k-1), \quad i = 2, \ldots, n-1, \\
x_n(k) &= \tau_n(x_{n-1}(k) \oplus x_n(k-1)),
\end{aligned}
$$

или, в матричных обозначениях, в виде

$$
\boldsymbol{x}(k) = \mathcal{T} G^T \boldsymbol{x}(k) \oplus (\mathcal{T} \oplus G)\boldsymbol{x}(k-1).
$$

Решая последнее уравнение путем итераций, получим

$$
\boldsymbol{x}(k) = A\boldsymbol{x}(k-1),
$$

где

$$
\begin{aligned}
A = (\mathcal{T} G^T)^+(\mathcal{T} \oplus G) = \\
= \begin{pmatrix}
\tau_1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\
\tau_1\tau_2 & \tau_2 & \mathbb{1} & & \mathbb{0} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \\
\tau_1 \cdots \tau_{n-1} & \tau_2 \cdots \tau_{n-1} & \tau_3 \cdots \tau_{n-1} & & \mathbb{1} \\
\tau_1 \cdots \tau_n & \tau_2 \cdots \tau_n & \tau_3 \cdots \tau_n & \cdots & \tau_n
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Вычисление спектрального радиуса матрицы A снова приводит к величине $\lambda = \max(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Заметим, что с увеличением емкости накопителей среднее время производственного цикла может только уменьшится. Следовательно, сравнивая полученный результат с результатом для случая неограниченных накопителей, можно заключить, что для рассматриваемой системы это время не зависит от каких-либо ограничений на емкость накопителей.

Глава 5

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

5.1. Введение

Одним из основных результатов спектральной теории обобщенных линейных операторов в идемпотентной алгебре является теорема сходимости, которая устанавливает, что для любого оператора A существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \lambda.$$

Эта утверждение является аналогом классической теоремы о спектральном радиусе ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве.

К числу первых результатов в этой области относятся работы И. В. Романовского [48, 49, 50], в которых исследовались асимптотические свойства решений задачи динамического программирования. На основе использования теоретико-графического подхода было показано, что для произвольной матрицы порядка n рассматриваемый предел существует и равен

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(A^m).$$

В то же время в работах Н. Н. Воробьева [7, 8, 9] было установлено, что эта величина является максимальным собственным числом матрицы A, которое в идемпотентной алгебре играет роль спектрального радиуса оператора.

Для операторов, действующих в векторном полумодуле над произвольным идемпотентным полукольцом, доказательство теоремы сходимости в общем виде было получено в [42] с применением развитой в этой работе теории на основе сочетания классического и идемпотентного анализа. Наглядная интерпретация теоремы сходимости в терминах теории графов дана в [63].

В этой главе представлены результаты, которые опираются на работы [23, 38]. Сначала рассматривается ряд вспомогательных алгебраических соотношений, включая один частный случай биномиального разложения для матриц, а также неравенства для собственного числа, следа и нормы матриц, все элементы которых отличны от нуля. Эти соотношения применяются при доказательстве теорем сходимости для матриц без нулевых элементов и в то же время представляют самостоятельный интерес.

Доказательство теорем сходимости распространяется на случай произвольных неразложимых матриц, а затем на случай разложимых матриц. В заключение показано, что общая формула для вычисления спектрального радиуса матрицы может быть построена на основе доказанных теорем как некоторое их следствие.

5.2. Биномиальная формула для диагональных матриц

Рассмотрим один вариант биномиального тождества, который будет использован ниже. Докажем вспомогательное неравенство.

Лемма 5.1. Пусть $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, а $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n \times n}$ — произвольная матрица.

Тогда для любых целых $l, m \geq 0$ выполняется

$$D^l A B^m \leq D^{l+m} A \oplus A B^{l+m}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Учитывая, что для всех $i, j = 1, \ldots, n$ справедливо неравенство $d_i^l b_j^m \leq d_i^{l+m} \oplus b_j^{l+m}$, имеем

$$\begin{aligned}\{D^l A B^m\}_{ij} = d_i^l a_{ij} b_j^m \leq d_i^{l+m} a_{ij} \oplus a_{ij} b_j^{l+m} = \\ = \{D^{l+m} A\}_{ij} \oplus \{A B^{l+m}\}_{ij}. \quad \square\end{aligned}$$

Теперь выясним, какой вид приобретает биномиальная формула для матриц в случае, когда одна из матриц является диагональной.

Лемма 5.2. Для любой матрицы A и диагональной матрицы

D при всех целых $k \geq 0$ выполняется

$$(D \oplus A)^k = \bigoplus_{p+q+r=k} A^p D^q A^r. \tag{5.2}$$

Доказательство. Сначала заметим, что $(D \oplus A)^k \geq A^p D^q A^r$ при всех целых $p, q, r \geq 0$ таких, что $p+q+r=k$. Следовательно,

$$(D \oplus A)^k \geq \bigoplus_{p+q+r=k} A^p D^q A^r.$$

Докажем равенство (5.2) по индукции. При $k=0,1$ равенство, очевидно, выполняется. При $k=2$ имеем

$$(D \oplus A)^2 = D^2 \oplus DA \oplus AD \oplus A^2,$$

откуда следует, что это равенство также выполняется.

Допустим, что равенство (5.2) справедливо для некоторого k. Покажем, что тогда оно будет выполняться и для $k+1$. Рассмотрим величину

$$(D \oplus A)^{k+1} = \bigoplus_{p+q+r=k} A^p D^q A^r (D \oplus A) =$$
$$= \bigoplus_{p+q+r=k} (A^p D^q A^r D \oplus A^p D^q A^{r+1}).$$

Учитывая, что в силу (5.1) выполняется

$$A^p D^q A^r D \leq A^p (D^{q+1} A^r \oplus A^r D^{q+1}) = A^p D^{q+1} A^r \oplus A^{p+r} D^{q+1},$$

имеем неравенство

$$(D \oplus A)^{k+1} \leq \bigoplus_{p+q+r=k} (A^p D^{q+1} A^r \oplus A^{p+r} D^{q+1} \oplus A^p D^q A^{r+1}) \leq$$
$$\leq \bigoplus_{p+q+r=k+1} A^p D^q A^r.$$

Принимая во внимание, что всегда справедливо противоположное неравенство, заключаем, что

$$(D \oplus A)^{k+1} = \bigoplus_{p+q+r=k+1} A^p D^q A^r. \quad \square$$

5.3. Неравенства для матриц без нулевых элементов

Для доказательства теорем сходимости потребуется ряд неравенств, которые также представляют самостоятельный интерес.

Лемма 5.3. Пусть $A \in \mathbb{X}_{+}^{n\times n}$ — матрица, λ — ее собственное число. Тогда для любого целого $k \geq 0$ выполняется неравенство

$$\lambda^{-k} A^k \leq AA^{-}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор матрицы A, который отвечает собственному числу λ. Тогда $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$ и, кроме того, $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором матрицы A^k, соответствующим λ^k при любом целом $k \geq 0$. Применяя (1.8), для всех k получим

$$A\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{x})^{-} = A^k\boldsymbol{x}(A^k\boldsymbol{x})^{-} \geq A^k(\boldsymbol{x}^{-}A^k\boldsymbol{x})^{-1} = \\ = \lambda^{-k}A^k(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{x})^{-1} = \lambda^{-k}A^k.$$

С другой стороны, легко проверить, что для всякого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_{+}^{n}$ и любой матрицы $A \in \mathbb{X}_{+}^{n\times n}$ выполняется

$$A\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{x})^{-} \leq AA^{-}.$$

Действительно, учитывая, что $a_{ij} > \mathbb{0}$ и $x_i > \mathbb{0}$ при всех i, j, имеем

$$\{A\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{x})^{-}\}_{ij} = \bigoplus_{r=1}^{n} a_{ir}x_r \left(\bigoplus_{s=1}^{n} a_{js}x_s\right)^{-1} \leq \\ \leq \bigoplus_{r=1}^{n} a_{ir}x_r(a_{jr}x_r)^{-1} = \{AA^{-}\}_{ij}.$$

Таким образом, приходим к двойному неравенству

$$\lambda^{-k}A^k \leq A\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{x})^{-} \leq AA^{-},$$

из которого следует (5.3). $\square$

Лемма 5.4. Пусть $A \in \mathbb{X}_{+}^{n\times n}$ — матрица, λ — ее собственное число. Тогда для любого целого $k \geq 0$ выполняются неравенства

$$\lambda^{k} \leq \|A^{k}\| \leq \lambda^{k}\|AA^{-}\|. \tag{5.4}$$

Доказательство. Правое неравенство прямо следует из (5.3). Проверим выполнение левого неравенства. Пусть $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий λ. Тогда с учетом (4.1) имеем

$$\lambda^{k}\|\boldsymbol{x}\| = \|\lambda^{k}\boldsymbol{x}\| = \|A^{k}\boldsymbol{x}\| \leq \|A^{k}\|\|\boldsymbol{x}\|,$$

откуда вытекает левое неравенство, которое, очевидно, справедливо для любой матрицы A. □

Лемма 5.5. Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}_{+}^{n\times n}$ и целого $k > 0$ выполняется

$$\|AA^{-}\|^{-1}\|A^{k}\| \leq \operatorname{tr} A^{k}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Обозначим через $a_{ij}^{(k)}$ элемент i,j матрицы A^{k} для всех $k = 1, 2, \ldots$ и рассмотрим величину $\operatorname{tr}(A^{k})\|AA^{-}\|$.

Заметим, что

$$\|AA^{-}\| = \bigoplus_{p=1}^{n}\bigoplus_{q=1}^{n}\bigoplus_{r=1}^{n} a_{pr}a_{qr}^{-1} \geq a_{pr}a_{qr}^{-1}$$

для любых p, q, r. Учитывая, что $a_{ij} > \mathbb{0}$ при всех i, j, имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^{k})\|AA^{-}\| &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{l=1}^{n} a_{il}a_{li}^{(k-1)}\right)\left(\bigoplus_{p=1}^{n}\bigoplus_{q=1}^{n}\bigoplus_{r=1}^{n} a_{pr}a_{qr}^{-1}\right) \geq \\ &\geq \bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{l=1}^{n} a_{il}a_{li}^{(k-1)}a_{jl}a_{il}^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj}^{(k-1)} = \|A^{k}\|,\end{aligned}$$

откуда следует (5.5). □

Лемма 5.6. Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}_{+}^{n\times n}$ и целого $k > 0$ выполняется

$$\lambda^{k}\|AA^{-}\|^{-1} \leq \operatorname{tr} A^{k} \leq \lambda^{k}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Неравенство слева вытекает из (5.4) и (5.5). В силу (4.5) правое неравенство справедливо для любой матрицы A. $\square$

Заметим, что неравенства (5.4), (5.5) и (5.6) остаются в силе, когда $A = \mathbb{0}$.

5.4. Теоремы сходимости

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5.1. Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ существует предел
$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \lambda, \tag{5.7}$$
где λ — спектральный радиус матрицы A.

Доказательство. Если $A = \mathbb{0}$, то теорема, очевидно, верна.

Пусть A — неразложимая матрица с собственным числом λ.

В случае, когда матрица A не имеет нулевых элементов, утверждение теоремы прямо следует из двойного неравенства (5.4).

Рассмотрим случай произвольной неразложимой матрицы A. Введем матрицу
$$B = A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n.$$

В силу идемпотентности сложения для любого целого $m \geq 1$ имеет место равенство $B^m = A^m \oplus A^{m+1} \oplus \cdots \oplus A^{mn}$, откуда, в частности, следует неравенство $A^k \leq B^l \leq B^k$, которое выполняется для любого $k = 1, 2, \ldots$ и $l = \lceil k/n \rceil$.

Учитывая, что матрица B не имеет нулевых элементов, для нее выполняется
$$\lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \mu,$$
где μ — собственное число матрицы B.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор матрицы A. Проверим, что $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором матрицы B, который отвечает собственному числу $\mu = \lambda \oplus \lambda^n$. Действительно,
$$B\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \oplus A^2\boldsymbol{x} \oplus \cdots \oplus A^n\boldsymbol{x} = (\lambda \oplus \lambda^2 \oplus \cdots \oplus \lambda^n)\boldsymbol{x} = (\lambda \oplus \lambda^n)\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}.$$

Предположим, что $\lambda \leq \mathbb{1}$. Заметим, что тогда $\mu = \lambda$.

Для любого k выполняется неравенство $\|A^k\|^{1/k} \le \|B^k\|^{1/k}$, из которого вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \le \lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \lambda.$$

Пусть $\lambda > \mathbb{1}$. Тогда $\mu = \lambda^n$ и $\|B^k\| \ge \mu^k \ge \mathbb{1}$ для любого k. Положим $l = \lceil k/n \rceil$ и заметим, что $k \le ln$. Имеем неравенство

$$\|A^k\|^{1/k} \le \|B^l\|^{1/k} \le (\|B^l\|^{1/l})^{1/n},$$

откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \le \mu^{1/n} = \lambda.$$

Учитывая, что $\|A^k\|^{1/k} \ge \lambda$ при любом k, получим (5.7).

Предположим, что матрица $A \ne \mathbb{0}$ является разложимой и приведена к нормальной форме (1.7), λ_i — собственное число диагонального блока A_{ii}, $\lambda = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s$ — спектральный радиус A.

Пусть сначала $A_{ij} = \mathbb{0}$ для всех $i \ne j$, т.е. матрица A является блочно-диагональной. При этом

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & A_{ss} \end{pmatrix}, \qquad A^k = \begin{pmatrix} A_{11}^k & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & A_{ss}^k \end{pmatrix},$$

а тогда, очевидно, $\|A^k\| = \|A_{11}^k\| \oplus \cdots \oplus \|A_{ss}^k\|$.

Используя (5.4), получим двойное неравенство

$$\lambda^k = \lambda_1^k \oplus \cdots \oplus \lambda_s^k \le \|A^k\| \le \bigoplus_{i=1}^{s} \lambda_i^k \|A_{ii} A_{ii}^-\| \le c_1 \lambda^k,$$

где

$$c_1 = \bigoplus_{i=1}^{s} \|A_{ii} A_{ii}^-\| \ge \mathbb{1},$$

откуда следует существование предела (5.7).

Рассмотрим произвольную разложимую матрицу A, которая не является блочно-диагональной. Матрицу A можно представить в виде $A = D \oplus T$, где

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & A_{ss} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \dots & \dots & \mathbb{0} \\ A_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \dots & A_{s,s-1} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \neq \mathbb{0}.$$

Так как матрица D является блочно-диагональной с диагональными блоками $A_{11}, \dots, A_{ss}$, для любого целого $k \geq 0$ выполняется

$$\lambda^k \leq \|D^k\| \leq c_1 \lambda^k. \tag{5.8}$$

Применяя (5.2) и учитывая, что матрица T является нильпотентной с индексом $m \leq n$, для всех $k \geq n$ имеем

$$A^k = (D \oplus T)^k = \bigoplus_{p+q+r=k} T^p D^q T^r = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \bigoplus_{j=0}^{i} T^j D^{k-i} T^{i-j}.$$

Принимая во внимание неравенство $A \geq D$, получим

$$\|D^k\| \leq \|A^k\| \leq \bigoplus_{i=0}^{m-1} \bigoplus_{j=0}^{i} \|T^j\| \|D^{k-i}\| \|T^{i-j}\| \leq \bigoplus_{i=0}^{m-1} \|D^{k-i}\| \|T\|^i.$$

Теперь, применяя (5.8), приходим к неравенству

$$\lambda^k \leq \|A^k\| \leq c_1 \lambda^k \bigoplus_{i=0}^{m-1} \lambda^{-i} \|T\|^i = c_1 c_2 \lambda^k,$$

где

$$\|T\| = \bigoplus_{i=2}^{s} \bigoplus_{j=1}^{i-1} \|A_{ij}\|, \qquad c_2 = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \lambda^{-i} \|T\|^i \geq \mathbb{1}.$$

При $k \to \infty$ из полученного неравенства следует (5.7). $\square$

Теорема 5.2. Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{n \times n}$ существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \bigoplus_{m=1}^{k} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m) = \lambda, \tag{5.9}$$

где λ — спектральный радиус матрицы A.

Доказательство. Ясно, что теорема верна в случае $A = \mathbb{0}$.

Предположим сначала, что A — неразложимая матрица.

Если все элементы матрицы отличны от нуля, то применяя неравенство (5.6), получаем

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{tr}^{1/k}(A^k) = \lambda,$$

откуда с учетом правого неравенства в (5.6) следует (5.9).

Рассмотрим случай произвольной неразложимой матрицы A. Как и раньше, введем матрицу с ненулевыми элементами

$$B = A \oplus \cdots \oplus A^n$$

и собственным вектором $\mu = \lambda \oplus \lambda^n$.

Предположим, что $\lambda \leq \mathbb{1}$. Заметим, что тогда $\mu = \lambda$. Кроме того, для любого $l = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/(lm)}(A^{lm}) = \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^{lm})\right)^{1/l} \geq$$
$$\geq \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr} A^{lm}\right)^{1/l} = \operatorname{tr}^{1/l}(B^l),$$

откуда следует, что для всех $k \geq n$ выполняется неравенство

$$\bigoplus_{m=1}^{k} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m) \geq \bigoplus_{m=1}^{\lfloor k/n \rfloor} \operatorname{tr}^{1/m}(B^m).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \bigoplus_{m=1}^{k} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m) \geq \mu = \lambda.$$

Пусть $\lambda > \mathbb{1}$. Тогда $\mu = \lambda^n$, а для любого $l = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/(lm)}(A^{lm}) \geq \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr} A^{lm}\right)^{1/(ln)} = \left(\operatorname{tr}^{1/l}(B^l)\right)^{1/n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \bigoplus_{m=1}^{k} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m) \geq \mu^{1/n} = \lambda.$$

В силу того, что $\operatorname{tr}^{1/k}(A^k) \leq \lambda$ при любом k, приходим к (5.9).

Наконец, предположим, что матрица $A \neq \mathbb{0}$ является разложимой и представлена в форме (1.7), λ_i — собственное число диагонального блока A_{ii}, $\lambda = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s$ — спектральный радиус A.

Нетрудно видеть, что в этом случае равенство (5.9) вытекает из полученного выше результата для неразложимых матриц и представления

$$\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} A_{11}^k \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} A_{ss}^k. \quad \square$$

5.5. Определение спектрального радиуса

Покажем, как общая формула для спектрального радиуса λ матрицы может быть получена на основе теоремы 5.2.

Теорема 5.3. Для любой матрицы $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ выполняется

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m).$$

Доказательство. Учитывая результат теоремы 5.2, достаточно проверить, что при всех целых $k \geq 1$ выполняется неравенство

$$\operatorname{tr}^{1/k}(A^k) \leq \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m). \tag{5.10}$$

Очевидно, что (5.10) выполняется для всех $k \leq n$. Покажем, что это неравенство также справедливо и для $k > n$.

Учитывая, что для любого k имеет место соотношение

$$\operatorname{tr} A^k = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_k=1}^{n} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1},$$

оценим сверху произведение

$$S(i_1, \ldots, i_k) = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1},$$

применяя те же рассуждения, что и в лемме 3.2.

Заметим, что в силу неравенства $k > n$ в последовательности индексов $i_1, \ldots, i_k$ есть повторяющиеся значения, причем любой отрезок последовательности, в котором нет повторений, состоит из не более, чем n индексов.

Перегруппируем сомножители произведения $S(i_1, \ldots, i_k)$. Сначала возьмем все циклические произведения $S(i) = a_{ii}$, состоящие из $m = 1$ множителей. Пусть α_1 — число таких произведений. Затем выберем произведения $S(i,j) = a_{ij}a_{ji}$, $i \neq j$, состоящие из $m = 2$ множителей, а их число обозначим через α_2. Продолжая группировку, определим числа α_m для всех значений $m \leq n$.

В силу того, что каждое циклическое произведение из m множителей не превосходит величины $\operatorname{tr} A^m$, имеем неравенство

$$S(i_1, \ldots, i_k) \leq \operatorname{tr}^{\alpha_1}(A) \cdots \operatorname{tr}^{\alpha_n}(A^n) = \bigotimes_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{\alpha_m}(A^m),$$

где α_m — целые неотрицательные числа, $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = k$.

Положим $\beta_m = m\alpha_m$. Учитывая, что $\beta_1 + \cdots + \beta_n = k$, получим

$$S(i_1, \ldots, i_k) \leq \bigotimes_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{\alpha_m}(A^m) =$$

$$= \bigotimes_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{\beta_m/m}(A^m) \leq \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m) \right)^k,$$

откуда следует

$$\operatorname{tr} A^k = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_k=1}^{n} S(i_1, \ldots, i_k) \leq \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m) \right)^k.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству (5.10), из которого в сочетании с (5.9) следует утверждение теоремы. □

Глава 6

ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

6.1. Введение

При анализе реальных систем в технике, экономике, управлении и других областях находят применение стохастические динамические модели, в которых эволюция состояний системы описывается при помощи линейных в некотором идемпотентном полукольце векторных уравнений

$$\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1),$$

где $A(k)$ — случайная матрица, $\boldsymbol{x}(k)$ — вектор состояний системы, при условии, что задан вектор начальных состояний $\boldsymbol{x}(0)$. Примеры практических задач и связанных с ними моделей имеются в работах [63, 1, 55, 71, 72, 73, 77]. В частности, указанные модели оказываются весьма удобным инструментом при описании и исследовании некоторых классов систем и сетей с очередями [85, 87, 20].

Одной из важных характеристик таких систем является средняя скорость роста вектора состояний $\boldsymbol{x}(k)$, которая в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ определяется как величина

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k},$$

и часто называется обобщенной константой (показателем) Ляпунова [55, 78]. Например, при анализе систем с очередями значение λ имеет смысл среднего времени цикла обслуживания, а обратная ей величина определяет пропускную способность системы [21].

В случае детерминированных систем задача нахождения средней скорости роста λ была решена в работах И. В. Романовского [48, 49] (см. также [42, 23, 38]). В то же время для стохастических систем, для которых матрица $A(k)$ является случайной, точное определение значения λ обычно оказывается достаточно сложной проблемой. Имеющиеся результаты в этой области ограничиваются частными случаями систем с матрицей малой размерности, элементы которой независимы и имеют экспоненциальное распределение вероятностей [99, 78, 29, 30, 32].

В этой главе рассматривается задача нахождения средней скорости роста вектора состояний для систем с матрицами специального вида. Предложен метод вычисления показателя Ляпунова на основе некоторого подходящего разложения матрицы системы. Представленные результаты опираются на работы [22, 25, 26, 33].

Вначале исследуются свойства математического ожидания, связанные со скалярными и матричными операциями в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$. Найдены общие условия существования предела, который определяет величину средней скорости роста. Показано, как средняя скорость роста может быть вычислена в случае диагональной и изометрической матрицы, а также матрицы единичного ранга.

Рассматривается динамическая система с треугольной случайной матрицей. В качестве вспомогательных результатов получено алгебраическое неравенство для нормы произведения треугольных матриц, а также ряд неравенств для математического ожидания максимума сумм случайных величин. На основе применения этих результатов показано, что при достаточно общих условиях средняя скорость роста вектора состояний системы определяется только средними значениями диагональных элементов матрицы. При этом требуется, чтобы случайные элементы матрицы имели распределения вероятностей с ограниченным средним и дисперсией, однако их независимость не является необходимой.

В заключение предложен метод решения задачи определения показателя Ляпунова на основе некоторого разложения матрицы системы на множители и показано, как этот метод может быть применен в случае матрицы системы неполного ранга.

6.2. Свойства математического ожидания

Рассмотрим свойства математического ожидания, связанные с операциями полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$. Заметим, что эти свойства будут справедливы и для полукольца $\mathbb{R}_{\min,+}$.

Ниже будем предполагать, что все рассматриваемые случайные величины заданы на некотором общем вероятностном пространстве и для них существует математическое ожидание.

Предложение 6.1. Пусть ξ и η — произвольные случайные величины. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\mathsf{E}(\xi \oplus \eta) \geq \mathsf{E}\xi \oplus \mathsf{E}\eta, \tag{6.1}$$

$$\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta. \tag{6.2}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из неравенств $\xi \oplus \eta \geq \xi$ и $\xi \oplus \eta \geq \eta$. Равенство (6.2) очевидно. $\square$

Для выяснения дальнейших свойств математического ожидания потребуется теорема Фубини (о повторных интегралах) в следующей форме [5].

Теорема 6.1. Пусть ξ и η — независимые скалярные или векторные случайные величины, $g(x, y)$ — борелевская функция.

Тогда, если $\mathsf{E}g(\xi, \eta)$ конечно, то

$$\mathsf{E}g(\xi, \eta) = \mathsf{E}[\mathsf{E}g(x, \eta)|_{x=\xi}].$$

Предложение 6.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Тогда справедливо неравенство

$$\mathsf{E}(\xi \oplus \eta) \geq \mathsf{E}(\xi \oplus \mathsf{E}\eta). \tag{6.3}$$

Доказательство. Заметим, что функция $g(x, y) = x \oplus y$ удовлетворяет условиям теоремы Фубини. Применяя неравенство (6.1), имеем

$$\mathsf{E}(\xi \oplus \eta) = \mathsf{E}[\mathsf{E}(x \oplus \eta)|_{\xi=x}] \geq \mathsf{E}[(x \oplus \mathsf{E}\eta)|_{\xi=x}] = \mathsf{E}(\xi \oplus \mathsf{E}\eta). \quad \square$$

Предложение 6.3. Пусть $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ — независимые случайные векторы. Тогда справедливо неравенство

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\eta}) \geq \mathsf{E}(\boldsymbol{\xi}^T \mathsf{E}\boldsymbol{\eta}). \tag{6.4}$$

Доказательство. Проверим выполнение неравенства (6.4) для векторов $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T$. Случай векторов произвольной размерности рассматривается аналогично.

Ясно, что $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$ — борелевская функция. Тогда, применяя (6.1), получим

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\eta}) = \mathsf{E}(\xi_1\eta_1 \oplus \xi_2\eta_2) = \\
&= \mathsf{E}[\mathsf{E}(x_1\eta_1 \oplus x_2\eta_2)|_{x_1=\xi_1, x_2=\xi_2}] \geq \mathsf{E}[(x_1\mathsf{E}\eta_1 \oplus x_2\mathsf{E}\eta_2)|_{x_1=\xi_1, x_2=\xi_2}] = \\
&\qquad = \mathsf{E}(\xi_1\mathsf{E}\eta_1 \oplus \xi_2\mathsf{E}\eta_2) = \mathsf{E}(\boldsymbol{\xi}^T \mathsf{E}\boldsymbol{\eta}). \quad \square
\end{aligned}$$

Рассмотрим случайную матрицу A. Обозначим через $\mathsf{E}A$ матрицу, полученную в результате вычисления математического ожидания каждого элемента матрицы A при условии, что $\mathsf{E}\mathbb{0} = \mathbb{0}$.

Предложение 6.4. Пусть A и B — случайные матрицы подходящего размера. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(A \oplus B) \geq \mathsf{E}A \oplus \mathsf{E}B, \\
&\mathsf{E}\|A\| \geq \|\mathsf{E}A\|, \\
&\mathsf{E}AB \geq \mathsf{E}A\mathsf{E}B.
\end{aligned}$$

Доказательство. Следует из свойств (6.1) и (6.2). $\square$

Предложение 6.5. Пусть A и B — независимые случайные матрицы подходящего размера.

Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(A \oplus B) \geq \mathsf{E}(A \oplus \mathsf{E}B), \\
&\mathsf{E}AB \geq \mathsf{E}(A\mathsf{E}B), \\
&\mathsf{E}\|AB\| \geq \mathsf{E}\|A\mathsf{E}B\|.
\end{aligned}$$

Доказательство. Следует из (6.3) и (6.4). $\square$

6.3. Стохастические динамические системы

Пусть $A(k) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ — случайная матрица, $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{X}^n$ — вектор состояний, $k = 1, 2, \ldots$ Ниже в этой главе будем рассматривать систему, динамика которой описывается уравнением

$$\boldsymbol{x}(k) = A^T(k)\boldsymbol{x}(k-1).$$

Представление уравнения в форме с транспонированной матрицей имеет целью упрощение дальнейших выкладок. В частности, запись уравнения в такой форме позволяет рассматривать произведения матриц $A(1),\ldots,A(k)$ в естественном порядке.

Введем обозначение

$$A_k = A(1)\cdots A(k).$$

Тогда из динамического уравнения путем итераций нетрудно получить выражение $\boldsymbol{x}(k) = A_k^T \boldsymbol{x}(0)$.

Будем предполагать, что последовательность $\{A(k)|k\geq 1\}$ состоит из независимых и одинаково распределенных случайных матриц, а также, что существует конечное математическое ожидание $\mathsf{E}\|A_1\|$. В то же время, при каждом фиксированном k независимость элементов матрицы $A(k)$ не предполагается.

Заметим, что далее вместо требования независимости и одинакового распределения случайных матриц $A(k)$ для справедливости многих утверждений будет достаточно выполнения условия стационарности (в узком смысле) последовательности $\{A(k)|k\geq 1\}$.

6.3.1. Показатель Ляпунова. Введем показатель Ляпунова системы как среднюю скорость роста вектора состояний, которая в полукольцах $\mathbb{R}_{\max,+}$ и $\mathbb{R}_{\min,+}$ определяется как предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k}$$

при условии, что этот предел существует.

В полукольцах $\mathbb{R}_{\max,\times}$ и $\mathbb{R}_{\min,\times}$ рассматривается предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \log\|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k}.$$

Далее при изучении средней скорости роста вектора состояний системы в качестве основного полукольца $\mathbb{X}$ будем рассматривать $\mathbb{R}_{\max,+}$. В силу изоморфизма между полукольцами $\mathbb{R}_{\max,+}$, $\mathbb{R}_{\min,+}$, $\mathbb{R}_{\max,\times}$ и $\mathbb{R}_{\max,\times}$, результаты, полученные для $\mathbb{R}_{\max,+}$, могут, как правило, быть распространены на остальные полукольца.

Будем предполагать, что координаты начального вектора $\boldsymbol{x}(0)$ с вероятностью 1 (с в. 1) ограничены. Тогда

$$c_1\mathbb{1} \leq \boldsymbol{x}(0) \leq c_2\mathbb{1} \quad \text{с в. } 1,$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы, $\mathbb{1} = (\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})^T$.

Ясно, что при таком условии выполняется неравенство

$$c_1\|A_k\| \le \|\boldsymbol{x}(k)\| \le c_2\|A_k\|,$$

откуда следует, что среднюю скорость роста λ вектора состояний можно определить так

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|A_k\|^{1/k}. \tag{6.5}$$

6.3.2. Условия существования предела. Общие условия существования предела (6.5) дает применение эргодической теоремы из работы [79]. Заметим, что в формулировке этой теоремы, которая представлена ниже, знаки арифметических операций имеют обычный смысл.

Теорема 6.2 (Кингман)**.** Пусть $\{\zeta_{lm}|l < m\}$ — семейство случайных величин, которое при всех $l < k < m$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\zeta_{lm} \le \zeta_{lk} + \zeta_{km}$ (субаддитивность);
2) совместные распределения $\{\zeta_{lm}|l < m\}$ и $\{\zeta_{l+1,m+1}|l < m\}$ совпадают (стационарность);
3) существует $\mathsf{E}\zeta_{0k} \ge -ck$, где c — некоторая постоянная (ограниченность).

Тогда существует константа λ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \zeta_{0k}/k = \lambda \quad \text{с в. 1},$$
$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\zeta_{0k}/k = \lambda.$$

Воспользуемся этой теоремой для исследования существования предела (6.5) в случае полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Теорема 6.3. Пусть $\{A(k)|k \ge 1\}$ — стационарная последовательность случайных матриц, $\mathsf{E}\|A_1\| < \infty$ и $\varrho(\mathsf{E}A_1) > \mathbb{0}$.

