На правах рукописи

Вакаева Александра Борисовна

Исследование почти круговых дефектов в твердом теле на макро- и наномасштабном уровне

Специальность 01.02.04 —
«Механика деформируемого твёрдого тела»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Греков Михаил Александрович**
Официальные оппоненты:	**Устинов Константин Борисович,** доктор физико-математических наук, доцент, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, ведущий научный сотрудник лаборатории геомеханики
	Лобода Ольга Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, доцент кафедры теоретической механики
Ведущая организация:	Институт проблем машиноведения РАН

Защита состоится 31 мая 2018 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/1664.html.

Автореферат разослан «____» _____________ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.232.30, д.ф.-м.н., доцент

Кустова Е. В.

Общая характеристика работы

В современной промышленности для изготовления различных элементов приборов и конструкций широко применяются материалы, содержащие различного рода неоднородности (вырезы, включения и др.). Чтобы обеспечить прочность и надежность работы конструкции, необходимо знать распределение напряжений, возникающих в результате силовых воздействий.

Актуальность темы. На границе кругового отверстия при одноосном растяжении (задача Кирша[1]) возникают напряжения, в три раза превышающие приложенную нагрузку. Отверстия и включения, которые считаются круговыми, обычно не являются таковыми, а имеют некоторое отклонение от круговой формы. В связи с этим, важно оценить влияние отклонения на напряженно-деформированное состояние тела.

Метод возмущений границы служит альтернативой конформному отображению для почти круговых дефектов. При известном конформном отображении внешности отверстия на внешность (внутренность) круга, можно найти точное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии твердого тела с отверстием. Согласно теореме Римана такое отображение всегда существует, однако в подавляющем числе случаев его аналитическое выражение может быть найдено только приближенно[2]. В случае малого отклонения формы неоднородности от круговой, метод возмущений позволяет рассмотреть любую форму отверстия или включения, что невозможно осуществить при помощи конформного отображения.

Бурное развитие нанотехнологий привело к созданию приборов, элементы которых имеют нанометровый размер (от одного до нескольких десятков нанометров). Обнаружено, что по мере уменьшения размеров деформируемых тел до нанометрового диапазона начинают проявляться масштабные эффекты их механического поведения. В первую очередь, это связано с тем, что физико-механические свойства приповерхностных слоев существенно отличаются от аналогичных свойств в глубине тела[3]. На макроуровне это различие практически не отражается на свойствах и поведении всего тела в целом. Однако в случае наноразмерных структур это различие проявляется, в частности, в заметном влиянии поверхностных напряжений на физические свойства материала.

Состояние поверхности во многих микроэлектронных и оптических устройствах имеет первостепенное значение, особенно на наноструктурном

[1] *Kirsch E. G.* Die Theorie der Elastizitat und die Bedurfnisse der Festig-keitslehre // *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.* — 1898. — Vol. 42. — P. 797-807.

[2] *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наукова Думка, 1968. — 887 с.

[3] *Duan H. L., Wang J., Karihaloo B. L.* Theory of tlasticity at the nanoscale // *Advances in Applied Mechanics.* — 2009. — Vol. 42. — P. 1-68.

уровне. Не меньшее значение имеет состояние межзерненной границы в кристаллических материалах. Исследование поверхностных явлений представляет огромный интерес, так как дает возможность получить информацию о физико-механическом поведении всего материала в целом. Для объяснения поверхностных явлений, Гертин и Мердок[4] разработали поверхностную теорию упругости, в основе которой лежит понятие поверхностной энергии и поверхностного напряжения, введенного Дж. Гиббсом[5]. В рамках этой теории поверхность твердого тела моделируется как мембрана, когерентно соединенная с основным материалом, и обладающая упругими свойствами отличными от него. Упомянутая теория была подтверждена с помощью метода молекулярной динамики[6], что позволило развить подход, описывающий деформируемое тело как многоуровневую систему, где поверхностные слои рассматриваются как отдельные подсистемы, обладающие физико-механическими свойствами, отличными от аналогичных свойств объемной части материала. Кроме того, свойства поверхности являются причиной размерных эффектов, то есть зависимости уникальных механических свойств материала от параметра размерности длины. Заметим, что влияние поверхностного напряжения на состояние идеально упругого материала на макроуровне незначительно по сравнению с влиянием других нагрузок.