Тогда существует конечное число λ такое, что

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k\|^{1/k} = \lambda \quad \text{с в. 1},$$
$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\|A_k\|^{1/k} = \lambda.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство $\{\zeta_{lm}|l < m\}$ случайных величин
$$\zeta_{lm} = \|A(l+1)A(l+2)\cdots A(m)\|$$
и заметим, что имеет место равенство $\zeta_{0k} = \|A_k\|$.

Проверим выполнение для этого семейства условий теоремы 6.2.

Субаддитивность семейства следует из неравенства
$$\|A(l+1)\cdots A(m)\| \leq \|A(l+1)\cdots A(k)\|\|A(k+1)\cdots A(m)\|.$$

Очевидно, что семейство обладает свойством стационарности.

Из условия $\mathsf{E}\|A_1\| < \infty$ следует, что $\mathsf{E}\|A_k\| < \infty$. Кроме того, в силу условия $\varrho(\mathsf{E}A_1) > \mathbb{0} = -\infty$ и соотношений
$$\mathsf{E}\|A_k\| = \mathsf{E}\|A(1)\cdots A(k)\| \geq \|(\mathsf{E}A_1)^k\| \geq \varrho^k(\mathsf{E}A_1),$$
рассматриваемое семейство обладает свойством ограниченности.

Применяя теорему 6.2, приходим к требуемому результату. $\square$

Рассмотрим случай, когда матрицы $A(k)$ при всех k независимы и одинаково распределены. Учитывая, что при таких условиях обеспечивается стационарность последовательности $\{A(k)|k \geq 1\}$, этот случай сводится к тому, который рассматривается в теореме.

6.4. Вычисление показателя Ляпунова

Приведем примеры нахождения средней скорости роста вектора состояний (показателя Ляпунова) для стохастических динамических систем с матрицами некоторых частных видов [93, 21, 22, 25]. Заметим, что для всех рассматриваемых систем условия теоремы 6.3 предполагаются выполненными.

6.4.1. Системы с диагональной матрицей. Предположим, что $A(k) = \mathrm{diag}(d_1(k), \ldots, d_n(k))$ — диагональная матрица для всех

$k = 1, 2, \ldots$ Нетрудно проверить, что

$$A_k = \bigotimes_{j=1}^{k} A(j) = \operatorname{diag}\left(\bigotimes_{j=1}^{k} d_1(j), \ldots, \bigotimes_{j=1}^{k} d_n(j)\right),$$

$$\|A_k\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigotimes_{j=1}^{k} d_i(j).$$

Учитывая непрерывность операции $\oplus$, имеем

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|A_k\|^{1/k} = \bigoplus_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} \left(\bigotimes_{j=1}^{k} d_i(j)\right)^{1/k}.$$

Запишем выражение для предела справа в обычных обозначениях. Применяя теорему 6.2, для каждого $i = 1, \ldots, n$ получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} d_i(j) = \mathsf{E} d_i(1) \quad \text{с в. 1},$$

откуда следует, что

$$\lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{E} d_i(1) = \operatorname{tr}(\mathsf{E} A_1).$$

6.4.2. Системы с матрицей подобия. Пусть матрица $A(k)$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ является матрицей подобия. Тогда

$$\|A_k\| = \|A(1)\| \cdots \|A(k)\|.$$

Вычисляя математическое ожидание, имеем $\mathsf{E}\|A_k\|^{1/k} = \mathsf{E}\|A_1\|$, откуда следует

$$\lambda = \mathsf{E}\|A_1\|.$$

6.4.3. Системы с матрицей ранга 1. Предположим, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ найдутся векторы $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$ такие, что

$$A(k) = \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k).$$

В этом случае имеем

$$A_k = \boldsymbol{u}(1) \left(\bigotimes_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{v}^T(j)\boldsymbol{u}(j+1) \right) \boldsymbol{v}^T(k),$$

$$\|A_k\| = \left(\bigotimes_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{v}^T(j)\boldsymbol{u}(j+1) \right) \|\boldsymbol{u}(1)\|\|\boldsymbol{v}(k)\|.$$

Переходя к математическому ожиданию и вычисляя предел последовательности $\mathsf{E}\|A_k\|^{1/k}$ при $k \to \infty$, окончательно получим

$$\lambda = \mathsf{E}[\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2)].$$

6.5. Системы с треугольной матрицей

Пусть матрица системы $A(k)$ является треугольной. Случай системы с треугольной матрицей можно рассматривать как обобщение случая с диагональной матрицей. Однако задача нахождения величины показателя Ляпунова в общем виде для системы с треугольной матрицей оказывается более сложной.

Для треугольных матриц специального вида, которые появляются при анализе многофазных систем и ациклических сетей с очередями и синхронизацией, эта задача решалась в работах [93, 21].

Для произвольной треугольной матрицы ниже будет представлен результат [25], который опирается на некоторое новое неравенство для произведений треугольных матриц в идемпотентной алгебре в сочетании с классическими оценками для средних значений сумм максимумов независимых случайных величин.

Заметим, что любую треугольную матрицу можно представить в виде суммы диагональной и нильпотентной матрицы. Поэтому будем предполагать, что для матрицы системы выполняется

$$A(k) = D(k) \oplus T(k),$$

где при всех $k = 1, 2, \ldots$ матрицы $D(k)$ являются диагональными, а матрицы $T(k)$ имеют общий носитель и являются нильпотентными с индексом $r + 1$. Будем использовать обозначения

$$A_k = A(1) \cdots A(k), \qquad D_k = D(1) \cdots D(k).$$

6.5.1. Вспомогательное неравенство. Построим диагональную матрицу

$$D(l,m)=\begin{cases} D(l+1)\cdots D(m), & \text{если } m>l,\\ I, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и обозначим ее диагональные элементы через $d_i(l,m)$, $i=1,\ldots,n$.

Лемма 6.1. Выполняется неравенство

$$\|A_k\| \leq \left(\bigoplus_{l=1}^{k}\|T(l)\|\oplus\mathbb{1}\right)^{r}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}\bigoplus_{0\leq l\leq m\leq k} d_i(l,m)\right)^{r+1}. \qquad (6.6)$$

Доказательство. Матрицу $A_k=A(1)\cdots A(k)$ можно записать в виде

$$A_k=\bigoplus_{m=0}^{r}\bigoplus_{0=l_0<l_1<\cdots<l_{m+1}=k+1} D(l_0,l_1-1)\bigotimes_{i=1}^{m}T(l_i)D(l_i,l_{i+1}-1),$$

откуда следует

$$\|A_k\|=$$
$$=\bigoplus_{m=0}^{r}\bigoplus_{0=l_0<l_1<\cdots<l_{m+1}=k+1}\left\|D(l_0,l_1-1)\bigotimes_{i=1}^{m}T(l_i)D(l_i,l_{i+1}-1)\right\|.$$

Для любого фиксированного $m=0,1,\ldots,r$ последовательно получим

$$\bigoplus_{0=l_0<l_1<\cdots<l_{m+1}=k+1}\left\|D(l_0,l_1-1)\bigotimes_{i=1}^{m}T(l_i)D(l_i,l_{i+1}-1)\right\|\leq$$
$$\leq\bigoplus_{0=l_0<l_1<\cdots<l_{m+1}=k+1}\|D(l_0,l_1-1)\|\bigotimes_{i=1}^{m}\|T(l_i)\|\|D(l_i,l_{i+1}-1)\|\leq$$
$$\leq\left(\bigoplus_{1\leq l_1<\cdots<l_m\leq k}\bigotimes_{i=1}^{m}\|T(l_i)\|\right)\otimes$$
$$\otimes\left(\bigoplus_{0=l_0<l_1<\cdots<l_{m+1}=k+1}\bigotimes_{i=0}^{m}\|D(l_i,l_{i+1}-1)\|\right).$$

Теперь заметим, что

$$\bigoplus_{1\le l_1<\dots<l_m\le k} \bigotimes_{i=1}^{m} \|T(l_i)\| \le \bigotimes_{i=1}^{m} \bigoplus_{1\le l_1<\dots<l_m\le k} \|T(l_i)\| = \left(\bigoplus_{l=1}^{k} \|T(l)\|\right)^m .$$

Кроме того, выполняются неравенства

$$\bigoplus_{0=l_0<l_1<\dots<l_{m+1}=k+1} \bigotimes_{i=0}^{m} \|D(l_i, l_{i+1}-1)\| \le$$

$$\le \bigotimes_{i=0}^{m} \bigoplus_{0=l_0<l_1<\dots<l_{m+1}=k+1} \|D(l_i, l_{i+1}-1)\| \le$$

$$\le \left(\bigoplus_{0\le s\le t\le k} \|D(s,t)\|\right)^{m+1} .$$

Учитывая, что для любого $i=1,\dots,n$, справедливо равенство

$$\bigoplus_{0\le s\le t\le k} d_i(s,t) = \mathbb{1} \oplus \bigoplus_{0\le s<t\le k} d_i(s,t),$$

имеем

$$\bigoplus_{0\le s\le t\le k} \|D(s,t)\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{0\le s\le t\le k} d_i(s,t) \le \bigotimes_{i=1}^{n} \bigoplus_{0\le s\le t\le k} d_i(s,t).$$

Следовательно, выполняются неравенства

$$\|A_k\| \le \bigoplus_{m=0}^{r} \left(\bigoplus_{l=1}^{k} \|T(l)\|\right)^m \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \bigoplus_{0\le s\le t\le k} d_i(s,t)\right)^{m+1} \le$$

$$\le \left(\bigoplus_{l=1}^{k} \|T(l)\| \oplus \mathbb{1}\right)^r \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \bigoplus_{0\le l\le m\le k} d_i(l,m)\right)^{r+1} . \quad \square$$

6.5.2. Максимумы сумм случайных величин. Рассмотрим ряд неравенств, которые будут затем использованы при анализе систем с треугольной матрицей. Будем предполагать, что $\xi_1, \ldots, \xi_k$ обозначают независимые случайные величины. Заметим, что в формулировках результатов и выкладках знаки операций и отношений имеют обычный смысл.

Сначала представим классический результат из работы [96], который дает верхнюю границу для среднего значения максимума сумм

$$\zeta_i = \xi_1 + \cdots + \xi_i$$

независимых случайных величин с нулевым средним.

Лемма 6.2 (Марцинкевич)**.** Если $\mathsf{E}\xi_i = 0$ и $\mathsf{E}|\xi_i|^p < \infty$ для некоторого $p > 1$ при каждом $i = 1, \ldots, k$, то

$$\mathsf{E}\left(\max_{1 \le i \le k} |\zeta_i|\right)^p \le 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}|\zeta_k|^p.$$

Следующее неравенство было получено в [57]. Заметим, что оно остается справедливым и при более слабых условиях, чем независимость случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_k$.

Лемма 6.3 (Бар и Эссеен)**.** Если $\mathsf{E}\xi_i = 0$ и $\mathsf{E}|\xi_i|^p < \infty$ для некоторого p, $1 \le p \le 2$, при каждом $i = 1, \ldots, k$, то

$$\mathsf{E}\,|\zeta_k|^p \le \left(2 - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}|\xi_i|^p.$$

Опираясь на леммы 6.2 и 6.3, получим следующий результат.

Лемма 6.4. Если $\mathsf{E}\xi_i = 0$ и $\mathsf{E}\xi_i^2 < \infty$ при всех $i = 1, \ldots, k$, то

$$\mathsf{E}\max_{1 \le i \le k} |\zeta_i| \le 2\sqrt{\frac{2(2k-1)}{k}} \left(\sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\xi_i^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Применяя лемму 6.2 при $p = 2$, а также лемму 6.3, имеем

$$\left(\mathsf{E}\max_{1 \le i \le k} |\zeta_i|\right)^2 \le \mathsf{E}\left(\max_{1 \le i \le k} |\zeta_i|\right)^2 \le 8\mathsf{E}\zeta_k^2 \le 8\left(2 - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\xi_i^2,$$

откуда следует требуемое неравенство. □

Теперь предположим, что $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины. Заметим, что тогда неравенство леммы 6.4 принимает вид

$$\mathsf{E} \max_{1 \le i \le k} |\zeta_i| \le 2\sqrt{2(2k-1)\mathsf{E}\xi_1^2}.$$

Введем обозначение

$$\zeta_{lm} = \xi_{l+1} + \xi_{l+2} + \cdots + \xi_m$$

при условии $0 \le l < m \le k$ и рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 6.5. Если $\mathsf{E}\xi_1 = 0$ и $\mathsf{D}\xi_1 < \infty$, то

$$\mathsf{E} \max_{0 \le l < m \le k} |\zeta_{lm}| \le 4\sqrt{2(2k-1)\mathsf{E}\xi_1^2}.$$

Доказательство. Учитывая, что $|\zeta_{lm}| = |\zeta_m - \zeta_l| \le |\zeta_m| + |\zeta_l|$ при условии $\zeta_0 = 0$, имеем

$$\max_{0 \le l < m \le k} |\zeta_{lm}| \le \max_{0 \le l < m \le k} |\zeta_l| + \max_{0 \le l < m \le k} |\zeta_m| \le \max_{1 \le l \le k} |\zeta_l| + \max_{1 \le m \le k} |\zeta_m|.$$

Применяя лемму (6.4), получим

$$\mathsf{E} \max_{0 \le l < m \le k} |\zeta_{lm}| \le \mathsf{E} \max_{1 \le l \le k} |\zeta_l| + \mathsf{E} \max_{1 \le m \le k} |\zeta_m| \le 4\sqrt{2(2k-1)\mathsf{E}\xi_1^2}. \quad \square$$

Наконец, следующий результат, полученный в [68, 75], дает верхнюю границу для математического ожидания максимума независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Лемма 6.6 (Гумбель, Хартли и Дэвид)**.** Если $\mathsf{E}\xi_1 < \infty$ и $\mathsf{D}\xi_1 < \infty$, то

$$\mathsf{E} \max_{1 \le i \le k} \xi_i \le \mathsf{E}\xi_1 + \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\mathsf{D}\xi_1}.$$

6.5.3. Определение средней скорости роста. Пусть сначала все диагональные элементы матрицы A_1 имеют средние значения, равные $\mathbb{1} = 0$. Другими словами, положим $\mathsf{E}D_1 = I$.

Лемма 6.7. Если $\mathsf{E}D_1 = I$, то выполняется равенство $\lambda = 0$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_k = \|A_k\|$. В силу неравенства $A(k) \geq D(k)$, которое справедливо для всех k, имеем

$$\mathsf{E}\alpha_k = \mathsf{E}\|A_k\| \geq \mathsf{E}\|D_k\| \geq \|\mathsf{E}D(1)\cdots\mathsf{E}D(k)\| = \|I\| = \mathbb{1} = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\|A_k\|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathsf{E}\alpha_k \geq 0.$$

После перехода к математическому ожиданию в неравенстве (6.6) имеем

$$\mathsf{E}\|A_k\| \leq \left(\mathsf{E}\bigoplus_{l=1}^{k}(\|T(l)\| \oplus \mathbb{1})\right)^r \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathsf{E} \bigoplus_{0\leq l\leq m\leq k} d_i(l,m)\right)^{r+1}.$$

С использованием знаков обычных арифметических операций последнее неравенство принимает вид

$$\mathsf{E}\alpha_k \leq r\mathsf{E}\max_{1\leq l\leq k}\tau_l + (r+1)\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\max_{0\leq l\leq m\leq k}\delta_{lm}^{(i)},$$

где

$$\tau_l = \|T(l)\| \oplus \mathbb{1}, \qquad \delta_{lm}^{(i)} = d_i(l,m).$$

Опираясь на леммы 6.6 и 6.5, заключаем, что

$$\mathsf{E}\max_{1\leq l\leq k}\tau_l \leq c_1(k) \sim O(\sqrt{k}), \qquad \mathsf{E}\max_{0\leq l\leq m\leq k}\delta_{lm}^{(i)} \leq c_2(k) \sim O(\sqrt{k}),$$

откуда следует, что

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\|A_k\|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathsf{E}\alpha_k \leq 0.$$

Учитывая противоположное неравенство, приходим к требуемому результату. □

Теперь рассмотрим общий случай треугольной матрицы.

Теорема 6.4. Для системы с треугольной матрицей A_1 выполняется

$$\lambda = \mathrm{tr}(\mathsf{E}A_1).$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq \mathsf{E}\|D(1)\cdots D(k)\| = \|(\mathsf{E}D_1)^k\|,$$

в силу теоремы 5.1 имеем неравенство $\lambda \geq \|\mathsf{E}D_1\| = \operatorname{tr}(\mathsf{E}A_1)$.

Проверим противоположное неравенство. Для всех $k = 1, 2, \ldots,$ определим матрицы

$$D'(k) = (\mathsf{E}D_1)^{-1}D(k), \qquad T'(k) = (\mathsf{E}D_1)^{-1}T(k),$$

а также

$$A'(k) = D'(k) \oplus T'(k).$$

Положим $A'_k = A'(1)\cdots A'(k)$ и $\lambda' = \lim_{k\to\infty}\|A'_k\|^{1/k}$. По лемме 6.7 выполняется $\lambda' = 0 = \mathbb{1}$.

Теперь заметим, что справедливо неравенство

$$A_k = (\mathsf{E}D_1)A'(1)\cdots(\mathsf{E}D_1)A'(k) \leq \|\mathsf{E}D_1\|^k A'_k,$$

из которого следует неравенство $\|A_k\|^{1/k} \leq \|\mathsf{E}D_1\|\|A'_k\|^{1/k}$.

Переходя к пределу в последнем неравенстве, имеем

$$\lambda \leq \|\mathsf{E}D_1\|\lambda' = \|\mathsf{E}D_1\| = \operatorname{tr}(\mathsf{E}A_1). \quad \square$$

6.6. Метод разложения матрицы системы

В случае, когда матрица системы относится к одному из видов, рассмотренных выше, задача вычисления показателя Ляпунова не представляет особого труда. Если матрица имеет иной вид, для решения задачи может быть использован следующий прием [33].

Предположим, что имеется представление матрицы $A(k)$ в виде произведения (разложения)

$$A(k) = B(k)C(k),$$

где $B(k)$ и $C(k)$ — некоторые независимые матрицы.

Если решение задачи для системы с матрицей

$$A'(k) = C(k)B(k+1)$$

известно, то обычно его можно взять в качестве решения исходной задачи. В противном случае можно попытаться продолжить процедуру разложения, применяя ее теперь к матрице $A'(k)$.

Если матрица имеет единичный ранг, то разложение матрицы $A(k)$ всегда существует и принимает вид $A(k) = \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k)$. Заметим, что при этом для решения задачи вычисления показателя Ляпунова независимость векторов $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$ не требуется.

6.6.1. Система с матрицей неполного ранга. Рассмотрим произвольную матрицу A порядка n. Предположим, что ранг матрицы $r < n$. Тогда матрица A может быть представлена в виде ее скелетного разложения (см., например, [10])

$$A = BC.$$

Будем называть такое разложение обратным треугольным скелетным разложением, если матрица CB является треугольной.

Рассмотрим стохастическую динамическую систему и предположим, что при всех $k = 1, 2, \ldots,$ для матрицы системы $A(k)$ существует обратное треугольное скелетное разложение

$$A(k) = B(k)C(k)$$

с независимыми сомножителями $B(k)$ и $C(k)$.

Имеет место следующий результат [33].

Теорема 6.5. Для системы с матрицей $A(k)$, которая допускает обратное треугольное скелетное разложение с независимыми сомножителями, выполняется

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

Доказательство. Рассмотрим произведение матриц

$$A_k = \bigotimes_{j=1}^{k} B(j)C(j) = B(1)\left(\bigotimes_{j=1}^{k-1} C(j)B(j+1)\right)C(k).$$

Сначала заметим, что

$$\|A_k\| \geq \operatorname{tr} A_k = \operatorname{tr}\left(C(k)B(1)\bigotimes_{j=1}^{k-1} C(j)B(j+1)\right),$$

откуда следует

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq \mathsf{E}\,\mathrm{tr}\,A_k \geq \mathrm{tr}\left(\mathsf{E}[C(1)B(1)]^k\right).$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$ и применим теорему 5.1. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\|A_k\|^{1/k} \geq \lim_{k\to\infty} \mathrm{tr}^{1/k}\left(\mathsf{E}[C(1)B(1)]^k\right) = \varrho(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

Учитывая треугольную форму матрицы $C(1)B(1)$, заключаем, что

$$\lambda \geq \mathrm{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

С другой стороны, справедливо неравенство

$$\|A_k\| \leq \left\|\bigotimes_{j=1}^{k-1} C(j)B(j+1)\right\| \|B(1)\|\|C(k)\|.$$

Заметим, что матрицы $C(j)B(j+1)$ при всех $j = 1,\ldots,k-1$, имеют треугольную форму и независимы. Переходя к пределу и применяя теорему 6.4, имеем

$$\lambda \leq \mathrm{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

Учитывая противоположное неравенство, получаем требуемый результат. □

Глава 7

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

7.1. Введение

Рассмотрим стохастическую динамическую систему, эволюция которой описывается в некотором идемпотентном полумодуле векторным уравнением

$$\boldsymbol{z}(k) = A(k)\boldsymbol{z}(k-1),$$

где $A(k)$ — случайная матрица, $\boldsymbol{z}(k)$ — вектор состояний системы.

Для некоторых моделей таких систем средняя скорость роста вектора состояний (показатель Ляпунова) может быть определена на основе теоремы 6.3, непосредственно исходя из равенства

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\|\boldsymbol{z}(k)\|^{1/k},$$

путем нахождения некоторого предельного распределения и вычисления соответствующего математического ожидания.

Известные результаты в этой области включают решения, полученные для полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$ в работах [99, 78] преимущественно для систем с матрицей невысокого (как правило, второго) порядка, случайные элементы которой независимы и имеют либо непрерывное, либо дискретное общее распределение вероятностей.

В работе [99] изучена система с матрицей второго порядка, элементы которой независимы и имеют экспоненциальное распределение с единичным средним. Решение сводится к построению последовательности одномерных распределений для разности компонент вектора состояний системы с последующим решением интегрального уравнения для нахождения предельной плотности, которая затем используется для получения результата в виде $\lambda = 407/228$.

Подход, предложенный в работе [78], опирается на построение последовательности двумерных распределений вероятностей вектора состояний и ее анализ при помощи преобразования Лапласа соответствующих функций распределения. Рассматривается система второго порядка с матрицей, диагональные элементы которой имеют экспоненциальное распределение с параметром μ, а недиагональные элементы — экспоненциальное распределение с параметром ν. Показано, что для этой системы

$$\lambda = P(\mu, \nu)/Q(\mu, \nu),$$

где

$$\begin{aligned}
P(\mu, \nu) = 160\mu^{10} &+ 1776\mu^9\nu + 8220\mu^8\nu^2 + 21378\mu^7\nu^3 + 35595\mu^6\nu^4 + \\
&+ 41566\mu^5\nu^5 + 35595\mu^4\nu^6 + 21378\mu^3\nu^7 + 8220\mu^2\nu^8 + \\
&+ 1776\mu\nu^9 + 160\nu^{10}, \\
Q(\mu, \nu) = 16\mu\nu(\mu+\nu)&(8\mu^8 + 80\mu^7\nu + 321\mu^6\nu^2 + 690\mu^5\nu^3 + 880\mu^4\nu^4 + \\
&+ 690\mu^3\nu^5 + 321\mu^2\nu^6 + 80\mu\nu^7 + 8\nu^8).
\end{aligned}$$

В частности, для системы с симметричной матрицей, у которой диагональные элементы независимы и имеют экспоненциальное распределение с единичным средним, а недиагональные элементы равны нулю, выполняется $\lambda = 5/4$.

В работе [99] изучается система с матрицей $A(k)$ порядка n, элементы которой $a_{ij}(k)$ имеют дискретное равномерное распределение

$$\mathsf{P}\{a_{ij}(k) = l/m\} = 1/(m+1), \qquad l = 0, 1, \ldots, m.$$

Решение задачи основано на представлении эволюции разности между элементами вектора состояний системы в виде некоторой цепи Маркова. При вычислении средней скорости роста используются значения стационарных вероятностей состояний цепи. Получены результаты для $n \leq 3$ в виде

$$\begin{aligned}
&n = 2, \quad m = 1, &&\lambda = 6/7 \approx 0{,}857, \\
&n = 2, \quad m = 2, &&\lambda = 0{,}803, \\
&n = 2, \quad m \to \infty, &&\lambda \to 0{,}719, \\
&n = 3, \quad m = 1, &&\lambda = 0{,}979.
\end{aligned}$$

Дальнейшее развитие этого подхода в работе [78] позволило найти среднюю скорость роста вектора состояний для системы с матрицей второго порядка, элементы которой имеют распределения Бернулли с различными параметрами. В частности, если все элементы матрицы имеют общее распределение Бернулли с параметром p, то

$$\lambda = 1 - \frac{(1+2p)(1-p)^4}{1-2p(1-p)(1-3p+p^2)}.$$

Кроме того, найдено решение для системы с матрицей, все элементы которой имеют общее геометрическое распределение с параметром p, в виде

$$\lambda = N(p)/D(p),$$

где

$$\begin{aligned}
N(p) = p(&4 + 18p + 50p^2 + 99p^3 + 175p^4 + 244p^5 + 289p^6 + 273p^7 + \\
&+ 218p^8 + 137p^9 + 77p^{10} + 32p^{11} + 11p^{12} + p^{13}), \\
D(p) = (&1-p)(1+p)(1+p+p^2)(1 + 6p + 8p^2 + 20p^3 + 25p^4 + \\
&+ 32p^5 + 25p^6 + 20p^7 + 8p^8 + 6p^9 + p^{10}).
\end{aligned}$$

Целью настоящей главы является решение задачи определения средней скорости роста вектора состояний для систем в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ с матрицами второго порядка, случайные элементы которых независимы и имеют экспоненциальные распределения с произвольными параметрами. Такие системы будем называть экспоненциальными системами с матрицей второго порядка или просто экспоненциальными системами второго порядка.

Изучаются частные случаи, когда некоторые элементы матрицы системы имеют экспоненциальные распределения, а другие — являются нулевыми константами, а также общий случай системы второго порядка. Указанные модели систем являются обобщениями моделей, изученных в [99, 78].

Сначала рассматриваются системы с матрицами, некоторые элементы которых не являются случайными. Используется подход, предложенный в [29, 34], который опирается на построение и анализ некоторой последовательности одномерных функций распределения. Величина показателя Ляпунова находится как математическое ожидание случайной величины, которая определяется предельным распределением этой последовательности.

Для решения задачи в общем случае предлагается алгебраический подход [30, 32] на основе построения некоторой последовательности плотностей одномерных распределений вероятностей и решения интегрального уравнения для нахождения соответствующей предельной плотности. При этом задача определения средней скорости роста вектора состояний системы сводится к ряду алгебраических вычислений, включая решение алгебраической системы уравнений и вычисление значения некоторого линейного функционала от полученного решения. Приведены примеры решения задачи в общем виде для двух частных случаев.

7.2. Экспоненциальные системы второго порядка

Рассмотрим систему, эволюция которой при всех $k = 1, 2, \ldots$ описывается векторным уравнением в полумодуле $\mathbb{R}^2_{\max,+}$

$$\boldsymbol{z}(k) = A(k)\boldsymbol{z}(k-1), \tag{7.1}$$

где

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторное уравнение можно представить в виде системы скалярных уравнений

$$\begin{aligned} x(k) &= \alpha_k x(k-1) \oplus \beta_k y(k-1), \\ y(k) &= \gamma_k x(k-1) \oplus \delta_k y(k-1); \end{aligned}$$

или с использованием обычных арифметических операций в виде

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1) + \alpha_k, y(k-1) + \beta_k), \\ y(k) &= \max(x(k-1) + \gamma_k, y(k-1) + \delta_k). \end{aligned}$$

Пусть каждая последовательность

$$\{\alpha_k | k \geq 1\}, \quad \{\beta_k | k \geq 1\}, \quad \{\gamma_k | k \geq 1\}, \quad \{\delta_k | k \geq 1\}$$

состоит из независимых случайных величин, которые имеют общее экспоненциальное распределение. Кроме того, случайные величины α_k, β_l, γ_m и δ_n являются независимыми при любых k, l, m и n.

Средняя (асимптотическая) скорость роста вектора состояний (показатель Ляпунова) системы определяется в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$ как предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{z}(k)\|^{1/k}$$

или с использованием обычных обозначений как предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max(x(k), y(k)).$$

Заметим, что элементы матрицы $A(k)$ неотрицательны и имеют конечные средние. Тогда, применяя теорему 6.3, нетрудно показать, что этот предел с вероятностью 1 существует и является конечным числом. При этом также выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} \max(x(k), y(k)) = \lambda.$$

7.3. Вычисление показателя Ляпунова

Для решения задачи вычисления λ применим замену переменных, предложенную в [99],

$$X(k) = x(k) - x(k-1), \qquad Y(k) = y(k) - x(k),$$

после которой уравнения системы приобретают вид

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)), \\ Y(k) &= \max(\gamma_k, \delta_k + Y(k-1)) - \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)). \end{aligned}$$

Заметим, что $x(k) = X(k) + \cdots + X(1)$. Теперь можно записать

$$\|\boldsymbol{z}(k)\| = \max(x(k), y(k)) = \max(0, Y(k)) + \sum_{i=1}^{k} X(i).$$

Нетрудно проверить, что

$$Y(k) = \max(\gamma_k, \delta_k + Y(k-1)) - \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)) \leq \gamma_k + \delta_k.$$

Обозначим функции распределения вероятностей величин α_k, β_k, γ_k и δ_k через

$$F_\alpha(t) = \max(0, 1 - e^{-\mu t}), \qquad F_\beta(t) = \max(0, 1 - e^{-\nu t}),$$
$$F_\gamma(t) = \max(0, 1 - e^{-\sigma t}), \qquad F_\delta(t) = \max(0, 1 - e^{-\tau t}),$$

а их функции плотности через f_α, f_β, f_γ и f_δ.

Введем функции распределения

$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{X(k) < t\}, \qquad \Psi_k(t) = \mathsf{P}\{Y(k) < t\}.$$

Соответствующие функции плотности обозначим через ϕ_k и ψ_k.

Функцию Φ_k можно представить в виде

$$\Phi_k(t) = F_\alpha(t) \int_0^\infty \Psi_{k-1}(t-u) f_\beta(u) du.$$

Предположим, что последовательность функций Ψ_k сходится при $k \to \infty$ к некоторой функции распределения Ψ. Тогда, применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, приходим к выводу, что последовательность Φ_k сходится к функции распределения некоторой случайной величины X

$$\Phi(t) = F_\alpha(t) \int_0^\infty \Psi(t-u) f_\beta(u) du. \tag{7.2}$$

Из сходимости распределений следует, что последовательность средних величин $\mathsf{E}X(k)$ сходится к $\mathsf{E}X$.

Наконец, учитывая, что $\mathsf{E}\max(0, Y(k)) \le \mathsf{E}(\gamma_k + \delta_k) < \infty$, имеем

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E}\max(x(k), y(k)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E}\max(0, Y(k)) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}X(i) = \mathsf{E}X.$$

7.4. Система с матрицей с нулями вне диагонали

Рассмотрим динамическую систему (7.1) с симметричной матрицей вида

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Скалярные уравнения системы с использованием обычных обозначений записываются в виде

$$
\begin{aligned}
x(k) &= \max(x(k-1)+\alpha_k, y(k-1)), \\
y(k) &= \max(x(k-1), y(k-1)+\delta_k).
\end{aligned}
$$

Заметим, что $\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{X(k) < t\} = F_\alpha(t)\Psi_k(t)$, а функция (7.2) принимает вид

$$
\Phi(t) = F_\alpha(t)\Psi(t).
$$

7.4.1. Уравнение для функций распределения. Применяя формулу полной вероятности, запишем функцию Ψ_k так

$$
\Psi_k(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \delta_k = v\} f_\alpha(u) f_\delta(v) du dv.
$$

Рассмотрим условную вероятность

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \delta_k = v\} = \\
&= \mathsf{P}\{\max(x(k-1), y(k-1)+v) - \max(x(k-1)+u, y(k-1)) < t\} = \\
&\qquad = \mathsf{P}\{\max(0, Y(k-1)+v) - \max(u, Y(k-1)) < t\}.
\end{aligned}
$$

Переходя от вероятности сложного события к вероятностям более простых событий, получим

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \delta_k = v\} = \\
&= 1 - \mathsf{P}\{u \le -t, Y(k-1) \le -t\} - \mathsf{P}\{u - v - Y(k-1) \le -t, v \ge t\} + \\
&\qquad + \mathsf{P}\{u \le -t, Y(k-1) \le -t, u - v - Y(k-1) \le -t, v \ge t\}.
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что выполняется равенство

$$
\mathsf{P}\{u \le -t, Y(k-1) \le -t\} = \begin{cases} \Psi_{k-1}(-t), & \text{если } u \le -t, \\ 0, & \text{если } u > -t; \end{cases}
$$

а также равенство

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{u - v - Y(k-1) \le -t, v \ge t\} = \\
&\qquad = \begin{cases} 1 - \Psi_{k-1}(u - v + t), & \text{если } v \ge t, \\ 0, & \text{если } v < t. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Кроме того,

$$\mathsf{P}\{u \le -t, Y(k-1) \le -t, u-v-Y(k-1) \le -t, v \ge t\} = \\ = \begin{cases} \Psi_{k-1}(-t) - \Psi_{k-1}(u-v+t), & \text{если } u \le -t,\ v \ge t, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Учитывая, что тогда

$$\mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \delta_k = v\} = \\ = \begin{cases} 1 - \Psi_{k-1}(-t), & \text{если } u \le -t,\ v < t, \\ 1, & \text{если } u > -t,\ v < t, \\ 0, & \text{если } u \le -t,\ v \ge t, \\ \Psi_{k-1}(u-v+t), & \text{если } u > -t,\ v \ge t, \end{cases}$$

приходим к рекуррентному уравнению

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) f_\alpha(u-t) f_\delta(v) du dv, & \text{если } t \le 0, \\ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) f_\alpha(u) f_\delta(v+t) du dv + F_\delta(t), & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

После подстановки выражений для показательного распределения и плотности уравнение можно представить в виде

$$\Psi_k(t) = \\ = \begin{cases} \mu\tau e^{\mu t} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) e^{-\mu u - \tau v} du dv, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - e^{-\tau t} \left(1 - \mu\tau \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-v) e^{-\mu u - \tau v} du dv \right), & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

7.4.2. Предельное распределение. Сначала проверим сходимость последовательности функций Ψ_k. Найдем функцию распределения Ψ_1. Учитывая условие $Y(0) = 0$, имеем

$$\Psi_1(t) = \mathsf{P}\{\delta_1 - \alpha_1 < t\} = \begin{cases} \frac{\tau}{\mu+\tau} e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - \frac{\mu}{\mu+\tau} e^{-\tau t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы найти Ψ_2, вычислим интеграл

$$\mu\tau \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_1(u-v)e^{-\mu u-\tau v}dudv = \frac{\tau^2(3\mu+\tau)}{(\mu+\tau)^3}.$$

Теперь получим

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} \frac{\tau^2(3\mu+\tau)}{(\mu+\tau)^3}e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - \frac{\mu^2(\mu+3\tau)}{(\mu+\tau)^3}e^{-\tau t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим разность

$$\Psi_2(t) - \Psi_1(t) = \begin{cases} (\tau-\mu)\frac{\tau\mu}{(\mu+\tau)^3}e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ (\tau-\mu)\frac{\tau\mu}{(\mu+\tau)^3}e^{-\tau t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Ясно, что при всех t справедливо неравенство $\Psi_2(t)-\Psi_1(t) < 0$, если $\tau < \mu$, или противоположное неравенство $\Psi_2(t) - \Psi_1(t) > 0$, если $\tau > \mu$. При $\tau = \mu$ функции Ψ_1 и Ψ_2 совпадают.

Допустим, что $\tau < \mu$. Тогда для всех $t \le 0$ выполняется

$$\Psi_{k+1}(t) - \Psi_k(t) = \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty (\Psi_k(u-v) - \Psi_{k-1}(u-v))f_\alpha(u-t)f_\delta(v)dudv,$$

откуда по индукции следует, что при любом $k \ge 1$ справедливо неравенство

$$\Psi_{k+1}(t) - \Psi_k(t) \le 0.$$

Аналогичным образом проверяется, что такое неравенство выполняется и при всех $t > 0$.

Учитывая, что $\Psi_k(t) \ge 0$ при всех t, заключаем, что последовательность $\Psi_k(t)$ при $k \to \infty$ сходится к некоторой функции $\Psi(t)$.

Применяя те же рассуждения, приходим к выводу, что последовательность функций сходится и при условии $\tau > \mu$.

Понятно, что при $\mu = \tau$ последовательность Ψ_k вообще не зависит от k.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в рекуррентном уравнении для Ψ_k, получим уравнение

$$\Psi(t) = \begin{cases} \mu\tau e^{\mu t} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi(u-v) e^{-\mu u - \tau v} du dv, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - e^{-\tau t} \left(1 - \mu\tau \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi(u-v) e^{-\mu u - \tau v} du dv \right), & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Исходя из формы уравнения, будем искать его решение в виде

$$\Psi(t) = \begin{cases} c_1 e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - c_2 e^{-\tau t}, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

где c_1, c_2 — некоторые коэффициенты такие, что $c_1 + c_2 = 1$.

Подставим это решение в уравнение. Сначала найдем интеграл

$$\mu\tau \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(u-v) e^{-\mu u - \tau v} du dv = \frac{\mu\tau}{(\mu+\tau)^2} c_1 - \frac{\mu\tau}{(\mu+\tau)^2} c_2 + \frac{\tau}{\mu+\tau}.$$

Имеем систему уравнений относительно c_1 и c_2

$$c_1 = \frac{\mu\tau}{(\mu+\tau)^2} c_1 - \frac{\mu\tau}{(\mu+\tau)^2} c_2 + \frac{\tau}{\mu+\tau},$$
$$c_1 + c_2 = 1.$$

Решая систему, получим

$$c_1 = \frac{\tau^2}{\mu^2+\tau^2}, \qquad c_2 = \frac{\mu^2}{\mu^2+\tau^2}.$$

Таким образом, предельная функция имеет вид

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{\tau^2}{\mu^2+\tau^2} e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - \frac{\mu^2}{\mu^2+\tau^2} e^{-\tau t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Ясно, что Ψ является функцией распределения некоторой случайной величины.

7.4.3. Вычисление средней скорости роста. В силу сходимости последовательности Ψ_k последовательность Φ_k также сходится к функции распределения

$$\Phi(t) = F_\alpha(t)\Psi(t) = (1 - e^{-\mu t})\left(1 - \frac{\mu^2}{\mu^2+\tau^2}e^{-\tau t}\right).$$

Функция плотности имеет вид

$$\phi(t) = \mu e^{-\mu t} + \frac{\mu^2\tau}{\mu^2+\tau^2}e^{-\tau t} - \frac{\mu^2(\mu+\tau)}{\mu^2+\tau^2}e^{-(\mu+\tau)t}.$$

Вычисление интеграла дает величину

$$\lambda = \int_0^\infty t\phi(t)dt = \frac{\mu^4+\mu^3\tau+\mu^2\tau^2+\mu\tau^3+\tau^4}{\mu\tau(\mu+\tau)(\mu^2+\tau^2)}.$$

Заметим, что при $\tau = \mu = 1$ имеем $\lambda = 5/4$, что соответствует результату, полученному в [78].

7.5. Система с матрицей с нулями на диагонали

Рассмотрим динамическую систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Скалярные уравнения системы в обычных обозначениях принимают вид

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1), y(k-1)+\beta_k),\\ y(k) &= \max(x(k-1)+\gamma_k, y(k-1)). \end{aligned}$$

После перехода к новым переменным $X(k)$ и $Y(k)$ получим уравнения

$$\begin{aligned} &X(k) = \max(0, Y(k-1)+\beta_k),\\ &Y(k) = \max(\gamma_k, Y(k-1)) - \max(0, Y(k-1)+\beta_k). \end{aligned}$$

Теперь нетрудно записать выражение для функции Φ_k, а затем — для предельной функции Φ в виде

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \Psi(t-u) f_\alpha(u) du.$$

Применяя формулу полной вероятности, запишем

$$\Psi_k(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathsf{P}\{Y(k) < t | \beta_k = u, \gamma_k = v\} f_\beta(u) f_\gamma(v) du dv.$$

Рассмотрим условную вероятность

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{Y(k) < t | \beta_k = u, \gamma_k = v\} = \\
&\qquad = \mathsf{P}\{\max(v, Y(k-1)) - \max(0, Y(k-1)+u) < t\} = \\
&\qquad\qquad = \begin{cases} \Psi_{k-1}(t), & \text{если } v < t,\ u \le -t, \\ 1, & \text{если } v < t,\ u > -t, \\ 0, & \text{если } v \ge t,\ u \le -t, \\ 1 - \Psi_{k-1}(v-u-t), & \text{если } v \ge t,\ u > -t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Подстановка в уравнение для Ψ_k и замена переменных приводит к рекуррентному уравнению

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} (1 - a_{k-1}) e^{\nu t}, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - a_{k-1} e^{-\sigma t}, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

где числа a_k определяются выражением

$$a_k = \nu\sigma \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_k(v-u) e^{-\nu u - \sigma v} du dv.$$

Ясно, что имеется взаимно однозначное соответствие между последовательностью функций Ψ_k и последовательностью неотрицательных чисел a_k, так как каждый шаг, сделанный при переходе от одной последовательности к другой, обратим.

Из двух последних равенств имеем

$$a_k = -\frac{1}{2} a_{k-1} + \frac{2\nu + \sigma}{2(\nu + \sigma)}.$$

Найденному рекуррентному соотношению соответствует некоторое отображение, заданное на множестве неотрицательных чисел, которое является сжатием. Следовательно, последовательность a_k сходится при $k \to \infty$ к неподвижной точке a отображения.

Переходя к пределу, получим уравнение для определения a, решение которого дает

$$a = \frac{2\nu + \sigma}{3(\nu + \sigma)}.$$

Последовательность функций Ψ_k тогда тоже сходится к некоторой функции, которая имеет вид

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{\nu+2\sigma}{3(\nu+\sigma)} e^{\nu t}, & \text{если } t \leq 0, \\ 1 - \frac{2\nu+\sigma}{3(\nu+\sigma)} e^{-\sigma t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Понятно, что Ψ является функцией распределения некоторой случайной величины.

Найдем функцию распределения Φ. Предположим сначала, что $\sigma \neq \nu$. После вычисления интеграла имеем

$$\Phi(t) = 1 - \frac{\nu - 4\sigma}{6(\nu - \sigma)} e^{-\nu t} - \frac{\nu(2\nu + \sigma)}{3(\nu^2 - \sigma^2)} e^{-\sigma t}.$$

Окончательно получим

$$\lambda = \int_0^\infty t d\Phi(t) = \frac{4\nu^2 + 7\nu\sigma + 4\sigma^2}{6\nu\sigma(\nu + \sigma)}.$$

Нетрудно проверить, что этот результат остается верным и в случае, когда $\sigma = \nu$.

7.6. Система с матрицей с нулевой строкой

Предположим, что матрица системы имеет вид

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем скалярные уравнения

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1) + \alpha_k, y(k-1) + \beta_k), \\ y(k) &= \max(x(k-1), y(k-1)), \end{aligned}$$

которые после замены переменных приобретают вид

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(\alpha_k, Y(k-1) + \beta_k), \\ Y(k) &= \max(0, Y(k-1)) - \max(\alpha_k, Y(k-1) + \beta_k). \end{aligned}$$

Учитывая, что $Y(k) \leq 0$ при всех k, имеем $Y(k) = -X(k)$. Следовательно, анализ системы уравнений можно свести к анализу уравнения

$$X(k) = \max(\alpha_k, \beta_k - X(k-1)).$$

Функция распределения $\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{X(k) < t\}$ имеет вид

$$\Phi_k(t) = (1 - e^{-\mu t})(1 - a_{k-1} e^{-\nu t})$$

при условии, что

$$a_k = \nu \int_0^\infty \Phi_k(u) e^{-\nu u} du.$$

Из двух последних соотношений имеем

$$a_k = -\frac{\mu}{2(\mu + 2\nu)} a_{k-1} + \frac{\mu}{\mu + \nu}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим уравнение для a, решением которого является

$$a = \frac{2\mu(\mu + 2\nu)}{(\mu + \nu)(3\mu + 4\nu)}.$$

Последовательность функций Φ_k сходится к функции

$$\Phi(t) = (1 - e^{-\mu t}) \left(1 - \frac{2\mu(\mu + 2\nu)}{(\mu + \nu)(3\mu + 4\nu)} e^{-\nu t} \right),$$

которая, очевидно, является функцией распределения некоторой случайной величины.

Вычисляя математическое ожидание, получим

$$\lambda = \frac{2\mu^4 + 7\mu^3\nu + 10\mu^2\nu^2 + 11\mu\nu^3 + 4\nu^4}{\mu\nu(\mu + \nu)^2(3\mu + 4\nu)}.$$

Заметим, что для системы с матрицей с нулевым столбцом имеет место аналогичный результат. Рассмотрим систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix},$$

где случайные величины α_k и γ_k имеют экспоненциальные распределения с параметрами μ и σ.

Учитывая, что $\|A(k)\| = \|A^T(k)\|$, нетрудно понять, что для такой системы выполняется

$$\lambda = \frac{2\mu^4 + 7\mu^3\sigma + 10\mu^2\sigma^2 + 11\mu\sigma^3 + 4\sigma^4}{\mu\sigma(\mu+\sigma)^2(3\mu+4\sigma)}.$$

7.7. Система с матрицей с нулем на диагонали

Рассмотрим динамическую систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем динамическое уравнение в виде системы скалярных уравнений

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1) + \alpha_k, y(k-1) + \beta_k), \\ y(k) &= \max(x(k-1) + \gamma_k, y(k-1)). \end{aligned}$$

После замены переменных получим уравнения

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(\alpha_k, Y(k-1) + \beta_k), \\ Y(k) &= \max(\gamma_k, Y(k-1)) - \max(\alpha_k, Y(k-1) + \beta_k). \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности имеем

$$\Psi_k(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \beta_k = v, \gamma_k = w\} \times$$
$$\times f_\alpha(u) f_\beta(v) f_\gamma(w) du dv dw.$$

Найдем условную вероятность

$$\mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u, \beta_k = v, \gamma_k = w\} =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } u \le w - t,\ v \le -t, \\ 1 - \Psi_{k-1}(-v + w - t), & \text{если } u \le w - t,\ v > -t, \\ \Psi_{k-1}(u + t), & \text{если } u > w - t,\ v \le -t, \\ 1, & \text{если } u > w - t,\ v > -t. \end{cases}$$

С учетом обозначений

$$a_k = \mu\sigma \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_k(u + v) e^{-(\mu+\sigma)u - \mu v} du dv,$$
$$b_k = \nu\sigma \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_k(-u + v) e^{-\nu u - \sigma v} du dv,$$
$$c_k = \nu\sigma \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_k(-u + v) e^{-\nu u - (\mu+\sigma) v} du dv,$$

функция Ψ_k принимает вид

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} a_{k-1} e^{\mu t} + (1 - b_{k-1}) e^{\nu t} - (a_{k-1} - c_{k-1}) e^{(\mu+\nu)t}, & \text{если } t \le 0, \\ 1 - (b_{k-1} - c_{k-1}) e^{-\sigma t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Имеем рекуррентные соотношения

$$a_k = -\frac{\mu\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+2\sigma)} b_{k-1} + \frac{\mu\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+2\sigma)} c_{k-1} + \frac{\sigma}{\mu+\sigma},$$
$$b_k = \frac{\nu^2\sigma}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(\nu+\sigma)} a_{k-1} - \frac{1}{2} b_{k-1} + \frac{\nu(\mu+2\nu+2\sigma)}{2(\nu+\sigma)(\mu+2\nu)} c_{k-1} +$$
$$+ \frac{2\nu+\sigma}{2(\nu+\sigma)},$$
$$c_k = \frac{\nu^2\sigma}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(\mu+\nu+\sigma)} a_{k-1} - \frac{\sigma(\mu+2\nu+2\sigma)}{2(\mu+2\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} b_{k-1} +$$
$$+ \frac{2\nu\sigma}{(\mu+2\nu)(\mu+2\sigma)} c_{k-1} + \frac{\sigma(\mu+2\nu+\sigma)}{2(\mu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)}.$$

Введем обозначение $\boldsymbol{v}_k = (a_k, b_k, c_k)^T$. Определим матрицу

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mu\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+2\sigma)} & \frac{\mu\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+2\sigma)} \\ \frac{\nu^2\sigma}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(\nu+\sigma)} & -\frac{1}{2} & \frac{\nu(\mu+2\nu+2\sigma)}{2(\nu+\sigma)(\mu+2\nu)} \\ \frac{\nu^2\sigma}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(\mu+\nu+\sigma)} & -\frac{\sigma(\mu+2\nu+2\sigma)}{2(\mu+2\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} & \frac{2\nu\sigma}{(\mu+2\nu)(\mu+2\sigma)} \end{pmatrix},$$

и вектор

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\mu+\sigma} \\ \frac{2\nu+\sigma}{2(\nu+\sigma)} \\ \frac{\sigma(\mu+2\nu+\sigma)}{2(\mu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} \end{pmatrix}.$$

Теперь рекуррентные соотношения можно представить в виде векторного уравнения

$$\boldsymbol{v}_k = G\boldsymbol{v}_{k-1} + \boldsymbol{r}, \tag{7.3}$$

которое задает отображение трехмерного пространства в себя.

Пусть указанное отображение является сжимающим. Тогда последовательность векторов $\boldsymbol{v}_k$ сходится к неподвижной точке отображения $\boldsymbol{v} = (a, b, c)^T$. Учитывая взаимно однозначное соответствие между последовательностями функций Ψ_k и векторов $\boldsymbol{v}_k$, заключаем, что последовательность Ψ_k также сходится к некоторой функции Ψ.

Неподвижная точка отображения определяется уравнением

$$(I - G)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}. \tag{7.4}$$

Проверка сходимости последовательности $\boldsymbol{v}_k$ и решение уравнения (7.4) в общем случае требуют слишком громоздких вычислений. Рассмотрим частные случаи, в которых решение задачи может быть получено в достаточно компактной форме.

7.7.1. Случай $\sigma = \nu = \mu$. При условии $\sigma = \nu = \mu$ имеем

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 1/6 \\ 1/12 & -1/2 & 5/12 \\ 1/18 & -5/18 & 2/9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Вычисление евклидовой нормы дает $\|G\|^2 = 397/648 < 1$, откуда следует, что последовательность векторов $\boldsymbol{v}_k$ сходится к неподвижной точке $\boldsymbol{v}$. После решения уравнения (7.4) имеем координаты $\boldsymbol{v}$ в виде

$$a = \frac{123}{278}, \qquad b = \frac{165}{278}, \qquad c = \frac{69}{278}.$$

Последовательность функций Ψ_k тогда сходится к функции

$$\Psi(t) = \begin{cases} \dfrac{118}{139} e^{\mu t} - \dfrac{27}{139} e^{2\mu t}, & \text{если } t \leq 0, \\ 1 - \dfrac{48}{139} e^{-\mu t}, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

которая является функцией распределения некоторой случайной величины.

Найдем функцию распределения

$$\Phi(t) = (1 - e^{-\mu t}) \left(1 - \frac{89}{139} e^{-\mu t} - \frac{48}{139} e^{-\mu t} \mu t \right).$$

Вычисление математического ожидания дает результат

$$\lambda = \frac{439}{278\mu}.$$

7.7.2. Случай $\sigma = \mu$, $\nu \neq \mu$. Найдем матрицу G

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{\nu^2 \mu}{(\mu+\nu)^2(\mu+2\nu)} & -\frac{1}{2} & \frac{\nu(3\mu+2\nu)}{2(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} \\ \frac{\nu^2 \mu}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(2\mu+\nu)} & -\frac{3\mu+2\nu}{6(2\mu+\nu)} & \frac{2\nu}{3(\mu+2\nu)} \end{pmatrix}$$

и вектор $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\mu+2\nu}{2(\mu+\nu)} \\ \frac{\mu+\nu}{2(2\mu+\nu)} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\|G\|^2 < 1$. Решение уравнения (7.4) имеет вид

$$a = \frac{(\mu+\nu)(17\mu^3 + 50\mu^2\nu + 44\mu\nu^2 + 12\nu^3)}{36\mu^4 + 147\mu^3\nu + 215\mu^2\nu^2 + 130\mu\nu^3 + 28\nu^4},$$
$$b = \frac{12\mu^4 + 67\mu^3\nu + 134\mu^2\nu^2 + 95\mu\nu^3 + 22\nu^4}{36\mu^4 + 147\mu^3\nu + 215\mu^2\nu^2 + 130\mu\nu^3 + 28\nu^4},$$
$$c = \frac{(\mu+\nu)(10\nu^3 + 31\mu\nu^2 + 22\mu^2\nu + 6\mu^3)}{36\mu^4 + 147\mu^3\nu + 215\mu^2\nu^2 + 130\mu\nu^3 + 28\nu^4}.$$

Теперь можно записать предельную функцию Ψ, а затем найти функцию

$$\Phi(t) = (1 - e^{-\mu t})\Bigg(1 - \frac{\nu}{\mu-\nu}(c-b)e^{-\mu t} -$$
$$- \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}a + \frac{\mu+\nu}{2(\mu-\nu)}b - \frac{\nu(2\mu+\nu)}{(\mu+2\nu)(\mu-\nu)}c\right)e^{-\nu t}\Bigg).$$

Наконец, вычисляя математическое ожидание, получаем

$$\lambda = \frac{48\mu^5 + 238\mu^4\nu + 495\mu^3\nu^2 + 581\mu^2\nu^3 + 326\mu\nu^4 + 68\nu^5}{2\mu\nu(36\mu^4 + 147\mu^3\nu + 215\mu^2\nu^2 + 130\mu\nu^3 + 28\nu^4)}.$$

7.7.3. Случай $\sigma = \nu$. Запишем матрицу

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} & \frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} \\ \frac{\nu^2}{2(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} & -\frac{1}{2} & \frac{\mu+4\nu}{4(\mu+2\nu)} \\ \frac{\nu^3}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)^2} & -\frac{\nu(\mu+4\nu)}{2(\mu+2\nu)^2} & \frac{2\nu^2}{(\mu+2\nu)^2} \end{pmatrix},$$

а также вектор

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{\mu+\nu} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{\nu(\mu+3\nu)}{2(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица G — вырожденная, причем для всех k выполняется

$$c_k = -\frac{\mu+\nu}{2(\mu+2\nu)}a_k + \frac{2\nu}{\mu+2\nu}b_k - \frac{\nu(\mu-\nu)}{2(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}. \tag{7.5}$$

Введем вектор $\boldsymbol{v}'_k = (a_k, b_k)^T$. Подставляя выражение (7.5) для c_k в уравнение (7.3), приходим к уравнению $\boldsymbol{v}'_k = H\boldsymbol{v}'_{k-1} + \boldsymbol{s}$, где

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\mu\nu}{2(\mu+2\nu)} & -\frac{\mu^2\nu}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)^2} \\ -\frac{\mu^3+6\mu^2\nu+5\mu\nu^2-4\nu^3}{8(\mu+\nu)(\mu+2\nu)^2} & -\frac{\mu(\mu+3\nu)}{2(\mu+2\nu)^2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} \frac{\nu(\mu^2+7\mu\nu+8\nu^2)}{2(\mu+\nu)(\mu+2\nu)^2} \\ \frac{3\mu^2+14\mu\nu+20\nu^2}{4(\mu+2\nu)^2} \end{pmatrix}.$$

Последнее уравнение задает отображение двумерного пространства в себя. Как нетрудно проверить, $\|H\|^2 < 1$. Учитывая, что отображение является сжатием, последовательность $\boldsymbol{v}'_k$ сходится к неподвижной точке $\boldsymbol{v}' = (a, b)^T$, которая определяется уравнением $(I - H)\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{r}$. Решение уравнения имеет вид

$$a = \frac{\nu(6\mu^4 + 57\mu^3\nu + 173\mu^2\nu^2 + 192\mu\nu^3 + 64\nu^4)}{12\mu^5 + 97\mu^4\nu + 286\mu^3\nu^2 + 397\mu^2\nu^3 + 256\mu\nu^4 + 64\nu^5},$$

$$b = \frac{6\mu^6 + 55\mu^5\nu + 197\mu^4\nu^2 + 367\mu^3\nu^3 + 391\mu^2\nu^4 + 240\nu^5\mu + 64\nu^6}{(\mu+\nu)(12\mu^5 + 97\mu^4\nu + 286\mu^3\nu^2 + 397\mu^2\nu^3 + 256\mu\nu^4 + 64\nu^5)}.$$

Переходя к пределу в (7.5), найдем предел последовательности c_k в виде

$$c = \frac{\nu(3\mu^5 + 27\mu^4\nu + 99\mu^3\nu^2 + 183\mu^2\nu^3 + 176\mu\nu^4 + 64\nu^5)}{(\mu+\nu)(12\mu^5 + 97\mu^4\nu + 286\mu^3\nu^2 + 397\mu^2\nu^3 + 256\mu\nu^4 + 64\nu^5)}.$$

Запишем функцию распределения

$$\Phi(t) = \\ = (1 - e^{-\mu t})\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}a + \frac{1}{2}b - \frac{\nu}{\mu+2\nu}c\right)e^{-\nu t} - \right. \\ \left. - \nu(b - c)e^{-\nu t}t\right).$$

Вычисление математического ожидания дает результат в виде

$\lambda = P(\mu,\nu)/Q(\mu,\nu)$, где

$$P(\mu,\nu) = 15\mu^8 + 152\mu^7\nu + 624\mu^6\nu^2 + 1382\mu^5\nu^3 + 1838\mu^4\nu^4 + \\ + 1592\mu^3\nu^5 + 973\mu^2\nu^6 + 384\mu\nu^7 + 64\nu^8,$$

$$Q(\mu,\nu) = \mu\nu(\mu+\nu)^2(12\mu^5 + 97\mu^4\nu + 286\mu^3\nu^2 + 397\mu^2\nu^3 + \\ + 256\mu\nu^4 + 64\nu^5).$$

7.8. Система с матрицей с нулем ниже диагонали

Рассмотрим динамическую систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Ясно, что для решения задачи вычисления λ можно применить подход, использованный выше для анализа системы с матрицей с нулевым элементом на диагонали. Учитывая, что при этом общий порядок решения сохраняется без существенных изменений, описание решения здесь опускается.

7.8.1. Случай $\tau = \nu = \mu$. При таком условии выполняется

$$\lambda = \frac{515}{352\mu}.$$

7.8.2. Случай $\nu = \mu$. Имеем результат $\lambda = P(\mu,\tau)/Q(\mu,\tau)$, где

$$P(\mu,\tau) = 288\mu^8 + 1048\mu^7\tau + 1936\mu^6\tau^2 + 2688\mu^5\tau^3 + 3012\mu^4\tau^4 + \\ + 2226\mu^3\tau^5 + 941\mu^2\tau^6 + 204\mu\tau^7 + 17\tau^8,$$

$$Q(\mu,\tau) = 2\mu\tau(144\mu^7 + 524\mu^6\tau + 968\mu^5\tau^2 + 1200\mu^4\tau^3 + 910\mu^3\tau^4 + \\ + 387\mu^2\tau^5 + 84\mu\tau^6 + 7\tau^7).$$

7.8.3. Случай $\tau = \mu$. Полученный результат записывается в виде $\lambda = P(\mu,\nu)/Q(\mu,\nu)$, где

$$
\begin{aligned}
P(\mu,\nu) = 256\mu^{10} &+ 2112\mu^9\nu + 8044\mu^8\nu^2 + 19355\mu^7\nu^3 + 32167\mu^6\nu^4 + \\
&+ 36887\mu^5\nu^5 + 28709\mu^4\nu^6 + 14854\mu^3\nu^7 + 4912\mu^2\nu^8 + \\
&+ 944\mu\nu^9 + 80\nu^{10}, \\
Q(\mu,\nu) = 2\mu\nu(\mu+\nu)&(192\mu^8 + 1344\mu^7\nu + 4047\mu^6\nu^2 + 6770\mu^5\nu^3 + \\
&+ 6799\mu^4\nu^4 + 4216\mu^3\nu^5 + 1600\mu^2\nu^6 + 344\mu\nu^7 + 32\nu^8).
\end{aligned}
$$

7.9. Система с матрицей общего вида

Рассмотрим динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением (7.1) с матрицей

$$
A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}.
$$

Будем предполагать теперь, что все элементы матрицы являются случайными величинами.

Запишем скалярные уравнения системы с использованием обычных обозначений

$$
\begin{aligned}
x(k) &= \max(x(k-1) + \alpha_k, y(k-1) + \beta_k), \\
y(k) &= \max(x(k-1) + \gamma_k, y(k-1) + \delta_k).
\end{aligned}
$$

Определим случайные величины

$$
Z(k) = \|\boldsymbol{z}(k)\| - \|\boldsymbol{z}(k-1)\|, \qquad Y(k) = y(k) - x(k),
$$

и заметим, что $\|\boldsymbol{z}(k)\| = Z(1) + \cdots + Z(k)$, а также, что $Y(0) = 0$.

Введем функции распределения

$$
\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{Z(k) < t\}, \qquad \Psi_k(t) = \mathsf{P}\{Y(k) < t\}.
$$

Соответствующие функции плотности обозначим через ϕ_k и ψ_k.

Рассмотрим функцию распределения Φ_k. Сначала заметим, что $\Phi_k(t) = 0$ при всех $t \le 0$. Определим случайные величины

$$
\xi = \max(\alpha_k, \gamma_k), \qquad \eta = \max(\beta_k, \delta_k),
$$

для которых $\mathsf{P}\{\xi < t\} = F_\alpha(t)F_\gamma(t)$ и $\mathsf{P}\{\eta < t\} = F_\beta(t)F_\delta(t)$.

Теперь функция Φ_k принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{\max(x(k), y(k)) - \max(x(k-1), y(k-1)) < t\} = \\ = \mathsf{P}\{\max(x(k-1)+\xi, y(k-1)+\eta) - \max(x(k-1), y(k-1)) < t\} = \\ = \mathsf{P}\{\max(\xi, Y(k-1)+\eta) - \max(0, Y(k-1)) < t\}.\end{aligned}$$

Записывая последнюю вероятность в виде суммы, получим

$$\begin{aligned}\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{\max(\xi, Y(k-1)+\eta) < t, Y(k-1) < 0\} + \\ + \mathsf{P}\{\max(\xi - Y(k-1), \eta) < t, Y(k-1) \geq 0\} = \\ = \mathsf{P}\{\xi < t\}\mathsf{P}\{Y(k-1)+\eta < t, Y(k-1) < 0\} + \\ + \mathsf{P}\{\eta < t\}\mathsf{P}\{\xi - Y(k-1) < t, Y(k-1) \geq 0\},\end{aligned}$$

откуда следует равенство

$$\begin{aligned}\Phi_k(t) = F_\alpha(t)F_\gamma(t)\int_{-\infty}^{0} F_\beta(t-s)F_\delta(t-s)\psi_{k-1}(s)ds + \\ + F_\beta(t)F_\delta(t)\int_0^\infty F_\alpha(t+s)F_\gamma(t+s)\psi_{k-1}(s)ds.\end{aligned}$$

Предположим, что при $k \to \infty$ последовательность функций ψ_k равномерно сходится к некоторой предельной функции плотности ψ (ниже будет показано, что такое предположение для рассматриваемой системы является справедливым).