Одним из важнейших направлений в рамках указанной проблемы является разработка новых теоретических методов, которые позволят изучить влияние физико-механических свойств поверхности на напряженно-деформируемое состояние упругих тел. Исследование влияния геометрических и физических параметров на напряженное состояние твердых тел позволит оценить долговечность при конструировании разнообразных деталей и элементов конструкций в заданных условиях эксплуатации, а также составить прогноз поведения материала в интересующих условиях.

Целью данной работы является разработка аналитических методов решения задачи о почти круговом дефекте в твердом теле на макро- и наномасштабном уровне, а также исследование влияние размера дефекта, его формы и степени отклонения его границы от круговой формы на напряженно-деформированное состояние тела.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с почти круговым макроотверстием в условиях плоской

[4] *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Ration. Mech. and Anal.* — 1975. — Vol. 57, no. 4. — P. 291–323.

[5] *Gibbs J. W.* The Scientific Papers of J. Willard Gibbs, vol 1. — Longmans–Green, London. 1906. — 476 p.

[6] *Miller R. E., Shenoy V. B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology.* — 2000. — Vol. 11, no. 3. — P. 139–147.

деформации при действии нагрузки на бесконечности и решение аналогичной задачи при использовании пакета конечно-элементного анализа ANSYS. Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния, полученного методом возмущений и методом конечных элементов.

- Аналитическое решение задачи о деформации цилиндрического макровключения, близкого к круговому, и матрицы, а также оценка влияния погрешности отклонения формы включения от круговой на напряженное состояние тела.
- С использованием поверхностной теории упругости Гертина – Мердока, аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с отверстием нанометрового размера при учете поверхностного напряжения. Построение решения аналогичной задачи для цилиндрической нанополости в упругом материале методом конечных элементов в пакете ANSYS. Сравнительный анализ результатов компьютерного моделирования с аналитическим решением задачи.
- Аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с близким к круговому нановключением при учете межфазного напряжения.

Методы исследования. Методы и подходы к решению поставленных в работе задач представляют собой сочетание традиционных и современных методов, применяемых в теории упругости. Теоретические выкладки и исследования основаны на использовании аппарата теории аналитических функций и математического анализа, дифференциальных уравнений, комплексных потенциалов Гурса – Колосова, соотношений Колосова – Мусхелишвили[7], метода возмущений, интегралов типа Коши, аналитических методов решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Для математического описания состояния поверхности используются определяющие соотношения поверхностной теории упругости. При проведении исследований применяются методы решения различных краевых задач, основанные на линеаризованных соотношениях Гертина – Мердока. Реализация предложенных алгоритмов производилась при использовании системы компьютерной математики MAPLE. Численные результаты получены также методами конечно-элементного анализа в пакете ANSYS.

Научная новизна:

- Для задачи об упругом теле с почти круговым дефектом при плоской деформации разработан метод возмущений, позволяющий получить решение в любом приближении и оценить влияние отклонения формы дефекта от кру-

[7] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.

говой на напряженно-деформированное состояние вблизи дефекта. Решение на макроуровне получено в виде интегралов типа Коши в каждом приближении.

- Разработан новый метод решения плоской задачи для упругого тела с отверстием нанометрового размера. В отличие от метода, основанного на использовании конформного отображения, форма отверстия, хотя и мало отличается от круговой, но может быть произвольной.
- Впервые получено решение задачи для упругого тела с наноразмерным почти круговым цилиндрическим включением в условиях плоской деформации. С использованием метода возмущений границы, соотношений объемной и поверхностной теории упругости и условия непрерывности перемещений на межфазной границе, решение найдено в любом приближении для различных форм межфазной границы.
- Проанализирован размерный эффект (size effect), который проявляется в зависимости напряженного состояния от размера дефекта в диапазоне от одного до нескольких десятков нанометров.