Ясно, что тогда последовательность Φ_k сходится к функции распределения

$$\begin{aligned}\Phi(t) = F_\alpha(t)F_\gamma(t)\int_{-\infty}^{0} F_\beta(t-s)F_\delta(t-s)\psi(s)ds + \\ + F_\beta(t)F_\delta(t)\int_0^\infty F_\alpha(t+s)F_\gamma(t+s)\psi(s)ds \quad (7.6)\end{aligned}$$

некоторой случайной величины Z, а $Z(k)$ сходится к Z по распределению. Кроме того, $\mathsf{E}Z(k)$ сходится к $\mathsf{E}Z$, а следовательно,

$$\lambda = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\mathsf{E}\|\boldsymbol{z}(k)\| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}Z(i) = \mathsf{E}Z. \qquad (7.7)$$

7.10. Рекуррентное уравнение для плотности

По формуле полной вероятности для любого $k = 1, 2, \ldots,$ выполняется равенство

$$\Psi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\psi_{k-1}(s)ds \tag{7.8}$$

при условии, что

$$K(t,s) = \mathsf{P}\{Y(k) < t | Y(k-1) = s\} = \\ = \mathsf{P}\{\max(\gamma_k, \delta_k + s) - \max(\alpha_k, \beta_k + s) < t\}.$$

В силу равенства $Y(0) = 0$ имеем

$$\Psi_1(t) = \mathsf{P}\{\max(\gamma_1, \delta_1) - \max(\alpha_1, \beta_1) < t\} = K(t, 0).$$

Рассмотрим функцию K. Введем обозначения

$$\xi(s) = \max(\alpha_k, \beta_k + s), \qquad \eta(s) = \max(\gamma_k, \delta_k + s)$$

и заметим, что

$$\mathsf{P}\{\xi(s) < t\} = F_\alpha(t)F_\beta(t-s), \qquad \mathsf{P}\{\eta(s) < t\} = F_\gamma(t)F_\delta(t-s).$$

Теперь можно записать

$$K(t,s) = \mathsf{P}\{\eta(s) - \xi(s) < t\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} F_\gamma(u+t)F_\delta(u+t-s)(f_\alpha(u)F_\beta(u-s) + F_\alpha(u)f_\beta(u-s))du.$$

Учитывая, что случайные величины α_k, β_k, γ_k и δ_k неотрицательны, окончательно приходим к выражению

$$K(t,s) = \int_{r}^{\infty} F_\gamma(u+t)F_\delta(u+t-s)(f_\alpha(u)F_\beta(u-s)+F_\alpha(u)f_\beta(u-s))du,$$

где нижний предел интегрирования определяется так

$$r = \begin{cases} -t, & \text{если } t \le 0,\ s \le 0, \\ s-t, & \text{если } t \le 0,\ s > 0, \\ 0, & \text{если } t > 0,\ s \le 0, \\ s, & \text{если } t > 0,\ s > 0. \end{cases}$$

Дифференцируя обе части (7.8) по t, приходим к рекуррентному интегральному уравнению

$$\psi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t'(t,s)\psi_{k-1}(s)ds, \tag{7.9}$$

в котором под знаком интеграла стоит функция

$$K_t'(t,s) = \int_r^{\infty} (f_\gamma(u+t)F_\delta(u+t-s) + F_\gamma(u+t)f_\delta(u+t-s))\times \\ \times (f_\alpha(u)F_\beta(u-s) + F_\alpha(u)f_\beta(u-s))du.$$

Найдем функцию K_t'. При $t \le 0,\ s \le 0$ получим

$$K_t'(t,s) = \mu e^{\mu t}\left(\frac{\sigma}{\mu+\sigma} - \frac{\mu\sigma}{(\mu+\tau)(\mu+\sigma+\tau)}e^{\tau s}\right) + \\ + \nu e^{\nu t}\left(\frac{\sigma}{\nu+\sigma}e^{\nu s} - \frac{\nu\sigma}{(\nu+\tau)(\nu+\sigma+\tau)}e^{(\nu+\tau)s}\right) - \\ -(\mu+\nu)e^{(\mu+\nu)t}\left(\frac{\sigma}{\mu+\nu+\sigma}e^{\nu s} - \frac{\sigma(\mu+\nu)}{(\mu+\nu+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)}e^{(\nu+\tau)s}\right).$$

При $t \le 0,\ s > 0$ имеем

$$K_t'(t,s) = \mu e^{\mu t}\left(\frac{\tau}{\mu+\tau}e^{-\mu s} - \frac{\mu\tau}{(\mu+\sigma)(\mu+\sigma+\tau)}e^{-(\mu+\sigma)s}\right) + \\ + \nu e^{\nu t}\left(\frac{\tau}{\nu+\tau} - \frac{\nu\tau}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+\tau)}e^{-\sigma s}\right) - \\ - (\mu+\nu)e^{(\mu+\nu)t}\left(\frac{\tau}{\mu+\nu+\tau}e^{-\mu s} - \right. \\ \left. - \frac{\tau(\mu+\nu)}{(\mu+\nu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma+\tau)}e^{-(\mu+\sigma)s}\right),$$

при $t > 0$, $s \le 0$ имеем

$$K_t'(t,s) = \sigma e^{-\sigma t}\left(\frac{\mu}{\mu+\sigma} - \frac{\mu\sigma}{(\nu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)}e^{\nu s}\right) + \\ + \tau e^{-\tau t}\left(\frac{\mu}{\mu+\tau}e^{\tau s} - \frac{\mu\tau}{(\nu+\tau)(\mu+\nu+\tau)}e^{(\nu+\tau)s}\right) - \\ - (\sigma+\tau)e^{-(\sigma+\tau)t}\left(\frac{\mu}{\mu+\sigma+\tau}e^{\tau s} - \right. \\ \left. - \frac{\mu(\sigma+\tau)}{(\nu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)}e^{(\nu+\tau)s}\right),$$

при $t > 0$, $s > 0$ имеем

$$K_t'(t,s) = \sigma e^{-\sigma t}\left(\frac{\nu}{\nu+\sigma}e^{-\sigma s} - \frac{\nu\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)}e^{-(\mu+\sigma)s}\right) + \\ + \tau e^{-\tau t}\left(\frac{\nu}{\nu+\tau} - \frac{\nu\tau}{(\mu+\tau)(\mu+\nu+\tau)}e^{-\mu s}\right) - \\ - (\sigma+\tau)e^{-(\sigma+\tau)t}\left(\frac{\nu}{\nu+\sigma+\tau}e^{-\sigma s} - \right. \\ \left. - \frac{\nu(\sigma+\tau)}{(\mu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)}e^{-(\mu+\sigma)s}\right).$$

7.10.1. Анализ ядра интегрального уравнения. Представим ядро $K_t'(t,s)$ в виде суммы произведений двух функций, одна из которых зависит только от t, а другая — только от s.

Сначала введем функции

$$a_1(t) = \begin{cases} \mu e^{\mu t}, & \text{если } t < 0, \\ \sigma e^{-\sigma t}, & \text{если } t > 0; \end{cases} \qquad a_2(t) = \begin{cases} \nu e^{\nu t}, & \text{если } t < 0, \\ \tau e^{-\tau t}, & \text{если } t > 0; \end{cases}$$

$$a_3(t) = \begin{cases} (\mu+\nu)e^{(\mu+\nu)t}, & \text{если } t < 0, \\ (\sigma+\tau)e^{-(\sigma+\tau)t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Заметим, что функции a_1, a_2 и a_3 ограничены. Легко проверить, что при всех $t \in (-\infty, \infty)$ выполняется неравенство

$$a_1(t) + a_2(t) - a_3(t) > 0. \tag{7.10}$$

Теперь определим следующие функции

$$b_1(s) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\mu+\sigma} - \frac{\mu\sigma}{(\mu+\tau)(\mu+\sigma+\tau)} e^{\tau s}, & \text{если } s < 0, \\ \frac{\tau}{\mu+\tau} e^{-\mu s} - \frac{\mu\tau}{(\mu+\sigma)(\mu+\sigma+\tau)} e^{-(\mu+\sigma)s}, & \text{если } s > 0; \end{cases}$$

$$b_2(s) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\nu+\sigma} e^{\nu s} - \frac{\nu\sigma}{(\nu+\tau)(\nu+\sigma+\tau)} e^{(\nu+\tau)s}, & \text{если } s < 0, \\ \frac{\tau}{\nu+\tau} - \frac{\nu\tau}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+\tau)} e^{-\sigma s}, & \text{если } s > 0; \end{cases}$$

$$b_3(s) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\mu+\nu+\sigma} e^{\nu s} + \frac{\sigma(\mu+\nu)}{(\mu+\nu+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} e^{(\nu+\tau)s}, & \text{если } s < 0, \\ -\frac{\tau}{\mu+\nu+\tau} e^{-\mu s} + \frac{\tau(\mu+\nu)}{(\mu+\nu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} e^{-(\mu+\sigma)s}, & \text{если } s > 0; \end{cases}$$

а также функции

$$c_1(s) = \begin{cases} \frac{\mu}{\mu+\sigma} - \frac{\mu\sigma}{(\nu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} e^{\nu s}, & \text{если } s < 0, \\ \frac{\nu}{\nu+\sigma} e^{-\sigma s} - \frac{\nu\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} e^{-(\mu+\sigma)s}, & \text{если } s > 0; \end{cases}$$

$$c_2(s) = \begin{cases} \frac{\mu}{\mu+\tau} e^{\tau s} - \frac{\mu\tau}{(\nu+\tau)(\mu+\nu+\tau)} e^{(\nu+\tau)s}, & \text{если } s < 0, \\ \frac{\nu}{\nu+\tau} - \frac{\nu\tau}{(\mu+\tau)(\mu+\nu+\tau)} e^{-\mu s}, & \text{если } s > 0; \end{cases}$$

$$c_3(s) = \begin{cases} -\frac{\mu}{\mu+\sigma+\tau} e^{\tau s} + \frac{\mu(\sigma+\tau)}{(\nu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} e^{(\nu+\tau)s}, & \text{если } s < 0, \\ -\frac{\nu}{\nu+\sigma+\tau} e^{-\sigma s} + \frac{\nu(\sigma+\tau)}{(\mu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} e^{-(\mu+\sigma)s}, & \text{если } s > 0. \end{cases}$$

В силу того, что K'_t при любом s является функцией плотности некоторого распределения вероятностей, выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} K'_t(t,s)dt = 1,$$

а следовательно, при любом s имеем

$$b_1(s) + b_2(s) + b_3(s) + c_1(s) + c_2(s) + c_3(s) = 1. \tag{7.11}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что для всех $s \in (-\infty, \infty)$, справедливы следующие неравенства

$$b_1(s) + b_3(s) > 0, \qquad b_2(s) + b_3(s) > 0, \qquad b_3(s) < 0, \tag{7.12}$$

$$c_1(s) + c_3(s) > 0, \qquad c_2(s) + c_3(s) > 0, \qquad c_3(s) < 0. \tag{7.13}$$

Заметим, что с использованием введенных обозначений функция K'_t может быть записана так

$$K'_t(t,s) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} a_i(t)b_i(s), & \text{если } t < 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} a_i(t)c_i(s), & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Рекуррентное уравнение (7.9) для плотности ψ_k тогда приобретает вид

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} a_i(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_i(s)\psi_{k-1}(s)ds, & \text{если } t < 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} a_i(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} c_i(s)\psi_{k-1}(s)ds, & \text{если } t > 0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Учитывая, что ψ_k является функцией плотности некоторого распределения вероятностей, последнее уравнение можно дополнить условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t)dt = 1. \tag{7.15}$$

7.11. Определение предельной плотности

Будем рассматривать уравнение (7.14) вместе с условием (7.15). Указанное уравнение представляет собой линейное интегральное уравнение с вырожденным ядром, решение которого, как известно, может быть сведено к решению некоторой линейной алгебраической системы [45, 47].

7.11.1. Векторное представление. Перейдем к векторному представлению функции ψ_k. Определим векторы

$$\boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))^T, \qquad \boldsymbol{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))^T,$$
$$\boldsymbol{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))^T.$$

Тогда функцию K'_t можно представить в виде

$$K'_t(t,s) = \begin{cases} \boldsymbol{a}(t)^T \boldsymbol{b}(s), & \text{если } t < 0, \\ \boldsymbol{a}(t)^T \boldsymbol{c}(s), & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Введем векторы $\boldsymbol{\theta}_1^{(0)} = \boldsymbol{b}(0)$ и $\boldsymbol{\theta}_2^{(0)} = \boldsymbol{c}(0)$. Для всех $k = 1, 2, \dots,$ положим

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{b}(s)\psi_k(s)ds, \qquad \boldsymbol{\theta}_2^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}(s)\psi_k(s)ds$$

и запишем уравнение для плотности (7.14) в виде

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \boldsymbol{a}(t)^T \boldsymbol{\theta}_1^{(k-1)}, & \text{если } t < 0, \\ \boldsymbol{a}(t)^T \boldsymbol{\theta}_2^{(k-1)}, & \text{если } t > 0. \end{cases} \tag{7.16}$$

Заметим, что в силу (7.11) и (7.15) для всех $k = 0, 1, \dots$ выполняется $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}_1^{(k)} + \mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}_2^{(k)} = 1$, где $\mathbf{1}$ обозначает вектор, все элементы которого равны единице.

Умножим обе части (7.16) сначала на $\boldsymbol{b}(t)$, а затем на $\boldsymbol{c}(t)$. Интегрирование полученных уравнений по всем t приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_1^{(k)} &= B_1 \boldsymbol{\theta}_1^{(k-1)} + B_2 \boldsymbol{\theta}_2^{(k-1)}, \\ \boldsymbol{\theta}_2^{(k)} &= C_1 \boldsymbol{\theta}_1^{(k-1)} + C_2 \boldsymbol{\theta}_2^{(k-1)}, \end{aligned}$$

где B_1, B_2, C_1 и C_2 — матрицы такие, что

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{b}(t)\boldsymbol{a}(t)^T dt, \qquad & B_2 &= \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{b}(t)\boldsymbol{a}(t)^T dt, \\ C_1 &= \int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{a}(t)^T dt, \qquad & C_2 &= \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{a}(t)^T dt. \end{aligned}$$

С учетом обозначений

$$D = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1^{(k)} \\ \boldsymbol{\theta}_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

для всех $k = 1, 2, \dots$ приходим к уравнению

$$\boldsymbol{\theta}^{(k)} = D\boldsymbol{\theta}^{(k-1)}. \tag{7.17}$$

В силу равенства $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}^{(k)} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}_1^{(k)} + \mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}_2^{(k)}$ выполняется условие нормировки

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}^{(k)} = 1. \tag{7.18}$$

Заметим, что из (7.11) следует

$$\mathbf{1}^T(B_1 + C_1) = \mathbf{1}^T, \qquad \mathbf{1}^T(B_2 + C_2) = \mathbf{1}^T,$$

а потому матрица D удовлетворяет условию $\mathbf{1}^T D = \mathbf{1}^T$.

Ясно, что имеется взаимно однозначное соответствие между последовательностью функций ψ_k, которая определяется уравнениями (7.14)-(7.15), и последовательностью векторов $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$, которая удовлетворяет системе (7.17)-(7.18), так как каждый шаг, сделанный при переходе от одной системы к другой, обратим. В частности, обе последовательности сходятся или расходятся одновременно.

7.11.2. Исследование сходимости. При помощи невырожденных преобразований

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = T, \quad S^{-1} = S,$$

введем новые переменные $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1^{(k)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2^{(k)}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$, исходя из равенств

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(k)} = T\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1^{(k)}, \qquad \boldsymbol{\theta}_2^{(k)} = T\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2^{(k)}, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(k)} = S\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(k)},$$

Тогда с учетом обозначения $\widetilde{D} = SDS$ уравнение (7.17) примет вид

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \widetilde{D}\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{1}^T\widetilde{D} = \mathbf{1}^T SDS = \mathbf{1}^T$. С другой стороны, в силу неравенств (7.10), (7.12) и (7.13) все элементы матрицы $\widetilde{D}$ имеют положительную величину.

Следовательно, матрица $\widetilde{D}^T$ является положительной стохастической. Как известно (см., например, [10, 2]), в этом случае последовательность векторов $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ при $k \to \infty$ имеет предел $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$, который не зависит от выбора начального вектора $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ с точностью до постоянного множителя. В частности, если $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ — положительный вектор такой, что $\mathbf{1}^T\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = 1$, то вектор $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ является положительным и $\mathbf{1}^T\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = 1$.

Последовательность $\boldsymbol{\theta}^{(k)} = S\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ будет сходиться к вектору $\boldsymbol{\theta} = S\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$, причем $\mathbf{1}^T\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1}^T S\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = 1$. Очевидно, что предельный вектор $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T)^T$ последовательности $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ является решением системы уравнений

$$(I - D)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \tag{7.19}$$

$$\mathbf{1}^T\boldsymbol{\theta} = 1. \tag{7.20}$$

В силу взаимно однозначного соответствия между решениями уравнений (7.14) и (7.17) вместе с соответствующими условиями нормировки последовательность функций ψ_k сходится к некоторой предельной функции ψ. Учитывая ограниченность вектора $\boldsymbol{a}(t)$, нетрудно проверить, опираясь на (7.16), что эта сходимость является равномерной.

Предельная функция последовательности ψ_k имеет вид

$$\psi(t) = \begin{cases} \boldsymbol{a}(t)^T\boldsymbol{\theta}_1, & \text{если } t < 0, \\ \boldsymbol{a}(t)^T\boldsymbol{\theta}_2, & \text{если } t > 0. \end{cases} \tag{7.21}$$

Понятно, что ψ является плотностью некоторого распределения вероятностей.

7.12. Вычисление показателя Ляпунова

Ясно, что для вычисления λ при заданных значениях μ, ν, σ и τ можно сначала решить систему (7.19)-(7.20) относительно $\boldsymbol{\theta}$, затем с помощью (7.21) найти функцию распределения (7.6), и, наконец, вычислить соответствующее математическое ожидание. Однако, при решении в общем виде использование указанной системы приводит к слишком громоздким выкладкам.

В ряде случаев анализ и решение задачи можно существенно упростить за счет перехода от системы (7.19)-(7.20) к эквивалентной ей системе путем подходящей замены переменных.

7.12.1. Замена переменных. Для перехода к новым переменным введем вектор $\boldsymbol{u}(s) = (u_0(s), u_1(s), u_2(s), u_3(s))^T$ с компонентами

$$u_0(s) = 1, \qquad u_1(s) = \begin{cases} e^{\nu s}, & \text{если } s < 0, \\ e^{-\mu s}, & \text{если } s > 0; \end{cases}$$

$$u_2(s) = \begin{cases} e^{\tau s}, & \text{если } s < 0, \\ e^{-\sigma s}, & \text{если } s > 0; \end{cases} \quad u_3(s) = \begin{cases} e^{(\nu+\tau) s}, & \text{если } s < 0, \\ e^{-(\mu+\sigma) s}, & \text{если } s > 0. \end{cases}$$

Определим векторы

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (\omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13})^T, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = (\omega_{20}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23})^T$$

следующим образом

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \int_{-\infty}^0 \boldsymbol{u}(s)\psi(s)ds, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \int_0^\infty \boldsymbol{u}(s)\psi(s)ds,$$

и заметим, что

$$\omega_{10} + \omega_{20} = \int_{-\infty}^\infty \psi(s)ds = 1.$$

Умножим обе части равенства (7.21) на $\boldsymbol{u}(t)$. После интегрирования полученного уравнения сначала по всем $t < 0$, а затем по всем $t > 0$ имеем систему равенств

$$\boldsymbol{\omega}_1 = U_1\boldsymbol{\theta}_1,$$
$$\boldsymbol{\omega}_2 = U_2\boldsymbol{\theta}_2,$$

где U_1 и U_2 — матрицы такие, что

$$U_1 = \int_{-\infty}^0 \boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{a}(t)^T dt = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\mu}{\mu+\nu} & \frac{1}{2} & \frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu} \\ \frac{\mu}{\mu+\tau} & \frac{\nu}{\nu+\tau} & \frac{\mu+\nu}{\mu+\nu+\tau} \\ \frac{\mu}{\mu+\nu+\tau} & \frac{\nu}{2\nu+\tau} & \frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu+\tau} \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \int_0^\infty \boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{a}(t)^T dt = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sigma}{\mu+\sigma} & \frac{\tau}{\mu+\tau} & \frac{\sigma+\tau}{\mu+\sigma+\tau} \\ \frac{1}{2} & \frac{\tau}{\sigma+\tau} & \frac{\sigma+\tau}{2\sigma+\tau} \\ \frac{\sigma}{\mu+2\sigma} & \frac{\tau}{\mu+\sigma+\tau} & \frac{\sigma+\tau}{\mu+2\sigma+\tau} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, из очевидных соотношений

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{b}(s)\psi(s)ds, \qquad \boldsymbol{\theta}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}(s)\psi(s)ds,$$

нетрудно получить равенства

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_1 &= V_{11}\boldsymbol{\omega}_1 + V_{12}\boldsymbol{\omega}_2, \\ \boldsymbol{\theta}_2 &= V_{21}\boldsymbol{\omega}_1 + V_{22}\boldsymbol{\omega}_2, \end{aligned}$$

где

$$V_{11} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\mu+\sigma} & 0 & -\frac{\mu\sigma}{(\mu+\tau)(\mu+\sigma+\tau)} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{\nu+\sigma} & 0 & -\frac{\nu\sigma}{(\nu+\tau)(\nu+\sigma+\tau)} \\ 0 & -\frac{\sigma}{\mu+\nu+\sigma} & 0 & \frac{\sigma(\mu+\nu)}{(\mu+\nu+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} \end{pmatrix},$$

$$V_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau}{\mu+\tau} & 0 & -\frac{\mu\tau}{(\mu+\sigma)(\mu+\sigma+\tau)} \\ \frac{\tau}{\nu+\tau} & 0 & -\frac{\nu\tau}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+\tau)} & 0 \\ 0 & -\frac{\tau}{\mu+\nu+\tau} & 0 & \frac{\tau(\mu+\nu)}{(\mu+\nu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} \end{pmatrix},$$

$$V_{21} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\mu+\sigma} & -\frac{\mu\sigma}{(\nu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\mu+\tau} & -\frac{\mu\tau}{(\nu+\tau)(\mu+\nu+\tau)} \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{\mu+\sigma+\tau} & \frac{\mu(\sigma+\tau)}{(\nu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} \end{pmatrix},$$

$$V_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\nu}{\nu+\sigma} & -\frac{\nu\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} \\ \frac{\nu}{\nu+\tau} & -\frac{\nu\tau}{(\mu+\tau)(\mu+\nu+\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{\nu+\sigma+\tau} & \frac{\nu(\sigma+\tau)}{(\mu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} \end{pmatrix}.$$

Объединяя полученные равенства, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= U_1(V_{11}\boldsymbol{\omega}_1 + V_{12}\boldsymbol{\omega}_2), \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= U_2(V_{21}\boldsymbol{\omega}_1 + V_{22}\boldsymbol{\omega}_2). \end{aligned}$$

Наконец, с учетом обозначений $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_1^T, \boldsymbol{\omega}_2^T)^T$,

$$W = UV, \qquad U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

получим систему уравнений для определения вектора $\boldsymbol{\omega}$ в виде

$$(I - W)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \tag{7.22}$$

$$\omega_{10} + \omega_{20} = 1. \tag{7.23}$$

7.12.2. Вычисление средней скорости роста. Рассмотрим функцию распределения Φ, представленную в виде

$$\Phi(t) = F_\alpha(t)F_\gamma(t)\int_{-\infty}^{0} F_\beta(t-s)F_\delta(t-s)\psi(s)ds+ \\ + F_\beta(t)F_\delta(t)\int_{0}^{\infty} F_\alpha(t+s)F_\gamma(t+s)\psi(s)ds.$$

Подставляя выражения для функций экспоненциального распределения, а затем, заменяя соответствующие интегралы компонентами вектора $\boldsymbol{\omega}$, получим

$$\Phi(t) = (1-e^{-\mu t})(1-e^{-\sigma t})(\omega_{10}-\omega_{11}e^{-\nu t}-\omega_{12}e^{-\tau t}+\omega_{13}e^{-(\nu+\tau)t})+ \\ + (1-e^{-\nu t})(1-e^{-\tau t})(\omega_{20}-\omega_{21}e^{-\mu t}-\omega_{22}e^{-\sigma t}+\omega_{23}e^{-(\mu+\sigma)t}).$$

После определения соответствующей функции плотности и вычисления математического ожидания приходим к выражению для вычисления λ в виде

$$\lambda = \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{\omega}_2, \tag{7.24}$$

где $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ — векторы такие, что

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2+\mu\sigma+\sigma^2}{\mu\sigma(\mu+\sigma)} \\ \frac{\mu\sigma(\mu+2\nu+\sigma)}{\nu(\mu+\nu)(\nu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)} \\ \frac{\mu\sigma(\mu+\sigma+2\tau)}{\tau(\mu+\tau)(\sigma+\tau)(\mu+\sigma+\tau)} \\ -\frac{\mu\sigma(\mu+2\nu+2\tau+\sigma)}{(\nu+\tau)(\mu+\nu+\tau)(\nu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\nu^2+\nu\tau+\tau^2}{\nu\tau(\nu+\tau)} \\ \frac{\nu\tau(2\mu+\nu+\tau)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\tau)(\mu+\nu+\tau)} \\ \frac{\nu\tau(\nu+2\sigma+\tau)}{\sigma(\nu+\sigma)(\sigma+\tau)(\nu+\sigma+\tau)} \\ -\frac{\nu\tau(2\mu+\nu+2\sigma+\tau)}{(\mu+\sigma)(\mu+\nu+\sigma)(\mu+\sigma+\tau)(\mu+\nu+\sigma+\tau)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для вычисления средней скорости роста вектора состояний следует сначала решить систему уравнений (7.22)-(7.23), а затем найти λ по формуле (7.24).

7.13. Частный случай системы второго порядка

Рассмотрим систему, для которой $\tau = \mu$, $\sigma = \nu$. Определим среднюю скорость роста вектора состояний системы, опираясь на предложенный выше подход. Сначала найдем матрицы U_i, V_{ij} для всех $i, j = 1, 2$. После выполнения необходимых вычислений имеем

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\mu}{\mu+\nu} & \frac{1}{2} & \frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu} \\ \frac{1}{2} & \frac{\nu}{\mu+\nu} & \frac{\mu+\nu}{2\mu+\nu} \\ \frac{\mu}{2\mu+\nu} & \frac{\nu}{\mu+2\nu} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\nu}{\mu+\nu} & \frac{1}{2} & \frac{\mu+\nu}{2\mu+\nu} \\ \frac{1}{2} & \frac{\mu}{\mu+\nu} & \frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu} \\ \frac{\nu}{\mu+2\nu} & \frac{\mu}{2\mu+\nu} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$V_{11} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{\mu+\nu} & 0 & -\frac{\nu}{2(2\mu+\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\nu^2}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} \\ 0 & -\frac{\nu}{\mu+2\nu} & 0 & \frac{\nu}{2(2\mu+\nu)} \end{pmatrix},$$

$$V_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\mu^2}{(\mu+\nu)(2\mu+\nu)} \\ \frac{\mu}{\mu+\nu} & 0 & -\frac{\mu}{2(\mu+2\nu)} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{2\mu+\nu} & 0 & \frac{\mu}{2(\mu+2\nu)} \end{pmatrix},$$

$$V_{21} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\mu+\nu} & -\frac{\mu}{2(\mu+2\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\mu^2}{(\mu+\nu)(2\mu+\nu)} \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{2\mu+\nu} & \frac{\mu}{2(\mu+2\nu)} \end{pmatrix},$$

$$V_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\nu^2}{(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} \\ \frac{\nu}{\mu+\nu} & -\frac{\nu}{2(2\mu+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{\mu+2\nu} & \frac{\nu}{2(2\mu+\nu)} \end{pmatrix}.$$

Найдем векторы

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}{\mu\nu(\mu+\nu)} \\ \frac{\mu(\mu+3\nu)}{2\nu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} \\ \frac{\nu(3\mu+\nu)}{2\mu(\mu+\nu)(2\mu+\nu)} \\ -\frac{3\mu\nu}{2(\mu+\nu)(2\mu+\nu)(2\nu+\mu)} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}{\mu\nu(\mu+\nu)} \\ \frac{\nu(3\mu+\nu)}{2\mu(\mu+\nu)(2\mu+\nu)} \\ \frac{\mu(\mu+3\nu)}{2\nu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)} \\ -\frac{3\nu\mu}{2(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(2\mu+\nu)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что выполняются следующие равенства

$$U_2 = RU_1S, \qquad V_{21} = RUV_{12}S, \qquad V_{22} = RUV_{11}S, \qquad \boldsymbol{q}_2 = R\boldsymbol{q}_1,$$

где R и S — матрицы перестановок такие, что

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_1 + R\boldsymbol{\omega}_2, \qquad \widetilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}_1, \qquad \widetilde{W} = U_1(V_{11} + V_{12}R).$$

Нетрудно проверить, что система (7.22)-(7.23) теперь принимает вид

$$(I - \widetilde{W})\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0},$$
$$\widetilde{\omega}_0 = 1,$$

а формула (7.24) записывается в форме

$$\lambda = \widetilde{\boldsymbol{q}}^T \widetilde{\boldsymbol{\omega}}.$$

После выполнения необходимых вычислений имеем

$$\lambda = P(\mu, \nu)/Q(\mu, \nu),$$

где

$$\begin{aligned} P(\mu, \nu) = {} & 160\mu^{10} + 1776\mu^9\nu + 8220\mu^8\nu^2 + 21378\mu^7\nu^3 + 35595\mu^6\nu^4 + \\ & + 41566\mu^5\nu^5 + 35595\mu^4\nu^6 + 21378\mu^3\nu^7 + 8220\mu^2\nu^8 + \\ & + 1776\mu\nu^9 + 160\nu^{10}, \\ Q(\mu, \nu) = {} & 16\mu\nu(\mu + \nu)(8\mu^8 + 80\mu^7\nu + 321\mu^6\nu^2 + 690\mu^5\nu^3 + 880\mu^4\nu^4 + \\ & + 690\mu^3\nu^5 + 321\mu^2\nu^6 + 80\mu\nu^7 + 8\nu^8), \end{aligned}$$

что совпадает с результатом, полученным в [78].

7.14. Приложения и примеры

7.14.1. Анализ производственных процессов. Рассмотрим систему, состоящую из двух предприятий-партнеров A и B, каждое из которых производит свою собственную продукцию на основе использования продукции другого предприятия. Деятельность отдельного предприятия и системы в целом представляет собой последовательность следующих друг за другом производственных циклов. На каждом цикле предприятие параллельно осуществляет транспортировку продукции предыдущего цикла партнеру и производство новой партии продукции на основе потребления продукции, полученной от партнера.

Для завершения текущего и начала нового производственного цикла на одном предприятии необходимо, чтобы был завершен выпуск текущей партии продукции на этом предприятии, а также осуществлена доставка на него необходимой продукции предприятия-партнера. Очередной производственный цикл всей системы считается завершенным, когда оказываются завершены соответствующие циклы на обоих предприятиях.

Пусть время производства и транспортировки продукции для каждого предприятия задано в виде независимых случайных величин с экспоненциальным распределением вероятностей. Требуется определить среднее время производственного цикла системы.

Для каждого цикла $k=1,2,\ldots,$ введем обозначения:

$x(k)$ — время завершения цикла на предприятии A;

$y(k)$ — время завершения цикла на предприятии B;

α_k и δ_k — длительность процесса производства партии продукции на предприятиях A и B;

β_k и γ_k — продолжительность транспортировки продукции от предприятия B к A и от предприятия A к B.

Параметры экспоненциальных распределений случайных величин α_k, β_k, γ_k и δ_k обозначим соответственно через μ, ν, σ и τ.

Легко видеть, что динамика системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1)+\alpha_k, y(k-1)+\beta_k),\\ y(k) &= \max(x(k-1)+\gamma_k, y(k-1)+\delta_k). \end{aligned}$$

С учетом обозначений

$$\boldsymbol{z}(k)=\begin{pmatrix} x(k)\\ y(k)\end{pmatrix}, \qquad A(k)=\begin{pmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ \gamma_k & \delta_k\end{pmatrix},$$

имеем в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ уравнение

$$\boldsymbol{z}(k) = A(k)\boldsymbol{z}(k-1).$$

Ясно, что задача определения среднего времени производственного цикла системы теперь сводится к нахождению в указанном полукольце средней скорости роста вектора состояний

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{z}(k)\|^{1/k}.$$

Определим среднее время цикла для системы при условии, что $\mu = \nu = \sigma = \tau$.

Найдем матрицы U_i, V_{ij} для всех $i, j = 1, 2$. После выполнения необходимых вычислений получим матрицы

$$U_1 = U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$V_{11} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/6 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/6 \end{pmatrix},$$
$$V_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/6 \end{pmatrix},$$
$$V_{21} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix},$$
$$V_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Вычисление векторов $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ дает следующий результат

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 = \left(\frac{3}{2\mu}, \frac{1}{3\mu}, \frac{1}{3\mu}, -\frac{1}{12\mu}\right)^T.$$

Как нетрудно проверить, для рассматриваемой системы выполняются равенства

$$U_1V_{11} = U_1V_{12}, \qquad U_2V_{21} = U_2V_{22}.$$

Введем векторы $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = (\widetilde{\omega}_0, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \widetilde{\omega}_3)^T$ и $\widetilde{\boldsymbol{q}} = (\widetilde{q}_0, \widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3)^T$ и положим

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \qquad \widetilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}_1,$$

а также

$$\widetilde{W} = U_1V_{11} + U_2V_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/18 & -1/18 & 1/18 \\ 1/2 & -1/18 & -1/18 & 1/18 \\ 1/3 & -1/18 & -1/18 & 1/18 \end{pmatrix}.$$

Теперь система уравнений (7.22)-(7.23) приобретает вид

$$(I - \widetilde{W})\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0},$$
$$\widetilde{\omega}_0 = 1,$$

а средняя скорость роста вектора состояний вычисляется по формуле

$$\lambda = \widetilde{\boldsymbol{q}}^T \widetilde{\boldsymbol{\omega}}.$$

Решая полученную систему, находим $\lambda = 407/(228\mu)$, что соответствует результату, представленному в [99].

Предположим, что затраты времени, например, на производство или транспортировку продукции для одного из предприятий так малы, что могут без существенной потери точности модели считаться нулевыми. Ясно, что предположения такого рода приводят к рассмотренным выше системам, в которых матрица имеет нулевые элементы.

Глава 8

ГРАНИЦЫ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА

8.1. Введение

При исследовании реальных систем с помощью линейных динамических стохастических моделей вида

$$\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1)$$

в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ часто представляет интерес нахождение средней скорости роста λ вектора состояний $\boldsymbol{x}(k)$ (показателя Ляпунова) системы при условии, что случайные матрицы $A(k)$ независимы и одинаково распределены. Во многих приложениях величина показателя Ляпунова является важной характеристикой системы, которая может быть использована при анализе эффективности и оптимизации системы.

Однако, точное решение задачи нахождения величины средней скорости роста известно только для некоторых частных случаев, включая ряд систем с матрицей второго порядка, а также системы с матрицей специального вида, рассмотренных в предыдущих главах. В связи с этим особый интерес приобретает построение границ и разработка эффективных процедур оценивания этой величины.

Проблема оценивания показателя Ляпунова для рассматриваемых систем изучалась в [55, 72]. Простая нижняя граница была предложена в работе [55] в рамках развитой там теории событийных графов. Соответствующее неравенство, представленное в этой работе в терминах теории графов, может быть записано с использованием спектрального радиуса матрицы $\mathsf{E}A(k)$ в виде $\lambda \geq \varrho(\mathsf{E}A(k))$.

Кроме того, в [55] построена верхняя граница на основе результатов теории вероятностей больших уклонений. Вычисление границы требует определение случайной величины b, которая является стохастической границей элементов $a_{ij}(k)$ матрицы $A(k)$ в смысле неравенства $\mathsf{E}f(a_{ij}(k)) \leq \mathsf{E}f(b)$ для любой неубывающей функции

f, с последующим анализом преобразования Крамера этой величины. Похожая оценка предложена и в работе [72].

В главе сначала представлен ряд простых оценок, предложенных и изученных в работах [22, 91], для произвольных, регулярных и положительных матриц, а также даны соответствующие примеры. Затем вводится и изучается класс оценок для систем с неразложимой матрицей на основе использования матриц единичного ранга [22, 26]. Применяемый при этом подход опирается на исследование произведений матриц $A(1)\cdots A(k)$ и заключается в замене каждой матрицы на ее оценку, построенную при помощи матриц вида $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$, где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — некоторые векторы. Такая замена позволяет вместо произведений матриц рассматривать арифметические суммы скалярных произведений соответствующих векторов и тем самым упростить решение. Даны примеры вычисления оценок для систем с матрицей второго порядка, элементы которой имеют экспоненциальное распределение с единичным средним.

8.2. Простые границы для показателя Ляпунова

Пусть имеется стохастическая динамическая система, эволюция которой описывается в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ уравнением

$$\boldsymbol{x}(k) = A^T(k)\boldsymbol{x}(k-1).$$

Предположим, что последовательность $\{A(k)|k \geq 1\}$ состоит из независимых матриц и удовлетворяет условию теоремы 6.3.

Рассмотрим задачу оценки показателя Ляпунова λ системы.

Простые верхняя и нижняя границы для величины λ могут быть установлены следующим образом.

Лемма 8.1. Для любого целого $m \geq 1$ выполняется

$$\sqrt[m]{\varrho(\mathsf{E}A_m)} \leq \lambda \leq \sqrt[m]{\mathsf{E}\|A_m\|}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть $m = 1$. С учетом свойств математического ожидания и нормы имеем двойное неравенство

$$\|(\mathsf{E}A_1)^k\| = \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} \mathsf{E}A(i) \right\| \le \mathsf{E}\|A_k\| =$$
$$= \mathsf{E} \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} A(i) \right\| \le \mathsf{E} \bigotimes_{i=1}^{k} \|A(i)\| = (\mathsf{E}\|A_1\|)^k,$$

откуда следует неравенство

$$\|(\mathsf{E}A_1)^k\|^{1/k} \le \sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|} \le \mathsf{E}\|A_1\|.$$

При $k \to \infty$ требуемый результат следует из теоремы 5.2.

Справедливость неравенства (8.1) при любом целом $m \ge 1$ проверяется аналогично. Действительно, для всех $k = qm$ выполняется неравенство

$$\left\| \bigotimes_{i=1}^{q} \mathsf{E}A(mi-m+1)\cdots A(mi) \right\| \le \mathsf{E}\|A_k\| \le$$
$$\le \mathsf{E} \bigotimes_{i=1}^{q} \|A(mi-m+1)\cdots A(mi)\|,$$

из которого следует

$$\sqrt[m]{\|(\mathsf{E}A_m)^q\|^{1/q}} \le \sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|} \le \sqrt[m]{\mathsf{E}\|A_m\|}.$$

Переходя к пределу при $q \to \infty$, получим неравенство (8.1). $\square$

Отметим, что левое и правое неравенства в (8.1) являются точными в том смысле, что можно указать системы, для которых они превращаются в равенства.

Пример 8.1. Пусть $\{\alpha_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Рассмотрим систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 4.11, матрица $A(k)$ является матрицей подобия с множителем $\alpha_k \oplus \mathbb{1}$. Следовательно,

$$\|A_k\| = (\alpha_1 \oplus \mathbb{1}) \cdots (\alpha_k \oplus \mathbb{1}).$$

Рассмотрим предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|A_k\|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\alpha_1 \oplus \mathbb{1}) \cdots (\alpha_k \oplus \mathbb{1})}.$$

Переходя к обычным обозначениям, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \max(\alpha_i, 0) = \mathsf{E} \max(\alpha_i, 0) \quad \text{с в. } 1,$$

откуда следует, что

$$\lambda = \mathsf{E}(\alpha_1 \oplus \mathbb{1}) = \mathsf{E}\|A_1\|.$$

Пример 8.2. Пусть $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ — последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин. Определим матрицу системы в виде

$$A(k) = \operatorname{diag}(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \beta_k \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что

$$A_k = \operatorname{diag}(\alpha_1 \cdots \alpha_k, \beta_1 \cdots \beta_k),$$

имеем

$$\|A_k\|^{1/k} = (\alpha_1 \cdots \alpha_k)^{1/k} \oplus (\beta_1 \cdots \beta_k)^{1/k}.$$

Вычисление предела приводит к следующему результату

$$\lambda = \mathsf{E}\alpha_1 \oplus \mathsf{E}\beta_1 = \operatorname{tr}(\mathsf{E}A_1) = \varrho(\mathsf{E}A_1).$$

Пример 8.3. Пусть $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ и $\{\delta_k\}$ — последовательности независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение со средним 1. Будем предполагать, что α_k, β_k, γ_k и δ_k — независимы для любого k, $k = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Так же, как раньше, будем называть такую систему экспоненциальной системой второго порядка.

Заметим, что для этой системы в работе [99] получено точное значение $\lambda = 407/228 \approx 1{,}7851$.

Чтобы найти границы (8.1), потребуются значения средних для элементов $(A_m)_{ij}$, а также величины $\|A_m\|$ для матрицы A_m. После соответствующих вычислений для $m = 1, 2, 3$ имеем

$$\mathsf{E}(A_1)_{ij} = 1, \qquad \mathsf{E}\|A_1\| = \frac{25}{12} \approx 2{,}0833,$$

$$\mathsf{E}(A_2)_{ij} = 2{,}75, \qquad \mathsf{E}\|A_2\| = \frac{833}{216} \approx 3{,}8565,$$

$$\mathsf{E}(A_3)_{ij} = \frac{245}{54} \approx 4{,}5370, \qquad \mathsf{E}\|A_3\| = \frac{21937}{3888} \approx 5{,}6422.$$

В табл. 8.1 приведены результаты вычисления верхних и нижних границ для величины λ.

Границы (8.1)	m		
	1	2	3
верхняя	2,0833	1,9282	1,8807
нижняя	1,0000	1,3750	1,5123

Таблица 8.1. Нижние и верхние границы (8.1)

8.3. Системы с регулярной матрицей

Сначала докажем вспомогательные утверждения.

Предложение 8.1. Пусть A и B — независимые случайные матрицы подходящего размера. Тогда, если матрица B является регулярной с вероятностью 1 (с в. 1), то

$$\mathsf{E}\|AB\| \geq \mathsf{E}\|A\| \|(\mathsf{E}B\mathbb{1})^{-}\|^{-1}. \tag{8.2}$$

Если все элементы матрицы B ненулевые с в. 1, то

$$\mathsf{E}\|AB\| \geq \mathsf{E}\|A\| \|\mathsf{E}B^{-}\|^{-1}. \tag{8.3}$$

Доказательство. Применим неравенство (6.3). Для проверки первого неравенства, запишем

$$\mathsf{E}\|AB\| = \mathsf{E}\bigoplus_{i} \|\boldsymbol{a}_i\| \|\boldsymbol{b}^i\| \geq \mathsf{E}\bigoplus_{i} \|\boldsymbol{a}_i\| \mathsf{E}\|\boldsymbol{b}^i\| \geq$$
$$\geq \mathsf{E}\bigoplus_{i} \|\boldsymbol{a}_i\| \min_{j} \mathsf{E}\|\boldsymbol{b}^j\| = \mathsf{E}\|A\| \|(\mathsf{E}B\mathbb{1})^{-}\|^{-1}.$$

Второе неравенство проверяется аналогично:

$$\mathsf{E}\|AB\| \geq \mathsf{E}\|A\mathsf{E}B\| \geq \mathsf{E}\|A\| \min_{i,j} \mathsf{E}b_{ij} = \mathsf{E}\|A\| \|\mathsf{E}B^{-}\|^{-1}. \quad \square$$

Опираясь на (8.2), докажем следующее утверждение.

Лемма 8.2. Если матрица A_1 является регулярной с в. 1, то для любого целого $m \geq 1$ выполняется

$$\lambda \geq \|(\mathsf{E}A_m\mathbb{1})^{-}\|^{-1/m}. \tag{8.4}$$

Доказательство. При $m = 1$ в силу (8.2) имеем

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq$$
$$\geq \mathsf{E}\|A_{k-1}\| \|(\mathsf{E}A_1\mathbb{1})^{-}\|^{-1} \geq \cdots \geq \mathsf{E}\|A_1\| \|(\mathsf{E}A_1\mathbb{1})^{-}\|^{-(k-1)} \geq$$
$$\geq \|(\mathsf{E}A_1\mathbb{1})^{-}\|^{-k},$$

откуда прямо следует неравенство $\lambda \geq \|(\mathsf{E}A_1\mathbb{1})^{-}\|^{-1}$.

В случае произвольного целого $m \geq 1$ положим $k = qm$ и применим аналогичные рассуждения. $\square$

Пример 8.4. Вычислим нижние границы (8.4) для экспоненциальной системы второго порядка, описанной в примере 8.3, при $m = 1, 2, 3$. Сначала найдем математические ожидания

$$(\mathsf{E}A_1\mathbb{1})_i = 1{,}5, \quad (\mathsf{E}A_2\mathbb{1})_i = \frac{119}{36} \approx 3{,}3056, \quad (\mathsf{E}A_3\mathbb{1})_i = \frac{1649}{324} \approx 5{,}0895.$$

Вычисление соответствующей нижней границы дает следующие результаты: $1{,}5000$, $1{,}6528$ и $1{,}6965$.

8.4. Системы с матрицей без нулевых элементов

Если матрица системы не имеет нулевых элементов, то нижнюю границу можно улучшить.

Лемма 8.3. Если матрица A_1 не имеет нулевых элементов с в. 1, то для любых целых $l, m \geq 1$ выполняется

$$\lambda \geq \sqrt[l+m]{\mathsf{E}\|((\mathsf{E}A_l^-)\mathbb{1})^- A_m\|}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Пусть $l = m = 1$. Для всех $k = 2q$ с учетом свойств математического ожидания имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\|A_k\| \geq \mathsf{E}\left\|\bigotimes_{i=1}^{q} A(2i-1)\mathsf{E}A(2i)\right\| \geq \\
\geq \mathsf{E}\left\|\bigotimes_{i=1}^{q} A(2i-1)\mathbb{1}((\mathsf{E}A^-(2i))\mathbb{1})^-\right\| = \\
= \mathsf{E}\|A(1)\mathbb{1}\|\mathsf{E}\left(\bigotimes_{i=1}^{q-1}((\mathsf{E}A^-(2i))\mathbb{1})^- A(2i+1)\mathbb{1}\right)\|((\mathsf{E}A^-(k))\mathbb{1})^-\| = \\
= (\mathsf{E}((\mathsf{E}A_1^-)\mathbb{1})^- A_1\mathbb{1})^{q-1}\mathsf{E}\|A_1\mathbb{1}\|\|((\mathsf{E}A_1^-)\mathbb{1})^-\|.
\end{aligned}$$

При $q \to \infty$ из последнего неравенства следует

$$\lambda \geq \sqrt{\mathsf{E}((\mathsf{E}A_1^-)\mathbb{1})^- A_1\mathbb{1}} = \sqrt{\mathsf{E}\|((\mathsf{E}A_1^-)\mathbb{1})^- A_1\|}.$$

Случай произвольных целых $l, m \geq 1$ рассматривается аналогично. □

Пример 8.5. Найдем нижние границы (8.5) для системы из примера 8.3 при $m = 1, 2, 3$. После выполнения соответствующих вычислений получим результаты, представленные в табл. 8.2

Следствие 8.1. Если матрица A_1 не имеет нулевых элементов с в. 1, то для любого целого $m \geq 1$ выполняется

$$\lambda \geq (\|\mathsf{E}A_1^-\|^{-1}\mathsf{E}\|A_{m-1}\|)^{1/m}. \tag{8.6}$$

Границы (8.5)		m		
		1	2	3
l	1	1,5417	1,6188	1,6606
	2	1,6111	1,6516	1,6784
	3	1,6551	1,6787	1,6965

Таблица 8.2. Нижние границы (8.5)

Доказательство. При $m = 1$ справедливы неравенства

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq \|(\mathsf{E}A_1)^k\| \geq \|\mathsf{E}A_1^-\|^{-k},$$

откуда, учитывая, что $A_0 = I$, имеем

$$\lambda \geq \|\mathsf{E}A_1^-\|^{-1} = \|\mathsf{E}A_1^-\|^{-1}\mathsf{E}\|A_0\|.$$

Для произвольного целого $m \geq 1$ неравенство (8.6) следует из (8.5) и неравенства $(A\mathbb{1})^- \geq \mathbb{1}^T\|A\|^{-1}$:

$$\lambda \geq \sqrt[m]{\mathsf{E}\|((\mathsf{E}A_1^-)\mathbb{1})^- A_{m-1}\|} \geq (\|\mathsf{E}A_1^-\|^{-1}\mathsf{E}\|A_{m-1}\|)^{1/m}. \quad \square$$

Опираясь на неравенство (8.6), можно оценить погрешность аппроксимации значения λ при помощи величины $\sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|}$ относительно метрики ρ в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Лемма 8.4. Если A_1 — положительная матрица с в. 1, то для любого целого $k > 0$ выполняется

$$\rho(\lambda, \sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|}) \leq C^{1/k}, \tag{8.7}$$

где $C = \|\mathsf{E}A_1^-\|\mathsf{E}\|A_1\|$.

Доказательство. В силу неравенства (8.6) имеем

$$\rho(\lambda, \sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|}) = \lambda^{-1}\sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|} \oplus (\sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|})^{-1}\lambda =$$
$$= \lambda^{-1}\sqrt[k]{\mathsf{E}\|A_k\|} \leq (\|\mathsf{E}A_1^-\|^{-1}\mathsf{E}\|A_{k-1}\|)^{-1/k}(\mathsf{E}\|A_1\|\mathsf{E}\|A_{k-1}\|)^{1/k} =$$
$$= (\|\mathsf{E}A_1^-\|\mathsf{E}\|A_1\|)^{1/k}. \quad \square$$

Пример 8.6. Вычислим константу C в оценке (8.7) для системы, рассмотренной в примере 8.3. Учитывая, что $\mathsf{E}\|A_1\| = 25/12$, $\|\mathsf{E}A_1^-\| = -1$, имеем $C = 13/12 \approx 1{,}0833$.

8.5. Системы с неразложимой матрицей

Для оценки величины λ применим следующий прием. Предположим, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ с вероятностью 1 выполняется неравенство $A(k) \leq \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k)$, где $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$ — некоторые случайные векторы. Тогда для матрицы A_k справедливо неравенство

$$A_k \leq \boldsymbol{u}(1) \left(\bigotimes_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{v}^T(i)\boldsymbol{u}(i+1) \right) \boldsymbol{v}^T(k) \qquad \text{с в. 1.}$$

Предположим, что векторы $\boldsymbol{w}(k) = (\boldsymbol{u}^T(k), \boldsymbol{v}^T(k))^T$ одинаково распределены при всех $k = 1, 2, \ldots,$ а математические ожидания $\mathsf{E}\|\boldsymbol{u}(1)\|$ и $\mathsf{E}\|\boldsymbol{v}(1)\|$ являются конечными. Тогда из последнего неравенства следует верхняя оценка

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\|A_k\|^{1/k} \leq \mathsf{E}[\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2)]. \tag{8.8}$$

Аналогичным путем можно получить нижнюю оценку, выбирая векторы $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$ так, чтобы для всех $k = 1, 2, \ldots$ выполнялось неравенство $A(k) \geq \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k)$

Для построения рассматриваемых оценок показателя Ляпунова стохастических систем будем использовать алгебраическую технику оценки произвольной матрицы с помощью матриц единичного ранга, представленную ниже.

8.5.1. Алгебраические неравенства. Допустим, что матрица $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ является неразложимой. Исследуем задачу оценивания A при помощи матриц L и U единичного ранга таких, что

$$L \leq A \leq U.$$

Положим $U = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$, где $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}_+^n$. Рассмотрим неравенство

$$A \leq \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T, \tag{8.9}$$

и заметим, что для любой матрицы A (необязательно неразложимой) оно равносильно неравенству

$$\boldsymbol{u}^- A \leq \boldsymbol{v}^T. \tag{8.10}$$

Действительно, (8.10) прямо следует из (8.9). С другой стороны, из неравенства (8.10) имеем $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-}A \leq \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{T}$, откуда в сочетании с (1.8) получаем (8.9).

Понятно, что любые два вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ такие, что $\boldsymbol{v}^{T} \geq \boldsymbol{u}^{-}A$, будут удовлетворять неравенству (8.9). Учитывая, что при фиксированном $\boldsymbol{u}$ элементы матрицы $U = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{T}$ имеют наименьшие значения при выборе

$$\boldsymbol{v}^{T} = \boldsymbol{u}^{-}A, \tag{8.11}$$

далее будем рассматривать оценки, для которых $U = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-}A$.

Построение оценок (8.9) теперь можно связать с задачей нахождения такого вектора $\boldsymbol{u}$, при котором матрица $U = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-}A$ обладает определенными полезными свойствами, например, сохраняет собственное число и вектор матрицы A или имеет наименьшее возможное значение величины $\|U\|$.

Во многих случаях естественно считать оценку (8.9) тем лучше, чем меньше элементы матрицы U отличаются от соответствующих элементов матрицы A. Тогда вектор $\boldsymbol{u}$ может быть найден как решение задачи

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}_{+}^{n}} \varphi(\boldsymbol{u}; A)$$

для подходящего критерия φ, который в той или иной мере отражает степень близости элементов матрицы A и ее оценки $U = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-}A$.

Задача построения нижних оценок может рассматриваться аналогичным образом и быть представлена в таком же виде, как и в случае верхних оценок.

Пусть $L = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{T}$, где $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{n}$. Как и раньше, можно показать с использованием (1.8), что неравенство $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{T} \leq A$ эквивалентно $\boldsymbol{v}^{T} \leq (A^{-}\boldsymbol{u})^{-}$. Затем, положив

$$\boldsymbol{v}^{T} = (A^{-}\boldsymbol{u})^{-}, \tag{8.12}$$

рассматривать только нижние оценки с матрицей $L = \boldsymbol{u}(A^{-}\boldsymbol{u})^{-}$, выбирая вектор $\boldsymbol{u}$ согласно подходящему критерию.

8.6. Построение оценок для неразложимых матриц

Рассмотрим ряд верхних и нижних оценок для неразложимой матрицы A, которые определяются различными способами выбора вектора $\boldsymbol{u}$.

8.6.1. Верхние оценки. Заметим, что при выборе вектора $\boldsymbol{u}$ равным собственному вектору матрицы A, который соответствует ее спектральному радиусу $\varrho = \varrho(A)$, имеем

$$U\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-} A\boldsymbol{u} = \varrho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^{-}\boldsymbol{u}) = \varrho\boldsymbol{u},$$

откуда следует, что тогда матрица $U = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-} A$ сохраняет собственное число и вектор матрицы A.

Рассмотрим теперь два способа задания критерия φ. Естественной мерой близости матриц A и U, очевидно, является функция

$$\varphi_1(\boldsymbol{u}; A) = \rho(A, U) = \operatorname{tr}(A^{-} U) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-} A A^{-}). \qquad (8.13)$$

Лемма 8.5. Для любой неразложимой матрицы A выполняется равенство

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}_{+}^{n}} \varphi_1(\boldsymbol{u}; A) = \varrho(A A^{-}),$$

где минимум достигается на собственном векторе матрицы AA^{-}, который соответствует $\varrho(AA^{-})$.

Доказательство. Заметим, что

$$\varphi_1(\boldsymbol{u}; A) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-} A A^{-}) = \boldsymbol{u}^{-}(A A^{-})\boldsymbol{u},$$

а затем применим лемму 4.4. □

Еще один простой критерий можно ввести следующим образом. Рассмотрим величину $\|U\| = \|\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-} A\|$. Пусть u_i обозначает координату i вектора $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{a}^j$ — строку j матрицы A. Представим величину $\|U\|$ в виде

$$\|U\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} u_i \bigoplus_{k=1}^{n} u_k^{-1} a_{kj} = \|A\| \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j \neq i} u_i u_j^{-1} \|\boldsymbol{a}^j\|.$$

Определим функцию

$$\varphi_2(\boldsymbol{u}; A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j \neq i} u_i u_j^{-1} \|\boldsymbol{a}^j\|. \tag{8.14}$$

Тогда $\|U\| = \|A\| \oplus \varphi_2(\boldsymbol{u}; A) \geq \|A\|$ и можно ожидать, что оценка будет, вообще говоря, тем точнее, чем меньше будут различаться максимальные элементы матриц U и A, т.е. величины $\|U\|$ и $\|A\|$. Ясно, что с уменьшением значения функции φ_2 величина $\|U\|\|A\|^{-1}$ уменьшается или, по крайней мере, не возрастает.

Лемма 8.6. Для любой неразложимой матрицы A выполняется равенство

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}_+^n} \varphi_2(\boldsymbol{u}; A) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j > i} \|\boldsymbol{a}^i\| \|\boldsymbol{a}^j\| \right)^{1/2},$$

причем минимум достигается, когда вектор $\boldsymbol{u}$ имеет координаты $u_i = \|\boldsymbol{a}^i\|^{1/2}$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Запишем функцию φ_2 в виде

$$\varphi_2(\boldsymbol{u}; A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j > i} \|\boldsymbol{a}^j\| u_i u_j^{-1} \oplus \|\boldsymbol{a}^i\| u_i^{-1} u_j.$$

Учитывая, что функция $f(z) = c_1 z \oplus c_2 z^{-1}$ при $c_1, c_2 \in \mathbb{X}_+$ имеет минимум при $z = \sqrt{c_2/c_1}$ равный $\sqrt{c_1 c_2}$ (см. рис. 8.1), получим неравенство

$$\|\boldsymbol{a}^j\| u_i u_j^{-1} \oplus \|\boldsymbol{a}^i\| u_i^{-1} u_j \geq \sqrt{\|\boldsymbol{a}^i\| \|\boldsymbol{a}^j\|},$$

откуда следует, что

$$\varphi_2(\boldsymbol{u}; A) \geq \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j > i} \|\boldsymbol{a}^i\| \|\boldsymbol{a}^j\| \right)^{1/2}.$$

Осталось проверить, что последнее неравенство превращается в равенство для вектора $\boldsymbol{u}$ с координатами $u_i = \|\boldsymbol{a}^i\|^{1/2}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. $\square$

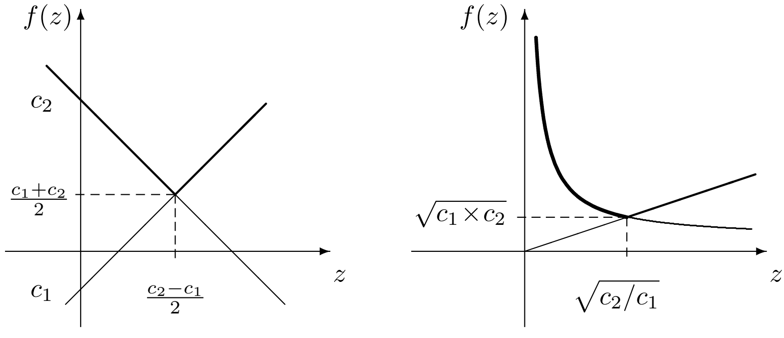


Рис. 8.1. График функции $f(z) = c_1 z \oplus c_2 z^{-1}$ в $\mathbb{R}_{\max,+}$ и $\mathbb{R}_{\max,\times}$

8.6.2. Нижние оценки. Определим функцию, которая будет для нижних оценок выполнять ту же роль, что и критерий (8.13) — для верхних

$$\psi_1(\boldsymbol{u}; A) = \rho(A, L) = \operatorname{tr}(L^- A) = \operatorname{tr}(A(\boldsymbol{u}(A^-\boldsymbol{u})^-)^-). \tag{8.15}$$

Нетрудно видеть, что на самом деле $\psi_1(\boldsymbol{u}; A) = \varphi_1(\boldsymbol{u}; A)$. Действительно,

$$\psi_1(\boldsymbol{u}; A) = \operatorname{tr}(AA^-\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^-) = \boldsymbol{u}^- AA^-\boldsymbol{u}.$$

Таким образом, выбор в качестве $\boldsymbol{u}$ собственного вектора матрицы AA^- является оптимальным одновременно для верхней и нижней оценок в соответствии с критериями (8.13) и (8.15). Можно показать, что такой вектор обеспечивает также минимум функции

$$\delta(\boldsymbol{u}; A) = \rho(L, U) = \operatorname{tr}(L^- U).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\delta(\boldsymbol{u}; A) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^- AA^-\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^-) = \boldsymbol{u}^- AA^-\boldsymbol{u}.$$

В заключение рассмотрим матрицу $L^- = A^-\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^- \geq A^-$. Учитывая, что

$$\|L^-\| = \|A^-\| \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j \neq i} \|(\boldsymbol{a}^i)^-\| u_i u_j^{-1},$$

введем функцию

$$\psi_2(\boldsymbol{u}; A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j \neq i} \|(\boldsymbol{a}^i)^-\| u_i u_j^{-1}. \tag{8.16}$$

Легко понять, что для нижней оценки эта функция представляет собой некоторый аналог критерия (8.14). Также как при доказательстве леммы 8.6 можно показать, что

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n} \psi_2(\boldsymbol{u}; A) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j > i} \|(\boldsymbol{a}^i)^-\| \|(\boldsymbol{a}^j)^-\| \right)^{1/2},$$

причем минимум достигается для вектора $\boldsymbol{u}$, координаты которого $u_i = \|(\boldsymbol{a}^i)^-\|^{-1/2}$, $i = 1, \ldots, n$.

8.7. Примеры вычисления оценок

Покажем, как полученные результаты могут быть применены для оценки показателя Ляпунова экспоненциальной динамической системы второго порядка в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Рассмотрим систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ и $\{\delta_k\}$ — последовательности независимых случайных величин, которые имеют экспоненциальное распределение со средним 1, а также, что случайные величины α_k, β_k, γ_k и δ_k — независимы при любом $k = 1, 2, \ldots$ Ясно, что так определенная матрица $A(k)$ является неразложимой.

Заметим, что для рассматриваемой системы средняя скорость роста вектора состояний $\lambda = 407/228 \approx 1{,}7851$ (см., например [99]).