Научная и практическая значимость. Построенные аналитические решения для упругих тел с цилиндрическими дефектами позволяют формулировать и решать широкий класс задач, связанных с определением напряженно-деформированного состояния тела при различных видах нагружения. Потребность в решении этих задач возникает при проектировании и эксплуатации приборов микро- и оптоэлектроники с улучшенными рабочими характеристиками. Изучив влияние рассматриваемых в работе параметров на концентрацию напряжений, можно оценить прочность и надежность разнообразных изделий промышленности, содержащих наноразмерные материалы.

Решения таких задач являются важным шагом в развитии области механики деформируемого тела, которая описывает процессы влияния поверхностных и межфазных напряжений на уникальные свойства наноматериалов и характер напряженно-деформированного состояния твердых тел.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановки задач и использованием современных представлений и методов теории упругости. В ходе сопоставления аналитических результатов с результатами компьютерного моделирования в пакете конечно-элементного анализа ANSYS, установлено, что погрешность метода возмущений составляет до 5 процентов для рассмотренных форм дефектов. Данный факт позволяет сделать вывод о достаточно хорошем первом приближении разработанного метода. Также корректность полученных решений подтверждается их сопоставлением в частных случаях с результатами аналогичных задач в современной литературе.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры вычислительных методов механики деформируемого твердого тела Санкт-Петербургского государственного университета, кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого и кафедры механики сплошных сред и материаловедения Технического университета Берлина, а также на международных конференциях: XLIV – XLVII международные научные конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (2013, 2014, 2015, 2016), Санкт-Петербург, Россия; 9^{th} European Solid Mechanics Conference (ESMC 2015), July 6–10, 2015, Madrid, Spain; III международная конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова (SCP), 5–9 октября 2015, Санкт-Петербург, Россия; VII, VIII Международные школы «Физическое материаловедение» с элементами научной школы для молодежи (2016, 2017), Тольятти, Россия; XXII Петербургские чтения по проблемам прочности, 12–14 апреля 2016, Санкт-Петербург, Россия; 7^{th} European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering (ECCOMAS Congress 2016), June 5–10, 2016, Crete Island, Greece; XXI Санкт-Петербургская Ассамблея молодых ученых и специалистов, 7 декабря 2016, Санкт-Петербург, Россия; 7^{th} International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering (Coupled Problems 2017), June 12–14, 2017, Rhodes Island, Greece; Международная научная конференция по механике «VIII Поляховские чтения», 30 января – 2 февраля 2018, Санкт-Петербург, Россия.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в шестнадцати статьях, шесть из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, шесть — в других изданиях и четыре — в тезисах докладов.

В работах написанных в соавторстве с научным руководителем, М. А. Грекову принадлежит постановка задач, консультации по методикам решений и анализу результатов. В публикации [1] Е. А. Башканковой принадлежит решение соответствующей задачи методом возмущений об эллиптическом дефекте в упругом теле на макроуровне. С. А. Костырко исследовал влияние поверхностных напряжений на напряженное состояние нанорельефной поверхности, возникшей на первоначально плоской поверхности упругого тела в работе [5]. А. Б. Вакаева осуществляла реализацию разработанных методов решения поставленных задач, построение аналитических и численных решений, анализ результатов, написание компьютерных программ и построение графических результатов исследований.

Поддержка. Представленная работа была поддержана грантом Правительства Санкт-Петербурга в 2016 году (проект № 9.17.1653.2016) и Правительством РФ (именные стипендии 2016–2018), а также грантом в рамках совместной программы СПбГУ и DAAD "Дмитрий Менделеев" в 2017–2018 гг. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты № 14-01-00260 и № 18-01-00468).

Объём и структура работы. Структура диссертационной работы состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 104 страницы с 30 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 73 наименования.

Содержание работы.

Во **введении** раскрыта актуальность темы, поставлена цель, кратко описаны полученные в работе новые научные результаты, их практическая значимость, изложены основные положения, выносимые на защиту, а также приведено краткое содержание.

В **главе 1** дан краткий обзор современного состояния проблемы в области теории упругости и проведен анализ имеющихся публикаций по тематике диссертационной работы.

Глава 2 посвящена построению аналитического решения задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с почти круговыми дефектами при действии нагрузки на бесконечности.

Рассматривается упругая плоскость комплексного переменного $z = re^{i\theta}$ с отверстием, форма которого мало отличается от круга единичного радиуса ($r = 1$). В общем случае, на границе отверстия Γ действуют нормальные σ_{nn} и касательные σ_{nt} усилия, а на бесконечности заданы напряжения σ_{ij} и угол поворота ω.

Граница отверстия Γ определяется соотношением

$$z \equiv \zeta = \rho e^{i\theta} = (1 + \varepsilon f(\theta))\, e^{i\theta}, \tag{1}$$

где $|f| \leqslant 1$, ε – малый параметр, равный максимальному отклонению границы отверстия от единичной окружности, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

На рис. 1 кривые построены при $f(\theta) = \frac{s^K + s^{-K}}{2} = \cos K\theta$, где $s(\theta) = e^{i\theta}$. Максимальное отклонение кривых от единичной окружности $\varepsilon = 0{,}2$. Для сравнения на рис. 1 приведена также граница кругового отверстия единичного радиуса, для которого известно точное решение соответствующей краевой задачи.

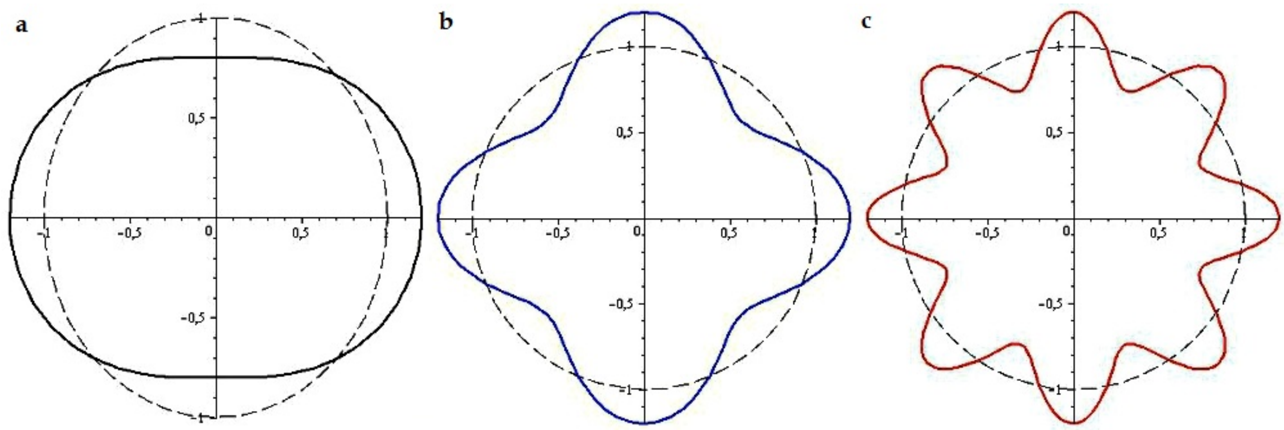

Рис. 1 — Границы почти круговых отверстий, определяемые функцией $f(\theta) = \cos K\theta$ при $K = 2, 4, 8$ (соответственно a, b, c)

Для решения задачи используются комплексные потенциалы Гурса–Колосова, представления Мусхелишвили и универсальный метод возмущений границы. Путем разложения комплексных потенциалов по степеням малого параметра ε решение задачи сведено в каждом приближении к однотипной краевой задаче Римана–Гильберта. Согласно Н. И. Мусхелишвили, решение задачи можно записать в виде

$$\Xi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{q_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + R_n(z),$$

где $R_0 = D_1 + Bz^{-1} + D_2 z^{-2}$, $R_n = 0$, $n = 1,2,\ldots,$. Константы D_1, D_2, B выражаются через напряжения на бесконечности, а функции q_n $(n > 0)$ известные функции, зависящие от предыдущих приближений. Первое приближение найдено в виде выражения от элементарных функций.