Пример 8.7. Найдем верхнюю оценку (8.9) для λ, которая соответствуют выбору в качестве $\boldsymbol{u}(k)$ собственного вектора матрицы $A(k)$. По формуле (4.3) определим спектральный радиус матрицы

$$\varrho_k = \alpha_k \oplus \sqrt{\beta_k \gamma_k} \oplus \delta_k.$$

Нетрудно проверить, что собственный вектор $\boldsymbol{u}(k)$, соответствующий ρ_k, имеет вид

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha_k \oplus \sqrt{\beta_k\gamma_k} \\ \gamma_k \end{pmatrix}, & \text{если } \alpha_k \geq \delta_k, \\ \\ \begin{pmatrix} \beta_k \\ \sqrt{\beta_k\gamma_k} \oplus \delta_k \end{pmatrix}, & \text{если } \alpha_k < \delta_k. \end{cases}$$

Теперь найдем вектор $\boldsymbol{v}(k)$, используя (8.11)

$$\boldsymbol{v}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_k(\alpha_k \oplus \sqrt{\beta_k\gamma_k})^{-1} \oplus \gamma_k^{-1}\delta_k \end{pmatrix}, & \text{если } \alpha_k \geq \delta_k, \\ \\ \begin{pmatrix} \alpha_k\beta_k^{-1} \oplus (\sqrt{\beta_k\gamma_k} \oplus \delta_k)^{-1}\gamma_k \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{если } \alpha_k < \delta_k. \end{cases}$$

Чтобы определить величину оценки (8.9), осталось найти значение $\mathsf{E}\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2)$. Это можно сделать, например, посредством построения двумерных распределений вероятностей для каждого из векторов $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$, а затем распределения случайной величины $\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2)$. Выполнив все необходимые действия, получим

$$\lambda \leq \mathsf{E}\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \frac{61021}{30240} \approx 2{,}0179.$$

Пример 8.8. Для нахождения оценок в соответствии с критериями (8.13) и (8.15) сначала рассмотрим матрицу

$$A(k)A^-(k) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \alpha_k\gamma_k^{-1} \oplus \beta_k\delta_k^{-1} \\ \alpha_k^{-1}\gamma_k \oplus \beta_k^{-1}\delta_k & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{1} = 0$, и определим ее спектральный радиус

$$\varrho_k = \sqrt{(\alpha_k\gamma_k^{-1} \oplus \beta_k\delta_k^{-1})(\alpha_k^{-1}\gamma_k \oplus \beta_k^{-1}\delta_k)} = \\ = (\alpha_k\beta_k^{-1}\gamma_k^{-1}\delta_k \oplus \alpha_k^{-1}\beta_k\gamma_k\delta_k^{-1})^{1/2}.$$

Как нетрудно проверить, числу ϱ_k соответствует собственный вектор

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_k\beta_k} \\ \sqrt{\gamma_k\delta_k} \end{pmatrix}.$$

Применяя (8.11), найдем вектор $\boldsymbol{v}(k)$ для верхней оценки

$$\boldsymbol{v}(k) = \begin{pmatrix} (\alpha_k\beta_k^{-1} \oplus \gamma_k\delta_k^{-1})^{1/2} \\ (\alpha_k^{-1}\beta_k \oplus \gamma_k^{-1}\delta_k)^{1/2} \end{pmatrix},$$

а затем величину

$$\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \sqrt{(\alpha_1\beta_1^{-1} \oplus \gamma_1\delta_1^{-1})\alpha_2\beta_2 \oplus (\alpha_1^{-1}\beta_1 \oplus \gamma_1^{-1}\delta_1)\gamma_2\delta_2}.$$

После вычисления математического ожидания будем иметь

$$\lambda \leq \mathsf{E}\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \frac{123}{64} \approx 1{,}9219.$$

Определим значение нижней оценки. Вектор $\boldsymbol{v}(k)$ теперь вычисляется по формуле (8.12) и принимает вид

$$\boldsymbol{v}(k) = \begin{pmatrix} (\alpha_k^{-1}\beta_k \oplus \gamma_k^{-1}\delta_k)^{-1/2} \\ (\alpha_k\beta_k^{-1} \oplus \gamma_k\delta_k^{-1})^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \sqrt{(\alpha_1^{-1}\beta_1 \oplus \gamma_1^{-1}\delta_1)^{-1}\alpha_2\beta_2 \oplus (\alpha_1\beta_1^{-1} \oplus \gamma_1\delta_1^{-1})^{-1}\gamma_2\delta_2},$$

имеем оценку

$$\lambda \geq \mathsf{E}\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \frac{75}{64} \approx 1{,}1719.$$

Пример 8.9. Вычислим оценки в соответствии с критериями (8.14) и (8.16). Для верхней оценки имеем векторы

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{pmatrix} (\alpha_k \oplus \beta_k)^{1/2} \\ (\gamma_k \oplus \delta_k)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k(\alpha_k \oplus \beta_k)^{-1/2} \oplus \gamma_k(\gamma_k \oplus \delta_k)^{-1/2} \\ \beta_k(\alpha_k \oplus \beta_k)^{-1/2} \oplus \delta_k(\gamma_k \oplus \delta_k)^{-1/2} \end{pmatrix},$$

а также величину

$$\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \left(\alpha_1(\alpha_1 \oplus \beta_1)^{-1/2} \oplus \gamma_1(\gamma_1 \oplus \delta_1)^{-1/2}\right)(\alpha_2 \oplus \beta_2)^{1/2} \oplus$$
$$\oplus \left(\beta_1(\alpha_1 \oplus \beta_1)^{-1/2} \oplus \delta_1(\gamma_1 \oplus \delta_1)^{-1/2}\right)(\gamma_2 \oplus \delta_2)^{1/2}.$$

Вычисление математического ожидания дает оценку

$$\lambda \leq \mathsf{E}\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \frac{21601}{11340} \approx 1{,}9049.$$

Для нижней оценки векторы $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$ принимают вид

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{pmatrix} (\alpha_k^{-1} \oplus \beta_k^{-1})^{-1/2} \\ (\gamma_k^{-1} \oplus \delta_k^{-1})^{-1/2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}(k) = \begin{pmatrix} \left(\alpha_k^{-1}(\alpha_k^{-1} \oplus \beta_k^{-1})^{-1/2} \oplus \gamma_k^{-1}(\gamma_k^{-1} \oplus \delta_k^{-1})^{-1/2}\right)^{-1} \\ \left(\beta_k^{-1}(\alpha_k^{-1} \oplus \beta_k^{-1})^{-1/2} \oplus \delta_k^{-1}(\gamma_k^{-1} \oplus \delta_k^{-1})^{-1/2}\right)^{-1} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \\ &= \left(\alpha_1^{-1}(\alpha_1^{-1} \oplus \beta_1^{-1})^{-1/2} \oplus \gamma_1^{-1}(\gamma_1^{-1} \oplus \delta_1^{-1})^{-1/2}\right)^{-1} (\alpha_2^{-1} \oplus \beta_2^{-1})^{-1/2} \oplus \\ &\oplus \left(\beta_1^{-1}(\alpha_1^{-1} \oplus \beta_1^{-1})^{-1/2} \oplus \delta_1^{-1}(\gamma_1^{-1} \oplus \delta_1^{-1})^{-1/2}\right)^{-1} (\gamma_2^{-1} \oplus \delta_2^{-1})^{-1/2}. \end{aligned}$$

Вычисляя математическое ожидание, приходим к оценке:

$$\lambda \geq \mathsf{E}\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2) = \frac{223}{270} \approx 0{,}8259.$$

Приведенные примеры показывают, что для рассматриваемой системы второго порядка наилучшие результаты при вычислении верхних оценок средней скорости роста вектора состояний дают оценки, полученные в соответствии с критериями (8.13) и (8.14), которые, кроме того, являются более точными по сравнению с верхней оценкой (8.1). В то же время из полученных результатов можно заключить, что нижние оценки оказываются менее точными, чем оценки (8.4) и (8.5).

Глава 9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЕТЕЙ С ОЧЕРЕДЯМИ

9.1. Введение

Среди моделей сетей с очередями, применяемых для описания реальных систем и процессов, определенный интерес представляет класс моделей, в которых наряду с обычными процедурами обслуживания требований могут выполняться вспомогательные операции «разъединения» (fork) и «объединения» (join). Эти операции обеспечивают возможность представить в модели объединение (сборку) нескольких требований в одно, а также разъединение (расщепление) требования на несколько новых требований. Такие модели обычно называют сетями с разъединением-объединением требований (fork-join queueing networks) или сетями с синхронизацией поступления и убытия требований [1, 56].

Модели сетей с синхронизацией оказываются удобным инструментом описания производственных систем, бизнес-процессов, сетей передачи сообщений, вычислительных систем и т. п. Примером операций объединения и разъединения в реальных системах может служить разделение сообщения на отдельные пакеты, предназначенные для передачи по различным маршрутам в сети передачи данных, и восстановление сообщения из пакетов в конечном пункте его доставки. Другие примеры можно найти, например, в [1].

Особенностью рассматриваемого класса моделей является возможность применения аппарата идемпотентной алгебры для описания и анализа динамики системы. Ниже будет показано, что любая система рассматриваемого класса может быть описана при помощи линейного в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$ уравнения

$$\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1), \tag{9.1}$$

где $\boldsymbol{x}(k)$ — вектор, который описывает k-ое состояние системы, $A(k)$ — некоторая переходная матрица системы.

Применение аппарата идемпотентной алгебры, который позволяет представить динамику сетей в компактной форме при помощи уравнений вида (9.1), открывает новые возможности для исследования сетей с очередями. В частности, алгебраический подход оказывается достаточно продуктивным при изучении стохастических моделей сетей, для которых вектор $\boldsymbol{x}(k)$ и матрица $A(k)$ являются случайными, а уравнение (9.1) представляет собой стохастическое обобщенное разностное уравнение [55, 71, 89, 21, 76, 33].

Наконец, описание динамики системы при помощи уравнения (9.1) оказывается весьма полезным при разработке эффективных универсальных алгоритмов и процедур имитационного моделирования сетей с очередями [67, 54, 85], включая алгоритмы и процедуры, предназначенные для моделирования с использованием многопроцессорных параллельных вычислительных систем [6, 46].

В главе рассматриваются алгебраические модели динамики систем с очередями, предложенные и изученные в работах [83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 20, 21]. Сначала строится модель сети с неограниченной емкостью накопителей и произвольным числом требований, которые могут находиться в узлах в начальный момент времени. Для этой модели составляется неявное уравнение для вектора состояний системы, которое имеет вид неоднородного линейного уравнения 2-го рода в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$. Даны условия, при которых уравнение разрешимо относительно вектора состояний, и представлено его решение в виде линейного рекуррентного динамического уравнения.

Полученные результаты затем распространяются на модели сетей с ограниченной емкостью накопителей и возможностью блокировки в соответствии с производственным и коммуникационным типом блокирования. Приведены примеры построения моделей для различных систем, включая открытые и замкнутые многофазные системы, а также системы с синхронизацией движения требований.

В заключение рассмотрены последовательные и параллельные алгоритмы имитационного моделирования для многофазных систем и исследована их эффективность [64, 85].

9.2. Сети с синхронизацией движения требований

Рассмотрим сеть, состоящую из n узлов, в каждом из которых имеется обслуживающее устройство и накопитель, предназначенный для размещения требований, поступивших в узел. Топология сети описывается ориентированным графом $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$, где $V = \{1, \dots, n\}$ — множество вершин графа, соответствующих узлам сети, а $E = \{(i, j)\} \subset V \times V$ — множество дуг графа, определяющих маршруты движения требований.

Для любого узла $i \in V$ определим множества узлов

$$P(i) = \{j | (j, i) \in E\}, \qquad S(i) = \{j | (i, j) \in E\}.$$

Каждый узел i, для которого выполняется $P(i) = \emptyset$, рассматривается как источник бесконечного потока требований, поступающих в систему. Требования выводятся из системы после обслуживания в узлах i, для которых $S(i) = \emptyset$.

В начальный момент времени все обслуживающие устройства сети свободны, очередь требований в каждом узле-источнике имеет бесконечную длину, а очередь в любом другом узле i содержит c_i, $0 \leq c_i < \infty$, требований.

Предполагается, что процессы обслуживания требований в узлах сети удовлетворяют некоторым ограничениям по синхронизации. Механизмы синхронизации реализуются при помощи вспомогательных операций «объединения» (join) и «разъединения» (fork), которые выполняются в узлах соответственно до и после обслуживания требования. Выполнение операции объединения в узле i состоит в том, что требование не присоединяется к очереди до тех пор, пока в узел не поступит по одному требованию из каждого узла $j \in P(i)$. Указанные требования объединяются в одно, которое затем присоединяется к очереди требований, ожидающих обслуживания в узле i.

Операция разъединения в узле i выполняется всякий раз, когда завершается обслуживание очередного требования. Требование замещается новыми требованиями, количество которых равно числу узлов множества $S(i)$. Затем новые требования одновременно покидают i и направляются по одному в каждый из узлов $j \in S(i)$.

Операции объединения и разъединения, а также перемещение требований в сети от узла к узлу осуществляются мгновенно.

9.3. Динамическое уравнение

Обозначим через τ_{ik} продолжительность, а через $u_i(k)$ и $x_i(k)$ моменты времени начала и завершения k-го обслуживания в узле i, соответственно.

При условии, что система начинает функционировать в нулевой момент времени, положим $x_i(0) = 0$ и $x_i(k) = -\infty$ для всех $k < 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Нетрудно видеть, что динамика сети может быть описана следующими двумя уравнениями

$$x_i(k) = \max(u_i(k), x_i(k-1)) + \tau_{ik},$$
$$u_i(k) = \begin{cases} \max\limits_{j \in P(i)} x_j(k - c_i), & \text{если } P(i) \neq \emptyset, \\ -\infty, & \text{если } P(i) = \emptyset. \end{cases}$$

Эти уравнения можно представить как уравнения в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$

$$x_i(k) = \tau_{ik}(u_i(k) \oplus x_i(k-1)), \tag{9.2}$$
$$u_i(k) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{j \in P(i)} x_j(k - c_i), & \text{если } P(i) \neq \emptyset, \\ \mathbb{0}, & \text{если } P(i) = \emptyset. \end{cases} \tag{9.3}$$

Чтобы записать полученные уравнения в матричном виде, введем векторы

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix},$$

а также диагональную матрицу

$$\mathcal{T}_k = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Выберем число $M=\max\{c_i|c_i<\infty, i=1,\ldots,n\}$. Для каждого $m=0,1,\ldots,M$ определим матрицу G_m с элементами

$$\{G_m\}_{ij}=\begin{cases}\mathbb{1}, & \text{если } i\in P(j) \text{ и } m=c_j,\\ \mathbb{0}, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Ясно, что матрица G_m может рассматриваться как матрица смежности графа $\mathcal{G}_m=\langle V,E_m\rangle$, где $E_m=\{(i,j)|i\in P(j), c_j=m\}$.

Теперь уравнения (9.2) и (9.3) могут быть записаны в матричном виде так

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)&=\mathcal{T}_k(\boldsymbol{u}(k)\oplus\boldsymbol{x}(k-1)),\\ \boldsymbol{u}(k)&=\bigoplus_{m=0}^{M}G_m^T\boldsymbol{x}(k-m).\end{aligned}$$

Объединяя оба уравнения, получим неявное уравнение относительно $\boldsymbol{x}(k)$

$$\boldsymbol{x}(k)=\mathcal{T}_kG_0^T\boldsymbol{x}(k)\oplus\mathcal{T}_k\boldsymbol{x}(k-1)\oplus\mathcal{T}_k\bigoplus_{m=1}^{M}G_m^T\boldsymbol{x}(k-m). \tag{9.4}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 9.1. Пусть граф $\mathcal{G}_0$ является ациклическим, r — наибольшая длина пути в этом графе.

Тогда уравнение (9.4) разрешимо относительно $\boldsymbol{x}(k)$ в форме

$$\boldsymbol{x}(k)=\bigoplus_{m=1}^{M}A_m(k)\boldsymbol{x}(k-m), \tag{9.5}$$

где

$$A_1(k)=(I\oplus\mathcal{T}_kG_0^T)^r\mathcal{T}_k(I\oplus G_1^T), \tag{9.6}$$

$$A_m(k)=(I\oplus\mathcal{T}_kG_0^T)^r\mathcal{T}_kG_m^T,\quad m=2,\ldots,M. \tag{9.7}$$

Доказательство. Уравнение (9.4) является линейным неоднородным уравнением относительно $\boldsymbol{x}(k)$ с матрицей $\mathcal{T}_kG_0^T$.

В силу того, что граф $\mathcal{G}_0$ является ациклическим, для соответствующей матрицы G_0 выполняется $\mathrm{Tr}(G_0)=\mathbb{0}$. Учитывая диагональную форму матрицы $\mathcal{T}_k$, имеем $\mathrm{Tr}(\mathcal{T}_kG_0^T)=\mathbb{0}$.

По теореме 3.2 существует единственное решение уравнения, которое записывается в виде

$$\boldsymbol{x}(k) = (\mathcal{T}_k G_0^T)^+ \left(\mathcal{T}_k \boldsymbol{x}(k-1) \oplus \mathcal{T}_k \bigoplus_{m=1}^{M} G_m^T \boldsymbol{x}(k-m) \right).$$

Любой путь в графе $\mathcal{G}_0$ состоит из не более чем r дуг. Следовательно, $(\mathcal{T}_k G_0^T)^q = G_0^q = \mathbb{0}$ для всех $q \geq r$. Осталось заметить, что тогда

$$(\mathcal{T}_k G_0^T)^+ = I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}_k G_0^T)^r = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r. \quad \square$$

Введем расширенный вектор состояний

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(k) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{x}(k-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}(k-M+1) \end{pmatrix}$$

и расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A}(k) = \begin{pmatrix} A_1(k) & \ldots & A_{M-1}(k) & A_M(k) \\ I & & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbb{0} & & I & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, динамическое уравнение системы может быть представлено в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(k) = \widetilde{A}(k) \widetilde{\boldsymbol{x}}(k-1).$$

9.4. Сети с конечной емкостью накопителей

Будем предполагать, что емкость накопителей в некоторых узлах сети является конечной. В сетях с ограниченной емкостью накопителей возможно блокирование (запрет) передвижения требований от одного узла к другому, например, из-за отсутствия свободного места в накопителе узла, в который направляется требование. Различают два основных типа блокировки: производственный тип (manufacturing blocking) и коммуникационный тип (communication blocking) [62, 67].

9.4.1. Производственный тип блокировки. Такой тип блокировки обычно возникает в моделях производственных процессов. Например, сборка готовых изделий и передача их на склад готовой продукции могут быть приостановлены ввиду отсутствия свободного места на складе.

Производственный механизм блокирования заключается в том, что требование после завершения обслуживания не может освободить обслуживающее устройство и перейти в следующий узел, если накопитель этого узла заполнен другими требованиями.

Для каждого узла $i = 1, \ldots, n$ обозначим через b_i максимальное число требований, которые могут быть размещены в накопителе (емкость накопителя). Заметим, что $1 \leq b_i \leq \infty$ и $c_i < b_i$.

Пусть $v_i(k)$ — момент времени, когда для k-го требования в узле i в накопителях каждого из узлов $j \in S(i)$ появится по крайне мере одно свободное место. Уравнение (9.2) тогда примет вид

$$x_i(k) = \tau_{ik}(u_i(k) \oplus x_i(k-1)) \oplus v_i(k), \tag{9.8}$$

где

$$v_i(k) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{j \in S(i)} x_j(k - b_j), & \text{если } S(i) \neq \emptyset, \\ \mathbb{0}, & \text{если } S(i) = \emptyset. \end{cases} \tag{9.9}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} M_1 &= \max\{c_i | c_i < \infty, i = 1, \ldots, n\}, \\ M_2 &= \max\{b_i | b_i < \infty, i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

и определим величину $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Введем вектор

$$\boldsymbol{v}(k) = \begin{pmatrix} v_1(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \end{pmatrix},$$

а также матрицы H_m, $m = 1, \ldots, M_2$, с элементами

$$\{H_m\}_{ij} = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{если } j \in S(i) \text{ и } m = b_j, \\ \mathbb{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Записывая уравнения (9.8) и (9.9) в матричной форме, имеем

$$\boldsymbol{x}(k) = \mathcal{T}_k(\boldsymbol{u}(k) \oplus \boldsymbol{x}(k-1)) \oplus \boldsymbol{v}(k),$$
$$\boldsymbol{u}(k) = \bigoplus_{m=0}^{M} G_m^T \boldsymbol{x}(k-m),$$
$$\boldsymbol{v}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} H_m \boldsymbol{x}(k-m).$$

Положив $G_m = \mathbb{0}$ для всех $m = M_1+1, M_1+2, \ldots, M_2$, если $M_2 > M_1$, приходим к уравнению

$$\boldsymbol{x}(k) = \mathcal{T}_k G_0^T \boldsymbol{x}(k) \oplus \mathcal{T}_k \boldsymbol{x}(k-1) \oplus \bigoplus_{m=1}^{M} (\mathcal{T}_k G_m^T \oplus H_m) \boldsymbol{x}(k-m). \quad (9.10)$$

9.4.2. Коммуникационный тип блокировки. Пусть в сети действует правило, при котором обслуживание требования в узле i не начинается до тех пор, пока в каждом из узлов $j \in S(i)$ не окажется свободного места. Такой механизм блокирования отражает особенности работы коммуникационных сетей, в которых, например, обработка пакета данных начинается только тогда, когда имеется свободный канал для его дальнейшей передачи.

С учетом обозначений, введенных выше, скалярное уравнение для $x_i(k)$ записывается в виде

$$x_i(k) = \tau_{ik}(u_i(k) \oplus x_i(k-1) \oplus v_i(k)).$$

В матричной форме имеем уравнения

$$\boldsymbol{x}(k) = \mathcal{T}_k(\boldsymbol{u}(k) \oplus \boldsymbol{x}(k-1) \oplus \boldsymbol{v}(k)),$$
$$\boldsymbol{u}(k) = \bigoplus_{m=0}^{M} G_m^T \boldsymbol{x}(k-m),$$
$$\boldsymbol{v}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} H_m \boldsymbol{x}(k-m).$$

После соответствующих подстановок приходим к уравнению

$$\boldsymbol{x}(k) = \mathcal{T}_k G_0^T \boldsymbol{x}(k) \oplus \mathcal{T}_k \boldsymbol{x}(k-1) \oplus \mathcal{T}_k \bigoplus_{m=1}^{M} (G_m^T \oplus H_m) \boldsymbol{x}(k-m). \quad (9.11)$$

Так же, как при доказательстве предыдущей леммы, нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 9.2. Пусть граф $\mathcal{G}_0$ является ациклическим, r — наибольшая длина пути в этом графе.

Тогда уравнения (9.10) и (9.11) разрешимы относительно $\boldsymbol{x}(k)$ в форме

$$\boldsymbol{x}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k) \boldsymbol{x}(k-m), \quad (9.12)$$

где матрицы $A_m(k)$ для уравнения (9.10) определяются так

$$A_1(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r (\mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) \oplus H_1), \quad (9.13)$$

$$A_m(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r (\mathcal{T}_k G_m^T \oplus H_m), \quad m = 2, \ldots, M; \quad (9.14)$$

а для уравнения (9.11) так

$$A_1(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T \oplus H_1), \quad (9.15)$$

$$A_m(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k (G_m^T \oplus H_m), \quad m = 2, \ldots, M. \quad (9.16)$$

9.5. Примеры моделей сетей

9.5.1. Многофазные системы. Многофазные системы могут рассматриваться как сети с простейшей (линейной) топологией, в которых не предусмотрено выполнение операций объединения и разъединения требований.

Рассмотрим открытую многофазную систему, состоящую из n узлов с неограниченной емкостью накопителей (рис. 9.1).

Для такой системы равенство (9.3) записывается в виде

$$u_i(k) = \begin{cases} \mathbb{0}, & \text{если } i = 1, \\ x_{i-1}(k - c_i), & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

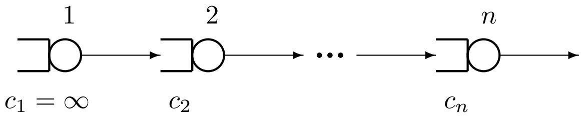


Рис. 9.1. Открытая многофазная система

При условиях $c_1 = \infty$ и $c_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ выполняется $M = 0$. Имеем матрицу

$$G_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \ldots & \ldots & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

которая совпадает с матрицей смежности графа всей сети.

Полагая $G_1 = \mathbb{0}$, получим уравнение (9.1) с матрицей

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^{n-1} \mathcal{T}_k = \\ = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \ldots & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tau_{1k} \cdots \tau_{nk} & \tau_{2k} \cdots \tau_{nk} & \ldots & \tau_{nk} \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Рассмотрим замкнутую систему с неограниченной емкостью накопителей (рис. 9.2).

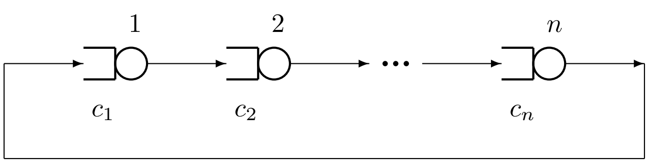


Рис. 9.2. Замкнутая многофазная система

Для рассматриваемой системы уравнение (9.3) принимает вид

$$u_i(k) = \begin{cases} x_n(k - c_1), & \text{если } i = 1, \\ x_{i-1}(k - c_i), & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

В случае, когда $c_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, имеем $M = 1$,

$$G_0 = \mathbb{0}, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \ddots & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & \ldots & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Матрица системы записывается в виде

$$A(k) = \mathcal{T}_k(I \oplus G_1^T) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \ldots & \mathbb{0} & \tau_{1k} \\ \tau_{2k} & \tau_{2k} & & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & & \tau_{nk} & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

9.5.2. Многофазные системы с блокированием. Предположим, что все узлы открытой многофазной системы, за исключением узла 1, могут иметь ограниченную емкость накопителей (рис. 9.3).

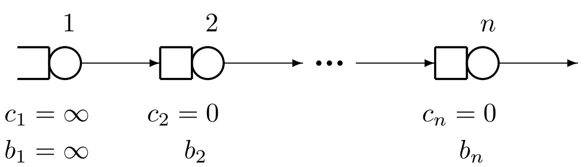


Рис. 9.3. Многофазная система с конечной емкостью накопителей

Предположим, что $b_1 = \infty$ и $b_2 = \cdots = b_n = 1$. В этом случае

$$u_i(k) = \begin{cases} \mathbb{0}, & \text{если } i = 1, \\ x_{i-1}(k), & \text{если } i > 1, \end{cases} \qquad v_i(k) = \begin{cases} x_{i+1}(k-1), & \text{если } i < n, \\ \mathbb{0}, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Кроме того, для рассматриваемой системы выполняется $M=1$,

$$G_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \dots & \dots & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \mathbb{0}, \qquad H_1 = G_0.$$

При условии, что в системе действует производственный тип блокирования, матрица системы записывается в виде

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^{n-1}(\mathcal{T}_k \oplus G_0) =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{1} & & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbb{1} \\ \tau_{1k}\cdots\tau_{nk} & \tau_{2k}\cdots\tau_{nk} & \dots & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Если в системе применяется коммуникационный механизм блокирования, то имеем матрицу

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^{n-1}\mathcal{T}_k(I \oplus G_0) =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \tau_{1k} & & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{1k}\tau_{2k} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \tau_{n-1,k} \\ \tau_{1k}\cdots\tau_{nk} & \tau_{1k}\cdots\tau_{nk} & \dots & \tau_{n-1,k}\tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему, состоящую из $n=3$ узлов, в которой действует производственный механизм блокирования. Предположим, что $b_1 = b_2 = \infty$ и $b_3 = 1$. В этом случае имеем $M=1$,

$$G_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \mathbb{0}, \qquad H_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу системы

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2(\mathcal{T}_k \oplus H_1) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbb{1} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{3k} \end{pmatrix}. \quad (9.18)$$

Пусть в системе действует коммуникационный тип блокирования при условии, что $n = 3$, $b_1 = \infty$ и $b_2 = b_3 = 1$. Тогда $M = 1$, $G_1 = \mathbb{0}$ и $H_1 = G_0$, а матрица системы принимает вид

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2 \mathcal{T}_k (I \oplus G_0) = \\ = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \tau_{1k} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

9.5.3. Сеть с синхронизацией движения требований. Перейдем к моделям систем, в которых могут выполняться операции объединения и разъединения требований.

Рассмотрим сеть с синхронизацией и неограниченной емкостью накопителей в узлах, представленную на рис. 9.4.

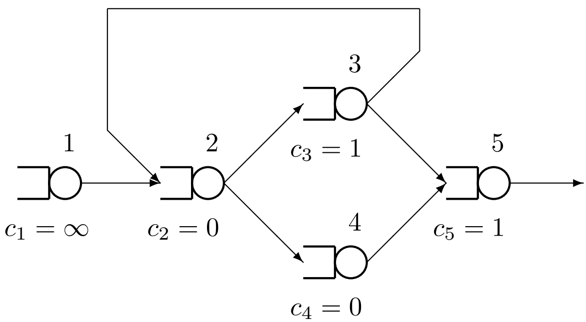


Рис. 9.4. Сеть с синхронизацией движения требований

Ясно, что для рассматриваемой сети $M = 1$. Найдем матрицы

$$G_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $r=2$, приходим к уравнению (9.1) с матрицей

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2 \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

9.5.4. Карусельный механизм маршрутизации. В моделях систем, рассмотренных выше, использовалась некоторая постоянная для всех требований процедура выбора маршрута, при которой требования, покидающие узел, направлялись к одним и тем же заранее определенным узлам. Однако, модели сетей с синхронизацией могут быть также применены к описанию систем с переменной регулярной маршрутизацией. В таких системах требования после обслуживания в узле могут направляться к различным узлам, выбор которых осуществляется в соответствии с некоторой регулярной (например, циклической) процедурой.

Рассмотрим открытую систему, изображенную на рис 9.5, которая состоит из $l+1$ узла.

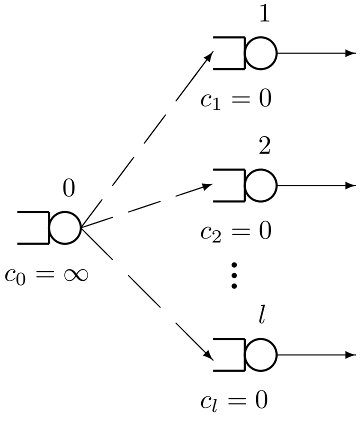


Рис. 9.5. Система с карусельным механизмом маршрутизации

Узел 0 системы представляет внешний источник требований. Каждое требование, поступающее в систему, направляется в один из узлов $i = 1, \ldots, l$ в соответствии с круговым (карусельным) механизмом маршрутизации, который состоит в следующем. Первое требование переходит в узел 1, второе переходит в узел 2, и т.д. После l-го требования, переданного в узел l, следующее требование направляется в узел 1, и вся процедура повторяется снова. Подобный карусельный механизм маршрутизации используется, например, в гибких автоматизированных производственных системах, а также в моделях вычислительных систем и процессов.

Заметим, что рассматриваемая система может быть заменена эквивалентной сетью с синхронизацией, которая состоит из $n = 2l$ узлов и представлена на рис. 9.6.

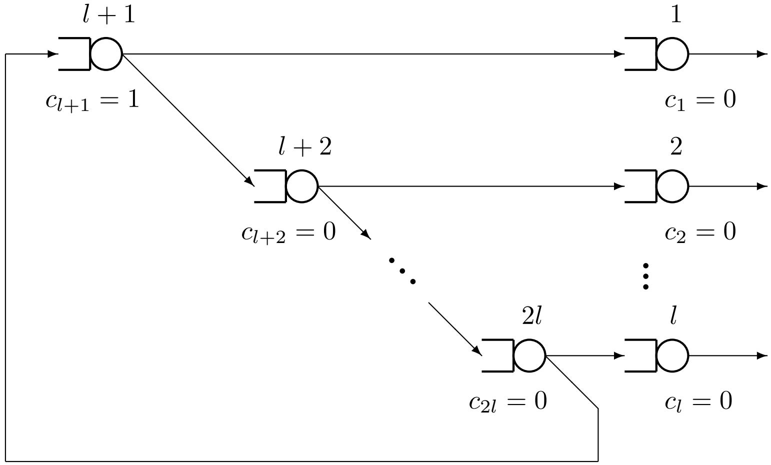


Рис. 9.6. Эквивалентная сеть с синхронизацией

Для новой системы $M = 1$, $r = l$. Время обслуживания требования k в узлах $i = l+1, l+2, \ldots, 2l$ определяется так

$$\tau_{ik} = \tau_{0,kl-2l+i}.$$

Равенство (9.3) принимает вид

$$u_i(k) = \begin{cases} x_{l+i}(k), & \text{если } i = 1, \ldots, l, \\ x_{2l}(k-1), & \text{если } i = l+1, \\ x_{i-1}(k), & \text{если } i = l+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Чтобы составить динамическое уравнение для системы, введем блочно-диагональную матрицу

$$\mathcal{T}_k = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_k & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathcal{S}_k \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \tau_{lk} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{S}_k = \begin{pmatrix} \tau_{l+1,k} & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \tau_{2l,k} \end{pmatrix}.$$

Записывая в блочном виде матрицы G_0 и G_1, получим

$$G_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ I & E \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & F \end{pmatrix},$$

где E и F — матрицы порядка l,

$$E = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \ldots & \ldots & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \ldots & \ldots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & \ldots & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Вычисление матрицы системы дает результат

$$\begin{aligned} A(k) &= (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^l \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) = \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_k & \mathcal{R}_k (I \oplus \mathcal{S}_k E^T)^{l-1} \mathcal{S}_k (I \oplus F^T) \\ \mathbb{0} & (I \oplus \mathcal{S}_k E^T)^{l-1} \mathcal{S}_k (I \oplus F^T) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $l = 2$. Запишем матрицы

$$G_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Матрица системы имеет вид

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2 \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \tau_{1k}\tau_{3k} & \tau_{1k}\tau_{3k} \\ \mathbb{0} & \tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{3k}\tau_{4k} \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

9.6. Вектор состояний в многофазных системах

Для моделей некоторых систем динамическое уравнение (9.1) может быть записано для вектора состояний, компонентами которого, вместо времени завершения обслуживания, являются другие временные значения, например, время пребывания или время ожидания требования в соответствующих узлах.