Таким образом, в главе 2 применен метод возмущений границы к решению плоской задачи теории упругости о напряженно-деформированном состоянии бесконечного тела с близким к круговому отверстием. В общем случае разработан алгоритм нахождения любого приближения и приведены формулы, по которым это приближение может быть найдено. Опираясь на полученные в первом приближении комплексные потенциалы для почти кругового отверстия (см. рис. 1), в программном пакете MAPLE построены графики зависимости концентрации напряжений от полярного угла θ при различных значениях малого параметра ε.

Так как точного решения задачи об упругой плоскости с почти круговым отверстием $f(\theta) = \cos K\theta, K = 2,3,\ldots$ не существует, то для анализа погрешности метода использовано точное решение задачи об упругой плоскости с эллиптическим отверстием, граница которого на концах большой и малой оси касается границы близкого к круговому отверстия. В результате сопоставления графических результатов в первом приближении для почти кругового отверстия с точным решением для эллиптического обнаружено, что погрешность первого приближения в рассмотренных случаях менее пяти процентов. Также на основе первого приближения сделан вывод о том, что на напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с отверстием, близким к круговому, влияет форма этого отверстия. Распределение окружных напряжений на границе зависит как от величины малого параметра ε, так и от радиуса кривизны отверстия.

Методом конечных элементов при использовании пакета ANSYS построено решение близкое к найденному, методом возмущений с погрешностью в два – три процента вплоть до значения $\varepsilon = 0{,}5$, что позволяет сделать вывод о приемлемой точности метода в первом приближении для рассмотренных вариантов отверстий.

В **главе 3** метод возмущений, примененный для случая почти кругового отверстия, обобщен для решения более сложной и общей задачи о напряженно-деформированном состоянии в окрестности упругого включения, для которой точного аналитического решения не существует. Достаточно хорошая точность первого приближения, которая была выявлена в главе 2, позволяет здесь для получения результатов так же, как и в задаче с почти круговым отверстием, ограничиться рассмотрением первого приближения.

Рассматривается бесконечное упругое тело с включением, форма которого мало отличается от окружности единичного радиуса. Считаем, что под действием нагрузки на бесконечности, тело находится в условиях плоской деформации. Таким образом, приходим к двумерной постановке краевой задачи для упругой плоскости с почти круговым включением. Пусть матрице соответствует область Ω_1, включению — Ω_2. Упругие свойства каждой области Ω_k, $k = 1{,}2$, определяются коэффициентом Пуассона ν_k и модулем сдвига μ_k. Общая граница Γ определяется тем же соотношением (1).

Предполагаем, что на границе контакта двух сред Γ выполнены условия идеального сцепления

$$\Delta\sigma_n(\zeta) = \sigma_n^- - \sigma_n^+ = 0, \quad \Delta u_n(\zeta) = u_n^- - u_n^+ = 0, \tag{2}$$

а на бесконечности заданы напряжения σ_{ij} в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2 $(z = x_1 + ix_2)$ и угол поворота ω. Здесь $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$, $u = u_1 + iu_2$; σ_{nn}, σ_{nt} — нормальное и касательное напряжения, действующие на площадке с нормалью $\mathbf{n}$; u_1, u_2 —компоненты вектора перемещений в системе координат x_1, x_2. В формуле (2) введены обозначения $\sigma_n^{\pm} = \lim\limits_{z\to\zeta\in\Gamma} \sigma_n(z)$, $u^{\pm} = \lim\limits_{z\to\zeta\in\Gamma} u(z)$. Знак «$-$» берется при $z \in \Omega_1$, а «$+$» при $z \in \Omega_2$.

Согласно работе М. А. Грекова[8], напряжения и перемещения в каждой области Ω_k ($k = 1, 2$) выражаются через четыре голоморфные функции $\Phi_k(z)$ и $\Upsilon_k(z)$

$$G(z,\eta_k) = \eta_k \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + \left[\frac{1}{\bar{z}^2}\left(\overline{\Phi_k(z)} + \Upsilon_k\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right) + \left(z - \frac{1}{\bar{z}}\right)\overline{\Phi_k'(z)}\right] e^{-2i\alpha}.$$

Здесь

$$G(z,\eta_k) = \begin{cases} \sigma_n, & \eta_k = 1, \\ -2\mu_k \dfrac{du}{dz}, & \eta_k = -\varkappa_k, \end{cases}$$

где $\varkappa_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$ при плоском напряженном состоянии, $\varkappa_k = 3 - 4\nu_k$ при плоской деформации; α — угол между осями $\mathbf{t}$ и x_1.

Применяя метод возмущений границы, в каждом приближении, решение задачи сводится к двум независимым краевым задачам Римана–Гильберта. В отличие от работы H. Gao[9], где решение получено только в первом приближении, разработан алгоритм нахождения любого приближения в терминах элементарных функций. Значения для комплексных потенциалов могут быть найдены по формулам

$$\Phi_{kn}(z) = \frac{\mu_k \Sigma_n(z) - V_n(z)}{\mu_k + \mu_l \varkappa_k}, \quad \Upsilon_{kn}(\bar{z}^{-1}) = \frac{\mu_k \varkappa_l \Sigma_n(\bar{z}^{-1}) - V_n(\bar{z}^{-1})}{\mu_l + \mu_k \varkappa_l},$$

где $\Sigma_n(z), V_n(z)$ — решения соответствующих задач Римана–Гильберта, $z \in \Omega_k$, $l = 3 - k$, $k = 1, 2$.

В главе 3 в явном виде для первого приближения приведены выражения комплексных потенциалов и формулы для напряжений на границе включения, форма которого задана по косинусоидальному закону. Получены распределения и построены графики зависимости коэффициента концентрации окружных напряжений вдоль границы от полярного угла θ для различных упругих свойств матрицы и включения. Опираясь на результаты нулевого и первого приближения, исследовано напряженно-деформированное состояние тела с включением в зависимости от геометрических и физических параметров в окрестности упругого включения. Из сопоставления соответствующих графических результатов с задачей о почти круговом отверстии сделан вы-

[8] *Греков М. А.* Сингулярная плоская задача теории упругости. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2001. — 192 с.

[9] *Gao H.* Nearly circular shear mode cracks // *Int. J. Solids Struct.* — 1988. — Vol. 24, no. 2. — P. 177-193.

вод, что наличие включения снижает концентрацию напряжений в матрице по сравнению с отверстием.

В **главе 4** рассматривается упругая плоскость с почти круговым отверстием нанометрового размера. Согласно обобщенному закону Лапласса — Юнга[10], граничное условие имеет вид

$$\sigma_n(\zeta) = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = \frac{\tau}{R} - i\frac{1}{h}\frac{d\tau}{d\theta} + p(\zeta) \equiv t^s(\zeta) + p(\zeta).$$

Здесь σ_{nn}, σ_{nt} — нормальные и касательные усилия в локальной декартовой прямоугольной системе координат n, t; R — радиус кривизны границы; h — метрический коэффициент; τ — поверхностное напряжение; p — внешняя нагрузка. На бесконечности заданы напряжения σ_{ij} и угол поворота ω.

Исследование основано на использовании соотношений объемной и поверхностной теории упругости

$$\sigma^s_{tt} = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon^s_{tt}, \quad \sigma^s_{33} = \gamma_0 + (\lambda_s + \gamma_0)\varepsilon^s_{tt}, \tag{3}$$

$$\sigma_{nn} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{nn} + \lambda\varepsilon_{tt}, \quad \sigma_{tt} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{tt} + \lambda\varepsilon_{nn}, \tag{4}$$

$$\sigma_{nt} = 2\mu\varepsilon_{nt}, \quad \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\sigma_{tt} + \sigma_{nt}). \tag{5}$$

В равенствах (3)–(5) величина γ_0 — остаточное поверхностное напряжение, которое действует при отсутствии деформаций, ε^s_{tt} — окружная поверхностная деформация, σ_{tt} — окружное напряжение, λ_s и μ_s — модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе λ и μ, ε_{ij} — компоненты объемной деформации в классической теории упругости.

Также, для решения задачи используется условие идеального сцепления поверхности с основным материалом[11], выраженное в равенстве окружных деформаций на границе Γ

$$\varepsilon^s_{tt}(\zeta) = \varepsilon_{tt}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

С помощью комплексных потенциалов Гурса–Колосова и соотношений Мусхелишвили, решение задачи сведено в каждом приближении к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению относительно поверхност-

[10] *Греков М. А., Язовская А. А.* Эффект поверхностной упругости и остаточного поверхностного напряжения в упругом теле с эллиптическим наноотверстием // *Прикладная математика и механика.* — 2014. — Т. 78. № 2. — С. 249-261.

[11] *Викулина Ю. И., Греков М. А.* Напряженное состояние плоской поверхности упругого тела нанометрового размера при периодическом силовом воздействии // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия.* — 2012. — № 4. — С. 72-80.

ного напряжения:

$$\tau_n(s) + \frac{M(\varkappa+1)}{2a - M(\varkappa-1)}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\tau_n(\eta) - i\tau_n'(\eta)}{\eta - s}d\eta\right) = G_n(s),$$

где $M = (\lambda_s + 2\mu_s)/2\mu$; $\varkappa = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$. Функции G_n выражаются через все предыдущие приближения.

Разработан алгоритм решения интегрального уравнения для любого приближения в виде степенного ряда с неизвестными коэффициентами. В отличие от работы М. А. Грекова и А. А. Язовской, решение построено без привлечения конформного отображения. Рассмотрены различные формы наноотверстий близких к круговым (см. рис. 1). Выведена формула для окружного напряжения в первом приближении и продемонстрирован размерный эффект, который проявляется в зависимости напряженного состояния границы от размера и формы наноотверстия.

Также, методами компьютерного моделирования при использовании пакета конечно-элементного анализа ANSYS построена модель упругой пластины с отверстием нанометрового размера, форма которого мало отличается от круговой. Проанализировано напряженное состояние пластины на границе отверстия при одноосном растяжении. Опираясь на результаты компьютерного моделирования, сделан вывод о приемлемой точности результата в первом приближении. При сопоставлении решения задачи, полученного при помощи метода возмущений границы, с решением метода конечных элементов обнаружено, что погрешность первого приближения, для рассмотренных случаев вплоть до $\varepsilon = 0{,}3$, не превышает пяти процентов. В том числе, проведено сравнение результатов в пакете ANSYS с классическим решением задачи без учета поверхностного напряжения.

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента концентрации напряжений (ККН) $S = \max\sigma_{tt}/\sigma_{22}^{\infty}$ на границе отверстия рис. 1а от радиуса базового кругового отверстия a при одноосном растяжении σ_{22}^{∞} вдоль оси x_2 (размерный эффект) при $\gamma_0 = 0$, $\theta = 0$. Расчеты выполнены для различных упругих свойств поверхности при $M_1 = 0{,}1$ нм (красные кривые) и при $M_2 = -0{,}152$ нм (зеленые кривые). Прямые линии синего цвета отвечает классическому решению ($M = 0$).