9.6.1. Время пребывания требования в системе. Рассмотрим открытую многофазную систему с неограниченной емкостью накопителей (см. рис. 9.1). Обозначим через $s_i(k)$ время пребывания k-го требования в узлах с 1-го по i-ый. Учитывая, что первый узел служит для представления внешнего потока требований, положим $s_1(k) = 0$. Нетрудно видеть, что для всех $i = 1, \ldots, n$, выполняется равенство

$$s_i(k) = x_i(k) - x_1(k).$$

которое в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ принимает вид

$$s_i(k) = x_i(k) x_1^{-1}(k).$$

Введем вектор $\boldsymbol{s}(k) = (s_1(k), \ldots, s_n(k))^T$ и перейдем к матричной записи

$$\boldsymbol{s}(k) = \boldsymbol{x}(k) x_1^{-1}(k).$$

Используя динамическое уравнение для вектора $\boldsymbol{x}(k)$, а также очевидное равенство $x_1(k) = x_1(k-1)\tau_{1k}$, получим

$$\boldsymbol{s}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1) x_1^{-1}(k-1)\tau_{1k}^{-1}.$$

Положив $B(k) = \tau_{1k}^{-1} A(k)$ последнее уравнение можно привести к виду

$$\boldsymbol{s}(k) = B(k)\boldsymbol{s}(k-1). \tag{9.22}$$

9.6.2. Время ожидания требований. Обозначим суммарное время ожидания обслуживания требованием k в узлах с 1-го по i-ый через $w_i(k)$. Учитывая, что в обычных обозначениях время пребывания требования в системе складывается из времени обслуживания и времени ожидания, имеем

$$\begin{aligned} s_1(k) &= w_1(k) = 0, \\ s_i(k) &= w_i(k) + \sum_{j=2}^{i} \tau_{jk}, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

В полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ эти равенства принимают вид

$$\begin{aligned} s_1(k) &= w_1(k) = \mathbb{1}, \\ s_i(k) &= w_i(k) \bigotimes_{j=2}^{i} \tau_{jk}, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Определим вектор $\boldsymbol{w}(k) = (w_1(k), \ldots, w_n(k))^T$ и перейдем к матричной записи. Имеем равенство

$$\boldsymbol{s}(k) = \tau_{1k}^{-1} D(k) \boldsymbol{w}(k),$$

где

$$D(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \ldots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{1k}\tau_{2k} & & \mathbb{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & & \tau_{1k}\cdots\tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $D(k)$ является диагональной матрицей, для которой существует обратная матрица, полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$\boldsymbol{w}(k) = \tau_{1k} D^{-1}(k) \boldsymbol{s}(k).$$

Применяя (9.22), последовательно получаем

$$\boldsymbol{w}(k) = D^{-1}(k)A(k)\boldsymbol{s}(k-1) = \tau_{1,k-1}^{-1}D^{-1}(k)A(k)D(k-1)\boldsymbol{w}(k-1).$$

Определив матрицу $C(k) = \tau_{1,k-1}^{-1}D^{-1}(k)A(k)D(k-1)$, можно записать динамическое уравнение для времени ожидания в виде

$$\boldsymbol{w}(k) = C(k)\boldsymbol{w}(k-1). \tag{9.23}$$

Заметим, что последнее уравнение остается в силе для многофазных систем с ограниченной емкостью накопителей. При этом, однако, величина $w_i(k)$ будет включать не только время ожидания обслуживания, но и время, в течении которого требование было заблокировано.

9.7. Имитационные модели многофазных систем

Рассмотрим алгоритмы имитационного моделирования для многофазных систем, которые опираются на динамическое уравнение (9.1). Ясно, что процедуры моделирования на основе уравнений (9.22) и (9.23) будут иметь аналогичную структуру и сложность.

Предполагается, что время обслуживания τ_{ik} представляет собой реализации некоторых случайных величин, которые могут быть получены для любого $i = 1, \ldots, n$ и $k = 1, 2 \ldots$ при помощи подходящих датчиков псевдослучайных чисел [12, 13]. Поэтому так же, как в работах [62, 67, 64], будем рассматривать только процедуры вычисления вектора состояний системы на основе уравнения (9.1).

9.7.1. Последовательный алгоритм моделирования. Сначала рассмотрим временную сложность и требования к памяти в случае, когда имеется только один скалярный процессор. Соответствующий последовательный алгоритм состоит из последовательных шагов вычисления вектора состояний системы. Очередной шаг k включает вычисление элементов матрицы $A(k)$ и $\otimes$-умножение $A(k)$ на вектор $\boldsymbol{x}(k-1)$ для получения вектора $\boldsymbol{x}(k)$.

Пусть моделирование системы осуществляется до момента завершения K-го обслуживания в узле n. Обозначим общее количество операций (включая $\oplus$-сложение и $\otimes$-умножение), которые выполняются на шаге k при определении элементов матрицы $A(k)$ и вычислении произведения $A(k)\boldsymbol{x}(k-1)$ соответственно через N_1 и N_2. Тогда моделирующий алгоритм потребует $N = K(N_1 + N_2)$ операций (без учета индексных вычислений). Обозначим через M число ячеек памяти, которые потребуются для выполнения вычислений и хранения их результатов.

Рассмотрим модель открытой многофазной системы с неограниченной емкостью накопителей. Учитывая треугольную форму матрицы системы, последовательный алгоритм для вычисления векторов $\boldsymbol{x}$, $k = 1, \ldots, K$, может быть представлен в виде

Алгоритм 9.1.

For $i = 1, \ldots, n,$ **do** $x_i(0) \longleftarrow 0$.
For $k = 1, \ldots, K,$ **do**
  for $i = 1, \ldots, n$, **do**
    $a_{ii}(k) \longleftarrow \tau_{ik}$;
    for $j = 1, \ldots, i-1$, **do**
      $a_{ij}(k) \longleftarrow a_{i-1,j}(k)\tau_{ik}$;
  for $i = 1, \ldots, n$, **do**
    $x_i(k) \longleftarrow a_{i1}(k)x_i(k-1)$;
    for $j = 2, \ldots, i$, **do**
      $x_i(k) \longleftarrow x_i(k) \oplus a_{ij}(k)x_j(k-1)$.

Нетрудно видеть, что для алгоритма требуется $N_1 = n(n+1)/2$ и $N_2 = n^2$ операций и $M = n(n+5)/2$ ячеек памяти. Учитывая, что общее число операций при вычислении K последовательных векторов имеет порядок $N = O(n(3n+1)K/2)$, эффективность этого алгоритма вполне сравнима с эффективностью других аналогичных процедур [62, 64]. В частности, алгоритм в [64] позволяет вычислять время завершения K-го обслуживания в узле n за $O(2K(n+1))$ операций. Однако этот алгоритм предназначен для вычисления величин $x_n(k)$, а не всех компонент вектора $\boldsymbol{x}(k)$. Следовательно, для корректного сравнения сложности алгоритма 9.1 с алгоритмом в [64] необходимо умножить число операций этого алгоритма на K.

9.7.2. Векторный алгоритм моделирования. Теперь предположим, что моделирование выполняется на векторном процессоре с достаточным числом векторных регистров для обработки n-

векторов. Используя обозначение $\boldsymbol{a}^i(k) = (a_{i1}(k), \ldots, a_{in}(k))$, можно построить следующую модификацию алгоритма 9.1.

Алгоритм 9.2.

$\boldsymbol{x}(0) \longleftarrow (0, \ldots, 0)^T$**.**
For $k = 1, \ldots, K$**, do**
$\quad A(k) \longleftarrow I$**;**
$\quad$**for** $i = 1, \ldots, n$**, do**
$\quad\quad a_{ii}(k) \longleftarrow \tau_{ik}$**;**
$\quad\quad \boldsymbol{a}^i(k) \longleftarrow \boldsymbol{a}^{i-1}(k)\tau_{ik}$**;**
$\quad\quad x_i(k) \longleftarrow \boldsymbol{a}^i(k)\boldsymbol{x}(k-1)$**.**

Нетрудно видеть, что применение векторного процессора позволяет получить матрицу $A(k)$ за $N_1 = n$ векторных операций. Вычисление каждого элемента вектора $\boldsymbol{x}(k)$ в соответствии с уравнением (9.1) включает покомпонентное сложение строки матрицы $A(k)$ и вектора $\boldsymbol{x}(k-1)$ с последующим определением максимального элемента полученной векторной суммы. Заметим, что сложение двух векторов требует выполнения только одной операции векторного процессора.

Из треугольной формы матрицы $A(k)$ для рассматриваемых многофазных систем следует, что для определения i-го элемента вектора $\boldsymbol{x}(k)$ по существу требуется выполнить не более чем i бинарных операций вычисления максимума. Используя метод рекурсивного удвоения [46], можно получить максимум i последовательных элементов вектора за $\log_2 i$ операций. Для всех элементов вектора $\boldsymbol{x}(k)$ тогда потребуется выполнение

$$N_2 = n + \log_2 1 + \cdots + \log_2 n = n + \log_2(n!)$$

операций. Наконец, вычисление K последовательных векторов выполняется за $N = O(K(\log_2(n!) + 2n))$ векторных операций.

Нетрудно видеть, что применение для моделирования векторного процессора позволяет достичь ускорения

$$S_v = O(n(3n+1)/(\log_2(n!)/2 + n))$$

по сравнению с использованием скалярного процессора.

9.7.3. Параллельное моделирование. Рассмотрим процедуру имитационного моделирования, предназначенную для выполнения на параллельной вычислительной системе, оснащенной SIMD (single instruction, multiple data) процессором. Другие параллельные алгоритмы, основанные на алгебраических моделях систем с очередями можно найти, например, в [67].

Пусть P обозначает число процессоров системы, $P \geq n$. Следующий алгоритм состоит из $L = \lceil K/P \rceil$ шагов, где $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое, большее либо равное x.

Алгоритм 9.3.

$\boldsymbol{x}(0) \longleftarrow (0,\dots,0)^T$ **.**
For $l = 1,\dots,L$ **, do**
  $i_1 \longleftarrow (l-1)P$ **;** $i_2 \longleftarrow \min(lP, K)$ **;**
  in parallel, for $i = i_1+1, i_1+2,\dots,i_2$ **, do**
    evaluate $A(i)$ **;**
  for $i = i_1+1, i_1+2,\dots,i_2$ **, do**
    in parallel, for $j = 1,\dots,n$ **, do**
      $x_j(i) \longleftarrow \boldsymbol{a}^j(i)\boldsymbol{x}(i-1)$ **.**

Чтобы оценить эффективность алгоритма, заметим, что каждый шаг включает параллельное вычисление P последовательных матриц, которое выполняется за $N_1 = n(n+1)/2$ параллельных операций. Затем определяются P последовательных векторов, причем элементы каждого вектора вычисляются параллельно на различных процессорах.

Учитывая, что вычисление вектора требует n обычных сложений и столько же вычислений максимума, общее число операций составляет $2n$ для одного вектора и $2Pn$ для P векторов. Тогда выполнение всего алгоритма потребует $N = L(n(n+1)/2 + 2Pn)$ параллельных операций. Нетрудно проверить, что при $P \geq n$ выполняется $N = O(3Kn/2)$, если $K \to \infty$. В частности, при $P = n$ и достаточно большом K параллельный алгоритм будет иметь по сравнению с последовательным алгоритмом ускорение $S_P = O(3P/5)$.

Глава 10

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ С ОЧЕРЕДЯМИ

10.1. Введение

Стохастические модели сетей с очередями находят широкое применение при изучении и анализе многих реальных систем в технике, экономике, управлении и других областях. Во многих случаях динамика системы может быть описана в явном виде при помощи рекуррентных уравнений, которые впервые были введены Д. В. Линдли [94] при исследовании системы с одним обслуживающим устройством и очередью. Другие примеры рекуррентных уравнений можно найти, например, в работах [14, 19, 81, 64, 82, 84].

Наибольшее распространение при исследовании таких систем получили аналитические методы, основанные на применении результатов теории массового обслуживания и методы компьютерного имитационного моделирования. Аналитические методы [17, 51, 14] позволяют получить удобные расчетные формулы для определения характеристик систем. Однако прямое применение результатов теории массового обслуживания, как правило, ограничено сравнительно узким кругом реальных систем. В частности, для получения компактных расчетных формул обычно требуется, чтобы интервалы времени между поступлением требований в систему и длительности обслуживания требований соответствовали закону распределения вероятностей определенного типа (экспоненциальное распределение и некоторые другие распределения), а также удовлетворяли довольно жестким требованиям независимости. В общем случае применение аналитических методов даже к простым системам может представлять собой достаточно трудную задачу.

В отличие от аналитических, методы имитационного моделирования позволяют учесть все особенности реальной системы. Указанные методы основаны на разработке и применении компьютерных программ, которые с любой степенью точности могут имитировать алгоритмы функционирования реальной системы. В случае, когда эволюция системы определяется набором рекуррентных уравнений для переменных, описывающих состояние системы, имитация может просто состоять в последовательном вычислении значений этих переменных.

При компьютерной имитации вычисления, связанные с воспроизведением динамики моделируемой системы, как правило, сочетаются с оценкой характеристик системы на основе применения методов Монте-Карло [12, 13]. Основной недостаток этого подхода заключается в том, что по мере усложнения имитационной модели, а также повышения точности получаемых оценок, затраты на построение модели, разработку компьютерных программ и проведение имитационных экспериментов быстро возрастают и могут оказаться неприемлемыми для исследователя.

Выше было показано, что имеется широкий класс моделей сетей с очередями, динамика которых описывается в полукольце $\mathbb{R}_{\max,+}$ при помощи векторного уравнения $\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1)$. В случае, когда время обслуживания требований в сети является случайным, это уравнение может рассматриваться как стохастическое разностное уравнение со случайной матрицей $A(k)$.

Применение аппарата идемпотентной алгебры, который позволяет описывать динамику сетей в компактной векторной форме, открывает новые возможности для исследования сетей с очередями. В частности, такой подход оказывается достаточно продуктивным при решении задач оценки и вычисления значения показателя Ляпунова, который для моделей сетей с очередями имеет смысл среднего времени цикла обслуживания.

В настоящей главе на основе результатов работ [89, 90] сначала строится общая нижняя оценка среднего времени цикла для всех рассматриваемых моделей. Показано, что для моделей ациклических сетей с неограниченными накопителями указанная оценка совпадает с соответствующим точным значением.

Затем рассматриваются примеры моделей сетей, включая многофазные системы с неограниченной и конечной емкостью накопителей, а также сети с синхронизацией передвижения требований. Для этих моделей величина среднего времени цикла обслуживания вычисляется на основе разложения матрицы системы [33, 92].

В заключение изучается задача оценивания среднего времени безотказной работы для ациклических сетей с очередями [36]. Получены верхние и нижние оценки среднего времени безотказной работы и приведены примеры вычисления оценок.

10.2. Среднее время цикла обслуживания

Пусть имеется некоторая система с очередями, динамика которой описывается при помощи уравнения $\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1)$. Будем представлять эволюцию системы в виде последовательности циклов обслуживания. Первый цикл начинается в нулевой момент времени и продолжается до тех пор, пока в каждом узле сети не будет обслужено по одному требованию. Затем начинается второй цикл, который завершается тогда, когда в каждом узле будет обслужено по два требования, и т. д.

Ясно, что время завершения цикла k определяется величиной $\|\boldsymbol{x}(k)\|$. Кроме того, с учетом условия $\boldsymbol{x}(0) = 0$, это время может быть представлено в виде $\|\boldsymbol{x}(k)\| = \|A_k\|$, где $A_k = A(k)\cdots A(1)$.

Нетрудно видеть, что в моделях систем и сетей с очередями средняя скорость роста (показатель Ляпунова) λ системы имеет смысл среднего времени цикла обслуживания. Величину, обратную среднему времени цикла обслуживания, можно рассматривать как пропускную способность системы.

Далее будут рассматриваться различные модели систем с очередями, включая модель сети с неограниченной емкостью накопителей (9.5)–(9.7) и модели с конечной емкостью (9.12)–(9.16). Предполагается, что в этих моделях диагональные элементы каждой матрицы $\mathcal{T}_k$ являются неотрицательными случайными величинами, а также, что последовательность $\{\mathcal{T}_k, k \geq 1\}$ состоит из независимых одинаково распределенных матриц и $\mathsf{E}\|\mathcal{T}_1\| < \infty$.

10.2.1. Нижняя граница среднего времени цикла. Найдем нижнюю границу для величины λ.

Лемма 10.1. Среднее время цикла обслуживания λ в системах (9.5)–(9.7) и (9.12)–(9.16) удовлетворяет неравенству

$$\lambda \geq \operatorname{tr}(\mathsf{E}\mathcal{T}_1).$$

Доказательство. Проверим выполнение неравенства для системы (9.5)-(9.7). Учитывая, что $A_1(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) \geq \mathcal{T}_k$, имеем

$$\boldsymbol{x}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k)\boldsymbol{x}(k-m) \geq A_1(k)\boldsymbol{x}(k-1) \geq \mathcal{T}_k \boldsymbol{x}(k-1).$$

Введем обозначение $\widetilde{A}_k = \mathcal{T}_1 \cdots \mathcal{T}_k$. В силу диагональной формы матриц $\mathcal{T}_k$ получим требуемое неравенство

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k} \geq \lim_{k\to\infty} \|\widetilde{A}_k \boldsymbol{x}(0)\|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \|\widetilde{A}_k\|^{1/k} = \operatorname{tr}(\mathsf{E}\mathcal{T}_1).$$

Проверка этого неравенства для систем (9.12)–(9.16) с конечной емкостью накопителей проводится аналогично. □

Заметим, что вычисление самой величины λ обычно оказывается более трудной задачей, чем определение ее нижней оценки.

Имеется один важный класс моделей систем, рассмотренный ниже, для которых матрица системы имеет треугольную форму. Для таких систем величина λ находится путем применения теоремы 6.4.

В остальных случаях для решения задачи может оказаться полезным метод разложения матрицы системы, предложенный выше.

10.2.2. Ациклические сети. Исследуем модель сети с неограниченными накопителями (9.5)–(9.7) при условии, что граф сети является ациклическим. Покажем, что для такой модели величина λ совпадает с ее нижней границей, установленной в лемме 10.1.

Теорема 10.1. Для системы (9.5)–(9.7) с ациклическим графом среднее время цикла определяется выражением

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}\mathcal{T}_1).$$

Доказательство. Обозначим матрицу смежности графа системы через G. Учитывая, что граф является ациклическим, матрице G путем изменения нумерации узлов сети (то есть, путем перестановки строк вместе с такой же перестановкой столбцов) можно придать строго треугольную форму, при которой все элементы на диагонали и ниже (выше) ее будут нулевыми.

Пусть нумерация узлов выбрана так, что матрица G является верхней треугольной. Введем матрицу

$$F = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & \dots & \mathbb{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \dots & \dots & \mathbb{0} \end{pmatrix} \geq G.$$

Из равенства $G = G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_M$ следует, что $G_m \leq G$ при всех $m = 0, 1, \dots, M$, а значит все матрицы G_m также имеют строго треугольную форму и $G_m \leq F$.

Из динамического уравнения (9.5) следует неравенство для вектора состояний

$$\boldsymbol{x}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k)\boldsymbol{x}(k-m) \leq \bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k)\boldsymbol{x}(k-1).$$

Рассмотрим сумму матриц

$$\bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k \left(I \oplus \bigoplus_{m=1}^{M} G_m^T \right).$$

Заметим, что $G_m \leq F$ и $r \leq n-1$. Следовательно,

$$\bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k) \leq (I \oplus \mathcal{T}_k F^T)^r \mathcal{T}_k (I \oplus F^T) \leq (I \oplus \mathcal{T}_k F^T)^{n-1} \mathcal{T}_k (I \oplus F^T).$$

Кроме того, учитывая, что $\mathcal{T}_k \geq I$ и $F^n = \mathbb{0}$, имеем

$$\begin{aligned}(I \oplus \mathcal{T}_k F^T)^{n-1}\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_k \oplus \mathcal{T}_k F^T \mathcal{T}_k \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}_k F^T)^{n-1}\mathcal{T}_k \geq \\ \geq \mathcal{T}_k F^T \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}_k F^T)^{n-1} = (I \oplus \mathcal{T}_k F^T)^{n-1}\mathcal{T}_k F^T,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k) \leq (I \oplus \mathcal{T}_k F^T)^{n-1}\mathcal{T}_k = \widetilde{A}(k).$$

Неравенство для вектора $\boldsymbol{x}(k)$ теперь можно записать в виде

$$\boldsymbol{x}(k) \leq \widetilde{A}(k)\boldsymbol{x}(k-1).$$

Опираясь на диагональную форму матрицы $\mathcal{T}_k$, нетрудно понять, что матрица $(\mathcal{T}_k F^T)^q \mathcal{T}_k$ при $q = 1, \ldots, n-1$ также является треугольной с нулевыми элементами на диагонали. Отсюда следует, что матрица $\widetilde{A}(k) = \mathcal{T}_k \oplus \mathcal{T}_k F^T \mathcal{T}_k \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}_k F^T)^{n-1}\mathcal{T}_k$ имеет треугольную форму, причем ее диагональные элементы совпадают с соответствующими элементами матрицы $\mathcal{T}_k$.

Положим $\widetilde{A}_k = \widetilde{A}(k) \cdots \widetilde{A}(1)$. Применяя теорему 6.4, приходим к неравенству

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k} \leq \lim_{k\to\infty} \|\widetilde{A}_k \boldsymbol{x}(0)\|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \|\widetilde{A}_k\|^{1/k} = \operatorname{tr}(\mathsf{E}\mathcal{T}_1).$$

Учитывая, что по лемме 10.1 всегда выполняется противоположное неравенство, получаем требуемый результат. □

Заметим, что частным случаем рассматриваемой модели является система (9.5)–(9.7) без начальных требований в промежуточных узлах. Для такой системы граф, соответствующий матрице G_0, совпадает с графом всей сети и является ациклическим.

10.3. Примеры вычисления среднего времени цикла

10.3.1. Открытая многофазная система. Рассмотрим открытую многофазную систему, состоящую из n узлов с неограниченным объемом накопителей (рис. 9.1). Ясно, что граф такой системы является ациклическим при любом выборе значений чисел c_i, $i = 2, \ldots, n$. Применение теоремы 10.1 дает результат

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}\mathcal{T}_1),$$

который в обычных обозначениях принимает вид

$$\lambda = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \ldots, \mathsf{E}\tau_{n1}).$$

10.3.2. Многофазные системы с блокированием. Исследуем систему с производственным типом блокирования и ограниченной емкостью накопителей, представленную на рис. 9.3.

Пусть $n = 3$, $b_1 = b_2 = \infty$ и $b_3 = 1$. Имеем матрицу (9.18).

Учитывая, что две последние строки матрицы пропорциональны, имеем разложение

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbb{1} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{3k} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = B(k)C(k).$$

Найдем матрицу

$$C(k)B(k+1) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} \oplus \tau_{3,k+1} \end{pmatrix}.$$

Применяя теорему 6.5, получим

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]) = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \mathsf{E}\max(\tau_{21}, \tau_{31})).$$

Пусть в системе действует коммуникационный тип блокирования. При условиях $n = 3$, $b_1 = \infty$ и $b_2 = b_3 = 1$ матрица системы имеет вид (9.19). Построим разложение

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \tau_{1k} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \tau_{2k} & \tau_{2k} \\ \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \tau_{1k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = B(k)C(k).$$

Рассмотрим произведение

$$C(k)B(k+1) = \begin{pmatrix} \tau_{1k}\tau_{2,k+1} & \tau_{1k}\tau_{2,k+1} \\ \tau_{2,k+1}\tau_{3,k+1} & \tau_{2,k+1}\tau_{3,k+1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} \\ \tau_{3,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{2,k+1} & \tau_{2,k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k).$$

Учитывая, что это произведение является матрицей единичного ранга, окончательно получим

$$\lambda = \mathsf{E}[\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2)] = \mathsf{E}\tau_{21} + \mathsf{E}\max(\tau_{11}, \tau_{31}).$$

10.3.3. Сеть с синхронизацией. Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 9.4. Построим скелетное разложение матрицы системы

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$

С этой целью для множества столбцов матрицы $A(k)$ найдем эквивалентную ему линейно независимую систему путем отбрасывания тех столбцов, которые линейно зависят от остальных.

Сначала проверим первый столбец

$$\boldsymbol{a}_1(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} \\ \tau_{1k} \\ \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Из остальных столбцов составим матрицу

$$A_{(1)}(k) = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{3k} & \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что первый столбец имеет нулевые координаты, заменим $\boldsymbol{a}_1(k)$ и $A_{(1)}(k)$ на согласованные вектор и матрицу

$$\boldsymbol{a}'_1(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} \\ \tau_{1k} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} \end{pmatrix}, \qquad A'_{(1)}(k) = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{4k} & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица $A'_{(1)}(k)$ не является регулярной. Тогда $\boldsymbol{a}'_1(k) \notin \operatorname{range}(A'_{(1)}(k))$, откуда следует, что $\boldsymbol{a}_1(k) \notin \operatorname{range}(A_{(1)}(k))$.

Рассмотрим второй столбец матрицы $A(k)$

$$\boldsymbol{a}_2(k) = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \tau_{2k}\tau_{3k} \\ \tau_{3k} \\ \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

и составим матрицу

$$A_{(2)}(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$

Переходя к согласованным матрице и вектору, получаем

$$\boldsymbol{a}'_2(k) = \begin{pmatrix} \tau_{2k}\tau_{3k} \\ \tau_{3k} \\ \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} \end{pmatrix}, \qquad A'_{(2)}(k) = \emptyset,$$

из чего вытекает, что $\boldsymbol{a}_2(k) \notin \operatorname{range}(A_{(2)}(k))$.

Для столбца

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \tau_{2k}\tau_{3k} \\ \tau_{3k} \\ \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} \\ \tau_{5k} \end{pmatrix}$$

имеем матрицу

$$A_{(3)} = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$

Согласованные матрица и вектор принимают вид

$$\boldsymbol{a}_3'(k) = \begin{pmatrix} \tau_{2k}\tau_{3k} \\ \tau_{3k} \\ \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} \\ \tau_{5k} \end{pmatrix}, \qquad A_{(3)}'(k) = \begin{pmatrix} \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$

Найдем величину

$$\Delta(A_{(3)}'(k), \boldsymbol{a}_3'(k)) = (A_{(3)}'(k)(\boldsymbol{a}_3'^{-}(k)A_{(3)}'(k))^{-})^{-}\boldsymbol{a}_3'(k) = \mathbb{1}.$$

Учитывая полученное значение, заключаем, что для вектора выполняется $\boldsymbol{a}_3(k) \in \operatorname{range}(A_{(3)}(k))$, и он может быть удален.

Рассмотрим четвертый столбец и матрицу, составленную из всех столбцов матрицы $A(k)$, за исключением третьего и четвертого,

$$\boldsymbol{a}_4(k) = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \\ \tau_{4k} \\ \tau_{5k} \end{pmatrix}, \qquad A_{(3,4)}(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$

Переход к согласованным вектору и матрице дает

$$\boldsymbol{a}_4'(k) = \begin{pmatrix} \tau_{4k} \\ \tau_{5k} \end{pmatrix}, \qquad A_{(3,4)}'(k) = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \tau_{5k} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $\boldsymbol{a}_4(k) \notin \operatorname{range}(A_{(3,4)}(k))$.

Аналогично проверяется, что $\boldsymbol{a}_5(k) \notin \operatorname{range}(A_{(3,5)}(k))$.

Найдем решение уравнения $A_{(3)}'(k)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}_3'(k)$. Имеем

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a}_3'^{-}(k)A_{(3)}'(k))^{-} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Теперь матрицу системы можно представить в виде

$$A(k) = \\ = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

После некоторых дополнительных преобразований приходим к разложению

$$A(k) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} =$$

$$= B(k)C(k).$$

Найдем произведение матриц

$$C(k)B(k+1) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{2,k+1}\tau_{3k} & \tau_{2,k+1}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{2,k+1}\tau_{4,k+1} & \tau_{2,k+1}\tau_{4,k+1} & \tau_{4,k+1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \tau_{5,k+1} & \tau_{5,k+1} \end{pmatrix}.$$

В силу треугольной формы полученной матрицы можно применить теорему 6.5. В результате получим

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]) = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \mathsf{E}\tau_{21} + \mathsf{E}\tau_{31}, \mathsf{E}\tau_{41}, \mathsf{E}\tau_{51}).$$

10.3.4. Карусельный механизм маршрутизации. Перейдем от системы с карусельным механизмом маршрутизации с $l = 2$ к эквивалентной сети с синхронизацией (рис. 9.6).

Возьмем матрицу системы (9.21) и представим ее в виде

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \tau_{1k}\tau_{3k} & \tau_{1k}\tau_{3k} \\ \mathbb{0} & \tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{3k}\tau_{4k} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \tau_{1k} \\ \mathbb{0} & \tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{4k} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{4k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} \end{pmatrix} = B(k)C(k).$$

Рассмотрим произведение

$$C(k)B(k+1) = \begin{pmatrix} \tau_{1,k+1} & \mathbb{0} & \tau_{1,k+1} \\ \mathbb{0} & \tau_{2,k+1} & \tau_{2,k+1}\tau_{4,k+1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \tau_{3k}\tau_{4,k+1} \end{pmatrix}$$

Из треугольной формы матрицы произведения следует, что

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(2)]) = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \mathsf{E}\tau_{21}, \mathsf{E}\tau_{31} + \mathsf{E}\tau_{41}).$$

Учитывая, что $\mathsf{E}\tau_{31} = \mathsf{E}\tau_{41} = \mathsf{E}\tau_{01}$, окончательно получим

$$\lambda = \max(2\mathsf{E}\tau_{01}, \mathsf{E}\tau_{11}, \mathsf{E}\tau_{21}).$$

10.4. Оценка среднего времени безотказной работы

Рассмотрим модель системы с неограниченной емкостью накопителей при условии, что в начальный момент все промежуточные узлы не имеют требований. Уравнения (9.5)–(9.7) для такой системы можно представить в виде

$$\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1), \tag{10.1}$$

где

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G^T)^r \mathcal{T}_k. \tag{10.2}$$

Предположим, что возможно возникновение условий, которые препятствуют выполнению очередного цикла и дальнейшей работе системы, вызывая тем самым отказ системы. Введем случайную величину ν — номер последнего успешно завершенного цикла обслуживания, вслед за которым произошел отказ системы, и предположим, что $\mathsf{E}\nu < \infty$. Тогда среднее время работы системы до момента отказа определяется с помощью обычных операций как математическое ожидание

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| = \mathsf{E}[\mathsf{E}\|A_k\| | \nu = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\|A_k\| \mathsf{P}\{\nu = k\}.$$

Будем предполагать, что для любого k вероятность успешного завершения k-го цикла обслуживания не зависит от k. Обозначив эту вероятность через p, получим

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\|A_k\| p^k. \tag{10.3}$$

10.4.1. Вспомогательные неравенства. При получении оценок будут использованы вспомогательные результаты, представленные ниже в терминах полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Предложение 10.1. Для системы (10.1)–(10.2) при любом целом $k \geq 0$ справедливы неравенства

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq \|\mathsf{E}\mathcal{T}_1^-\|^{-k+1}\mathsf{E}\|A_1\|. \tag{10.4}$$

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq \|\mathsf{E}\mathcal{T}_1\|^k. \tag{10.5}$$

Доказательство. Учитывая неравенство $A(k) \geq \mathcal{T}_k$, запишем

$$\|A_k\| = \|A(k)\cdots A(1)\| \geq \|A(k)\mathcal{T}_{k-1}\cdots \mathcal{T}_1\|.$$

Переходя к математическому ожиданию, получим

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq \mathsf{E}\|A(k)\mathsf{E}(\mathcal{T}_{k-1}\cdots\mathcal{T}_1)\| = \mathsf{E}\|A_1(\mathsf{E}\mathcal{T}_1)^{k-1}\|,$$

откуда в силу неравенства $\mathsf{E}\mathcal{T}_1 \geq \|\mathsf{E}\mathcal{T}_1^-\|^{-1} I$ следует (10.4).

Нетрудно проверить, что неравенство (10.5) является следствием диагональной формы матрицы $\mathcal{T}_1$

$$\mathsf{E}\|A_k\| \geq \|\mathsf{E}(\mathcal{T}_k\cdots\mathcal{T}_1)\| = \|\mathsf{E}\mathcal{T}_1^k\| = \|\mathsf{E}\mathcal{T}_1\|^k. \quad \square$$

Предложение 10.2. Для системы (10.1)–(10.2) при любом целом $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\|A_k\| \leq \mathsf{E}\|\mathcal{T}_1\|^k \mathsf{E}\left(\bigoplus_{i=1}^{k} \|\mathcal{T}_i\|\right)^r. \tag{10.6}$$

Доказательство. Сначала, учитывая неравенство $\mathcal{T}_k \leq \|\mathcal{T}_k\| I$, запишем $A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G^T)^r \mathcal{T}_k \leq \|\mathcal{T}_k\|(I \oplus \mathcal{T}_k G^T)^r$.

Тогда для матрицы $A_k = A(k) \cdots A(1)$ справедлива оценка

$$A_k \leq \bigotimes_{i=1}^{k} \|\mathcal{T}_{k-i+1}\| (I \oplus \mathcal{T}_{k-i+1} G^T)^r = \\ = \left(\bigotimes_{i=1}^{k} \|\mathcal{T}_i\| \right) \left(\bigotimes_{i=1}^{k} (I \oplus \mathcal{T}_{k-i+1} G^T)^r \right).$$

Рассмотрим матрицу

$$\bigotimes_{i=1}^{k} (I \oplus \mathcal{T}_{k-i+1} G^T)^r = \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{r} (\mathcal{T}_{k-i+1} G^T)^j = \\ = \bigoplus_{0 \leq j_1 + \cdots + j_k \leq kr} (\mathcal{T}_k G^T)^{j_1} \cdots (\mathcal{T}_1 G^T)^{j_k}.$$

В силу условия $G^q = \mathbb{0}$ для всех $q > r$, а также неравенства $\mathbb{1} \leq \|\mathcal{T}_i\| \leq \|\mathcal{T}_1\| \oplus \cdots \oplus \|\mathcal{T}_k\|$, которое справедливо для каждого $i = 1, \ldots, k$, последовательно получим

$$\bigotimes_{i=1}^{k} (I \oplus \mathcal{T}_{k-i+1} G^T)^r \leq \\ \leq \bigoplus_{0 \leq j_1 + \cdots + j_k \leq kr} \|\mathcal{T}_k\|^{j_1} \cdots \|\mathcal{T}_1\|^{j_k} (G^T)^{j_1 + \cdots + j_k} = \\ = \bigoplus_{0 \leq j_1 + \cdots + j_k \leq r} \|\mathcal{T}_k\|^{j_1} \cdots \|\mathcal{T}_1\|^{j_k} (G^T)^{j_1 + \cdots + j_k} \leq \\ \leq \bigoplus_{j=0}^{r} \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \|\mathcal{T}_i\| \right)^j (G^T)^j \leq \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \|\mathcal{T}_i\| \right)^r \bigoplus_{j=0}^{r} (G^T)^j.$$

Тогда для матрицы A_k с учетом равенства $\|G\| = \mathbb{1}$ имеем

$$\|A_k\| \leq \left(\bigotimes_{i=1}^{k} \|\mathcal{T}_i\| \right) \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \|\mathcal{T}_i\| \right)^r.$$

Наконец, вычисление математического ожидания, приводит к требуемому неравенству. □

При формулировке следующего результата использованы обычные арифметические операции с сохранением смысла обозначения нормы матрицы в терминах полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Предложение 10.3. Для системы (10.1)–(10.2) при любом целом $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\|A_k\| \leq (k+r)\mathsf{E}\|\mathcal{T}_1\| + r\frac{k-1}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\mathsf{D}\|\mathcal{T}_1\|}. \tag{10.7}$$

Доказательство. Запишем неравенство (10.6) с использованием обычных арифметических операций в виде

$$\mathsf{E}\|A_k\| \leq k\mathsf{E}\|\mathcal{T}_1\| + r \max_{1\leq i\leq k} \|\mathcal{T}_i\|,$$

а затем применим лемму 6.6. □

Введем обозначения

$$\alpha = \mathsf{E}\|A_1\|, \qquad \beta = \|\mathsf{E}\mathcal{T}_1^-\|^{-1}, \qquad \gamma = \|\mathsf{E}\mathcal{T}_1\|, \qquad \delta = \mathsf{D}\|\mathcal{T}_1\|$$

и заметим, что $\beta \leq \gamma \leq \alpha$.

Далее при записи оценок и в соответствующих рассуждениях будем использовать обычные арифметические операции. Однако для упрощения записи будет сохранено обозначение нормы матрицы в смысле полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$.

10.4.2. Нижние оценки среднего времени работы. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 10.2. Пусть $\gamma > \beta$ и $m = \lfloor(\alpha-\beta)/(\gamma-\beta)\rfloor$. Тогда выполняется неравенство

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| \geq p(1-p^m)(\alpha-\beta) - p\left(\frac{1-p^m}{1-p} - mp^m\right)(\gamma-\beta) + \frac{p}{1-p}\gamma. \tag{10.8}$$

Доказательство. Рассмотрим математическое ожидание

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\|A_k\|p^k = \\ = (1-p)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathsf{E}\|A_k\|p^k + \sum_{k=m+1}^{\infty}\mathsf{E}\|A_k\|p^k\right).$$

В силу неравенств (10.4) и (10.5) имеем

$$\sum_{k=1}^{m}\mathsf{E}\|A_k\|p^k \geq \alpha\sum_{k=1}^{m}p^k + \beta\sum_{k=1}^{m}(k-1)p^k,$$
$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathsf{E}\|A_k\|p^k \geq \gamma\sum_{k=m+1}^{\infty}kp^k,$$

откуда следует, что

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| \geq (1-p)\left(\alpha\sum_{k=1}^{m}p^k + \beta\sum_{k=1}^{m}(k-1)p^k + \gamma\sum_{k=m+1}^{\infty}kp^k\right) = \\ = (1-p)\left((\alpha-\beta)\sum_{k=1}^{m}p^k - (\gamma-\beta)\sum_{k=1}^{m}kp^k + \gamma\sum_{k=1}^{\infty}kp^k\right). \quad (10.9)$$

После вычисления сумм приходим к неравенству

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| \geq p(1-p^m)(\alpha-\beta) - p\left(\frac{1-p^m}{1-p} - mp^m\right)(\gamma-\beta) + \frac{p}{1-p}\gamma.$$

Заметим, что правая часть последнего неравенства принимает наибольшее значение при тех же значениях m, при которых достигается максимум функции

$$\Phi(m) = (\alpha-\beta)\sum_{k=1}^{m}p^k - (\gamma-\beta)\sum_{k=1}^{m}kp^k = \sum_{k=1}^{m}(\alpha-\beta-k(\gamma-\beta))p^k.$$

Учитывая, что $\alpha-\beta \geq \gamma-\beta \geq 0$, функция $\Phi(m)$ возрастает до тех пор, пока $\alpha-\beta-m(\gamma-\beta) \geq 0$, и принимает наибольшее значение при $m = \lfloor(\alpha-\beta)/(\gamma-\beta)\rfloor$. $\square$

Следствие 10.1. Если $\gamma = \beta$, то имеет место неравенство

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| \geq p\left(\alpha + \frac{p}{1-p}\beta\right). \tag{10.10}$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство (10.9). При условии $\gamma = \beta$ правая часть неравенства принимает наибольшее значение при $m \to \infty$. После вычисления соответствующих сумм приходим к неравенству (10.10). □

Заметим, что условие следствия выполняется тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, \ldots, n$ значения $\mathsf{E}\tau_{i1}$ равны.

10.4.3. Верхние оценки среднего времени работы.

Лемма 10.3. Справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| \leq \frac{p}{1-p}\alpha. \tag{10.11}$$

Доказательство. Запишем неравенство треугольника в обычных обозначениях в виде $\|A_\nu\| \leq \|A(1)\| + \cdots + \|A(\nu)\|$ и заметим, что $\mathsf{E}\nu = p/(1-p)$. Применяя тождество Вальда (см., например, [5]), имеем

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| \leq \mathsf{E}\sum_{k=1}^{\nu}\|A(k)\| = \frac{p}{1-p}\mathsf{E}\|A_1\| = \frac{p}{1-p}\alpha. \quad \square$$

Лемма 10.4. Если $\delta < \infty$, то справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| \leq p\left(\frac{1}{1-p} + r\right)\gamma + r(1-p)C(p)\sqrt{\delta}, \tag{10.12}$$

где r — длина максимального пути в графе сети,

$$C(p) = \frac{p}{4q}\left(1 + \frac{\sqrt{\pi}(1-2q)}{2\sqrt{pq}}(1 - \operatorname{erf}\sqrt{q})\right) + M(p), \qquad q = -\frac{\ln p}{2},$$

при условии, что

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)dt, \qquad M(p) = \max_k\left\{\frac{k-1}{\sqrt{2k-1}}p^k\right\}.$$

Доказательство. Применяя неравенство (10.7), запишем

$$\mathsf{E}\|A_\nu\| = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\|A_k\|p^k \le$$
$$\le (1-p)\left(\mathsf{E}\|\mathcal{T}_1\|\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)p^k + r\sqrt{\mathsf{D}\|\mathcal{T}_1\|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{\sqrt{2k-1}}p^k\right).$$

Сначала вычислим первую сумму в правой части

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)p^k = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-p}+r\right).$$

Нетрудно проверить, что для второй суммы справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{\sqrt{2k-1}}p^k \le \int_1^{\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}p^x dx + \frac{m-1}{\sqrt{2m-1}}p^m,$$

где m выбирается таким образом, чтобы второе слагаемое в правой части представляло собой наибольший по величине член рассматриваемого ряда.

Очевидно, что для нахождения m достаточно вычислить корень производной подынтегральной функции по формуле

$$x_0 = \frac{3\ln p - \sqrt{\ln^2 p - 6\ln p + 1} - 1}{4\ln p},$$

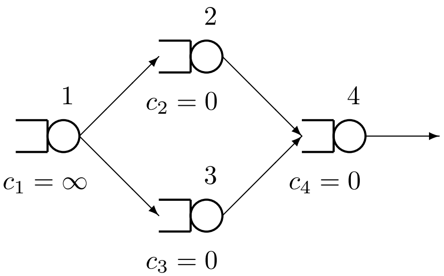
а затем сравнить значения функции для ближайших к корню целых, расположенных слева и справа от него.

Принимая во внимание, что

$$\int_1^{\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}p^x dx = \frac{p}{4q}\left(1+\frac{\sqrt{\pi}(1-2q)}{2\sqrt{pq}}(1-\operatorname{erf}(\sqrt{q}))\right),$$

где $q = -\ln(p)/2$, приходим к неравенству (10.12). $\square$

10.4.4. Пример построения оценок. Для примера рассмотрим сеть с $n = 4$ узлами, представленную вместе с соответствующей матрицей G на рис. 10.1.



$$G = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

Рис. 10.1. Сеть с синхронизацией (слева) и матрица G (справа)

В силу того, что для графа сети длина наибольшего пути $r = 2$, матрица $A(k)$ принимает вид

$$A(k) = (E \oplus \mathcal{T}_k G^T)^2 \mathcal{T}_k =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}\tau_{3k} & \mathbb{0} & \tau_{3k} & \mathbb{0} \\ \tau_{1k}(\tau_{2k} \oplus \tau_{3k})\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для матрицы $A(k)$ выполняется

$$\|A(k)\| = \tau_{1k}(\tau_{2k} \oplus \tau_{3k})\tau_{4k}.$$

Ниже приведены результаты вычисления оценок среднего времени работы для некоторых значений p для сети, представленной на рис. 10.1. Длительности обслуживания требований в узлах $i = 1, 2, 3, 4$ являются независимыми и имеют экспоненциальные распределения с параметрами μ_i.

В табл. 10.1 представлены значения верхних и нижних оценок при условии, что $\lambda_i = 1$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Табл. 10.2 содержит результаты для случая, когда $\mu_1 = \mu_4 = 1$, $\mu_2 = 2$ и $\mu_3 = 3$. В таблицах также представлены оценки среднего времени работы системы вместе с границами соответствующих доверительных интервалов на уровне доверия 0,95, вычисленные на основе имитационного моделирования системы по 10000 независимым реализациям.

p	Оценка (10.8)	Результаты моделирования	Оценка (10.11)	Оценка (10.12)
0,05	0,178	$0{,}181 \mp 0{,}007$	0,184	0,329
0,10	0,361	$0{,}385 \mp 0{,}013$	0,389	0,687
0,20	0,750	$0{,}793 \mp 0{,}021$	0,875	1,484
0,30	1,179	$1{,}270 \mp 0{,}034$	1,500	2,414
0,40	1,667	$1{,}796 \mp 0{,}049$	2,333	3,519
0,50	2,250	$2{,}488 \mp 0{,}069$	3,500	4,883
0,60	3,000	$3{,}427 \mp 0{,}098$	5,250	6,679
0,70	4,083	$4{,}900 \mp 0{,}132$	8,167	9,324
0,80	6,000	$7{,}729 \mp 0{,}298$	14,000	13,999
0,90	11,250	$14{,}888 \mp 0{,}401$	31,500	26,477
0,95	21,375	$27{,}812 \mp 0{,}753$	66,500	49,680

Таблица 10.1. Значения оценок при $\mu_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$

p	Оценка (10.10)	Результаты моделирования	Оценка (10.11)	Оценка (10.12)
0,05	0,133	$0{,}137 \mp 0{,}011$	0,139	0,249
0,10	0,267	$0{,}250 \mp 0{,}018$	0,293	0,514
0,20	0,544	$0{,}523 \mp 0{,}029$	0,658	1,103
0,30	0,838	$0{,}850 \mp 0{,}040$	1,129	1,794
0,40	1,163	$1{,}306 \mp 0{,}053$	1,756	2,629
0,50	1,155	$1{,}811 \mp 0{,}068$	2,633	3,683
0,60	2,057	$2{,}503 \mp 0{,}091$	3,950	5,099
0,70	2,849	$3{,}595 \mp 0{,}124$	6,144	7,205
0,80	4,416	$5{,}452 \mp 0{,}186$	10,533	10,946
0,90	9,247	$10{,}770 \mp 0{,}360$	23,700	20,880
0,95	19,134	$20{,}611 \mp 0{,}705$	50,033	39,180

Таблица 10.2. Значения оценок при $\mu_1 = \mu_4 = 1$, $\mu_2 = 2$ и $\mu_3 = 3$

Литература

[1] *Бачелли Ф., Маковски А. М.* Использование методов теории массового обслуживания для анализа систем с ограничениями по синхронизации // Труды ИИЭР. 1989. Т. 77, N 1. С. 99–128.

[2] *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.

[3] *Блюмин С. Л.* Математические проблемы искусственного интеллекта: регулярность по Дж. фон Нейману в линейной и "линейной" алгебрах // Системы управления и информационные технологии. 2003. Т. 1-2(12). С. 90–94.

[4] *Блюмин С. Л.* Математические проблемы искусственного интеллекта: булева "линейная" алгебра // Системы управления и информационные технологии. 2005. Т. 3(20). С. 4–10.

[5] *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432 с.

[6] *Воеводин В. В.* Математические модели и методы в параллельных процессах. М.: Наука, 1986. 296 с.

[7] *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра матриц // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152, N 1. С. 24–27.

[8] *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра положительных матриц // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1967. Bd. 3, N 1. S. 39–72.

[9] *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра неотрицательных матриц // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1970. Bd. 6, N 4/5. S. 303–312.

[10] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

[11] *Дудников П. И., Самборский С. Н.* Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией // Известия АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. N 1. С. 93–109.

[12] *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975. 472 с.

[13] *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 296 с.

[14] *Калашников В. В., Рачев С. Т.* Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. М.: Наука, 1988. 312 с.

[15] *Корбут А. А.* Экстремальные пространства // Доклады АН СССР. 1965. Т. 164, N 6. С. 1229–1231.

[16] *Корбут А. А.* Экстремальные векторные пространства и их свойства // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1972. Bd. 8, N 8/9. S. 525–536.

[17] *Кофман А., Крюон Р.* Массовое обслуживание. Теория и приложения. М.: Мир, 1965. 302 с.

[18] *Коэн Г., Моллер П., Кадра Ж.-П., Въо М.* Алгебраические средства оценивания характеристик дискретно-событийных систем // Труды ИИЭР. 1989. Т. 77, N 1. С. 30–53.

[19] *Кривулин Н. К.* Об оптимизации сложных систем при имитационном моделировании // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1990. Вып. 2 (N 8). С. 100–102.

[20] *Кривулин Н. К.* Алгебраические модели сетей с очередями // Математические модели и информационные технологии в менеджменте: Сб. науч. статей / Под ред. Н. К. Кривулина, В. В. Трофимова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. С. 25–38.

[21] *Кривулин Н. К.* Вычисление среднего времени цикла в сетях с операциями разъединения и объединения требований // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 3 (N 17). С. 27–35.

[22] *Кривулин Н. К.* Оценивание скорости роста вектора состояний обобщенной линейной динамической системы со случайной матрицей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2003. Вып. 3 (N 17). С. 47–55.

[23] *Кривулин Н. К.* Теорема сходимости для степеней матрицы и вычисление собственного числа в идемпотентной алгебре // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2004. Вып. 2. С. 49–55.

[24] *Кривулин Н. К.* О решении линейных векторных уравнения в идемпотентной алгебре // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 5: Сб. науч. статей / Под ред. М. К. Чиркова. СПб.: ВВМ, 2004. С. 105–113.

[25] *Кривулин Н. К.* Скорость роста вектора состояний обобщенной линейной динамической системы со случайной треугольной матрицей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 1. С. 33–38.

[26] *Кривулин Н. К.* Об оценке средней скорости роста вектора состояний линейной динамической стохастической системы в идемпотентной алгебре // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 2. С. 48–57.

[27] *Кривулин Н. К.* О решении обобщенных линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 1. С. 23–36.

[28] *Кривулин Н. К.* Собственные значения и векторы матрицы в идемпотентной алгебре // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 2. С. 29–40.

[29] *Кривулин Н. К.* Скорость роста вектора состояний обобщенной линейной стохастической системы с симметричной матрицей // Записки научных семинаров ПОМИ. 2007. Т. 341. С. 134–141.

[30] *Кривулин Н. К.* Вычисление скорости роста вектора состояний для одной модели обобщенной линейной стохастической системы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 3. С. 91–99.

[31] *Кривулин Н. К.* Примеры построения моделей и решения задач на основе методов идемпотентной алгебры // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 8: Сб. науч. статей / Под ред. М. К. Чиркова. СПб.: Золотое сечение, 2007. С. 158–183.

[32] *Кривулин Н. К.* О вычислении скорости роста вектора состояний обобщенной линейной стохастической системы второго порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 1. С. 38–48.

[33] *Кривулин Н. К.* Вычисление показателя Ляпунова в стохастических динамических моделях систем с очередями // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 4 / Под ред. О. Н. Граничина. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. С. 90–120.

[34] *Кривулин Н. К.* Вычисление показателя Ляпунова обобщенных линейных систем с показательным распределением элементов переходной матрицы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 37–46.

[35] *Кривулин Н. К.* О решении одного класса векторных уравнений в идемпотентной алгебре // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 3. С. 64–77.

[36] *Кривулин Н. К., Милов Д. С.* Оценки среднего времени безотказной работы одного класса сетей с очередями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 1 (N 1). С. 23–30.

[37] *Кривулин Н. К., Милов Д. С.* Оценка среднего времени работы для сетей с очередями со случайной топологией // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 3 (N 17). С. 27–31.

[38] *Кривулин Н. К., Романовский И. В.* О сходимости степеней матрицы обобщенного линейного оператора в идемпотентной алгебре // Проблемы математического анализа. N 34 / Под ред. Н. Н. Уральцевой. 2006. С. 69–77.

[39] *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Соболевский А. Н.* Идемпотентная математика и интервальный анализ // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, N 6. С. 47–70.

[40] *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход // Доклады РАН. 1998. Т. 363, N 3. С. 298–300.

[41] *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Математические заметки. 2001. Т. 69, N 5. С. 758–797.

[42] *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

[43] *Матвеенко В. Д.* Оптимальные траектории схемы динамического программирования и экстремальные степени неотрицательных матриц // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 1. С. 59–71.

[44] *Матвеенко В. Д.* Структура оптимальных траекторий в моделях экономической динамики // Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. СПб.: Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, 2004. 38 с.

[45] *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959. 232 с.

[46] *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 367 с.

[47] *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 136 с.

[48] *Романовский И. В.* Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом // Кибернетика. 1967. N 2. С. 66–78.

[49] *Романовский И. В.* Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний // Оптимальное планирование / Сборник трудов Института математики СО АН СССР. 1967. N 8. С. 171–193.

[50] *Романовский И. В.* Детерминированные процессы динамического программирования с дополнительными ограничениями // Кибернетика. 1971. N 5. С. 69–71.

[51] *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Советское радио, 1971. 520 с.

[52] *Шпиз Г. Б.* Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полуполях // Успехи математических наук. 2000. Т. 55. Вып. 5(335). С. 185–186.

[53] *Шпиз Г. Б.* Теорема о собственном векторе в идемпотентных пространствах // Доклады РАН. 2000. Т. 374. N 1. С. 26–28.

[54] *Baccelli F., Canales M.* Parallel simulation of stochastic Petri nets using recurrence equations // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. 1993. Vol. 3, N 1. P. 20–41.

[55] *Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and linearity: An algebra for discrete event systems. Chichester: Wiley, 1992. 514 p.

[56] *Baccelli F., Liu Z.* On the execution of parallel programs on multiprocessor systems — A queueing theory approach // Journal of the ACM. 1990. Vol. 37, N 2. P. 373–414.

[57] *von Bahr B., Esseen C.-G.* Inequalities for the rth absolute moment of a sum of random variables, $1 \le r \le 2$ // The Annals of Mathematical Statistics. 1965. Vol. 36. P. 299–303.

[58] *Blyumin S. L., Golan J. S.* One-sided complements and solutions of the equation $aXb = c$ in semirings // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2002. Vol. 29, N 8. P. 453–458.

[59] *Braker J. G., Olsder G. J.* The power algorithm in Max algebra // Linear Algebra and Its Applications. 1993. Vol. 182. P. 67–89.

[60] *Carré B. A.* An algebra for network routing problems // IMA Journal of Applied Mathematics. 1971. Vol. 7, N 3. P. 273–294.

[61] *Carré B.* Graphs and networks. Oxford: Oxford University Press, 1979. 277 p.

[62] *Chen L., Chen C.-L.* A fast simulation approach for tandem queueing systems // Proc. 1990 Winter Simulation Conf., New Orleans, LA, Dec. 9-12. Piscataway: IEEE, 1990. P. 539–546.

[63] *Cohen J. E.* Subadditivity, generalized products of random matrices and operations research // SIAM Review. 1988. Vol. 30, N 1. P. 69–86.

[64] *Ermakov S. M., Krivulin N. K.* Efficient algorithms for tandem queueing system simulation // Applied Mathematics Letters. 1994. Vol. 7, N 6. P. 45–49.

[65] *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer, 1999. 396 p.

[66] *Golan J. S.* Power algebras over semirings with applications in mathematics and computer science. Dordrecht: Kluwer, 1999. 216 p. (Mathematics and Its Applications, Vol. 488)

[67] *Greenberg A. G., Lubachevsky B. D., Mitrani I.* Algorithms for unboundedly parallel simulation // ACM Transactions on Computer Systems. 1991. Vol. 9, N 3. P. 201–221.

[68] *Gumbel E. J.* The maxima of the mean largest value and of the range // The Annals of Mathematical Statistics. 1954. Vol. 25. P. 76–84.

[69] *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 258 p. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 166)

[70] *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications // Fuzzy Sets and Systems. 1991. Vol. 41. P. 251–267.

[71] *Glasserman P., Yao D. D.* A GSMP framework for analysis of production lines // Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems / Ed. by D. D. Yao. New York: Springer-Verlag, 1994. P. 133–188. (Springer Series in Operations Research)

[72] *Glasserman P., Yao D. D.* Stochastic vector difference equations with stationary coefficients // Journal of Applied Probability. 1995.Vol. 32. P. 851–866.

[73] *Glasserman P., Yao D. D.* Subadditivity and stability of a class of discrete-event systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995.Vol. 40, N 9. P. 1514–1527.

[74] *Gondran M., Minoux M.* Linear algebra in dioids: A survey of recent results // Annals of Discrete Mathematics. 1984. Vol. 19. P. 147–164.

[75] *Hartley H. O., David H. A.* Universal bounds for mean range and extreme observation // The Annals of Mathematical Statistics. 1954. Vol. 25. P. 85–99.

[76] *Heidergott B.* Max-Plus linear stochastic systems and perturbation analysis. New York: Springer-Verlag, 2007. 320 p. (The International Series on Discrete Event Dynamic Systems, Vol. 15)

[77] *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max-Plus at work: Modeling and analysis of synchronized systems. Princeton: Princeton University Press, 2006. 226 p.

[78] *Jean-Marie A.* Analytical computation of Lyapunov exponents in stochastic event graphs // Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems. Solution Methods: Proc. 3rd QMIPS Workshop. Amsterdam: CWI, 1994. P. 309–341. (CWI Tracts, Vol. 106)

[79] *Kingman J. F. C.* Subadditive ergodic theory // The Annals of Probability. 1973. Vol. 1. P. 883–909.

[80] *Kleene S. C.* Representation of events in nerve nets and finite automata // Automata Studies / Ed. by C. E. Shannon and J. McCarthy. Princeton: Princeton University Press, 1956. P. 3–42. (Annals of Mathematics Studies, N 34)

[81] *Krivulin N. K.* Unbiased estimates for gradients of stochastic network performance measures // Acta Applicandae Mathematicae. 1993. Vol. 33. P. 21–43.

[82] *Krivulin N. K.* A recursive equations based representation for the G/G/m queue // Applied Mathematics Letters. 1994. Vol. 7, N 3. P. 73–78.

[83] *Krivulin N. K.* Using max-algebra linear models in the representation of queueing systems // Proc. 5th SIAM Conf. on Applied Linear Algebra, Snowbird, UT, June 15-18, 1994 / Ed. by J. G. Lewis. Philadelphia: SIAM, 1994. P. 155–160.

[84] *Krivulin N. K.* Recursive equations based models of queueing systems // Proc. 1994 SCS Europ. Simulation Symp., Istanbul, Turkey, Oct. 9-12, 1994 / Ed. by A. R. Kaylan, A. Lehmann, T.I. Oren. San Diego: SCS, 1994. P. 252–256.

[85] *Krivulin N. K.* A max-algebra approach to modeling and simulation of tandem queueing systems // Mathematical and Computer Modelling. 1995. Vol. 22, N 3. P. 25–37.

[86] *Krivulin N. K.* An algebraic approach in modelling and simulation of queueing networks // Circuits, Systems and Computers'96: Proc. Intern. Conf., July 15-17, 1996, Piraeus, Greece. Hellenic Naval Academy, 1996. Vol. 2. P. 668–672.

[87] *Krivulin N. K.* Max-plus algebra models of queueing networks // Proc. Intern. Workshop on Discrete Event Systems, University of Edinburgh, UK, Aug. 19-21, 1996. London: IEE, 1996. P. 76–81.

[88] *Krivulin N. K.* Bounds on mean cycle time in acyclic fork-join queueing networks // Proc. Intern. Workshop on Discrete Event Systems, Cagliari, Italy, Aug. 26-28, 1998. London: IEE, 1998. P. 469–474.

[89] *Krivulin N. K.* Monotonicity properties and simple bounds on the mean cycle time in acyclic fork-join queueing networks // Recent Advances in Information Science and Technology / Ed. by N. Mastorakis. Singapore: World Scientific, 1998. P. 147–152.

[90] *Krivulin N. K.* Algebraic modelling and performance evaluation of acyclic fork-join queueing networks // Advances in Stochastic Simulation Methods / Ed. by N. Balakrishnan, V. Melas, S. Ermakov (Statistics for Industry and Technology). Boston: Birkhäuser, 2000. P. 63–81.

[91] *Krivulin N. K.* Bounds on the state vector growth rate in stochastic dynamical systems // Proc. 5th St. Petersburg Workshop on Simulation, St. Petersburg, Russia, June 26-July 2, 2005 / Ed. by S. M. Ermakov, V. B. Melas, A. N. Pepelyshev. St. Petersburg: St. Petersburg University, 2005. P. 391–396.

[92] *Krivulin N. K.* Evaluation of Lyapunov exponent in generalized linear dynamical models of queueing networks // Proc. MATHMOD 09 Vienna. Full Papers CD Volume / Ed. by I. Troch, F. Breitenecker. Vienna: ARGESIM, 2009. P. 706–717.

[93] *Krivulin N. K., Nevzorov V. B.* On evaluation of the mean service cycle time in tandem queueing systems // Applied Statistical Science V / Ed. by M. Ahsanullah, J. Kennyon, S. K. Sarkar. New York: Nova Science Publishers, 2001. P. 145–155.

[94] *Lindley D. V.* The theory of queues with single server // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1952. Vol. 48. P. 277–289.

[95] *Mahr B.* Iteration and summability in semirings // Annals of Discrete Mathematics. 1984. Vol. 19. P. 229–256.

[96] *Marcinkiewicz J., Zigmund A.* Sur les fonctions indépendantes // Fundamenta Mathematicae. 1937. Vol. 29. P. 60–90.

[97] *Matveenko V.* Development with positive externalities: The case of the Russian economy // Journal of Policy Modeling. 1995. Vol. 17, N 3. P. 207–221.

[98] *Matveenko V.* Eigenvectors in systems with operations max and $\otimes$ // 4 Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2004): Москва, 21-24 сентября 2004 г.: Труды / Отв. ред. П.С. Краснощеков, А.А. Васин. М.: МАКС Пресс, 2004. С. 148–150.

[99] *Olsder G. J., Resing J., De Vries R., Keane M. S., Hooghiemstra G.* Discrete event systems with stochastic processing times // IEEE Transactions on Automatic Control. 1990. Vol. 35, N 3. P. 299–302.

[100] *Olsder G. J., Roos C.* Cramer and Cayley-Hamilton in the Max algebra // Linear Algebra and Its Applications. 1988. Vol. 101. P. 87–108.

[101] *Zimmermann U.* Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures. Amsterdam: North-Holland, 1981. 390 p. (Annals of Discrete Mathematics, Vol. 10)

Оглавление

Научное издание

Николай Кимович Кривулин

МЕТОДЫ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Печатается без издательского редактирования

Обложка *Е. А. Соловьевой*
Компьютерная верстка *Н. К. Кривулина*

Подписано в печать с оригинал-макета заказчика 29.07.2009
Ф-т 60x84/16. Усл. печ. л. 14,88. Доп. тираж 100 экз.
Заказ №

Издательство СПбГУ
199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11/21
Тел./факс (812) 328-44-22
E-mail: editor@unipress.ru
www.unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41

Н. К. Кривулин

МЕТОДЫ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

9 785288 049064

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА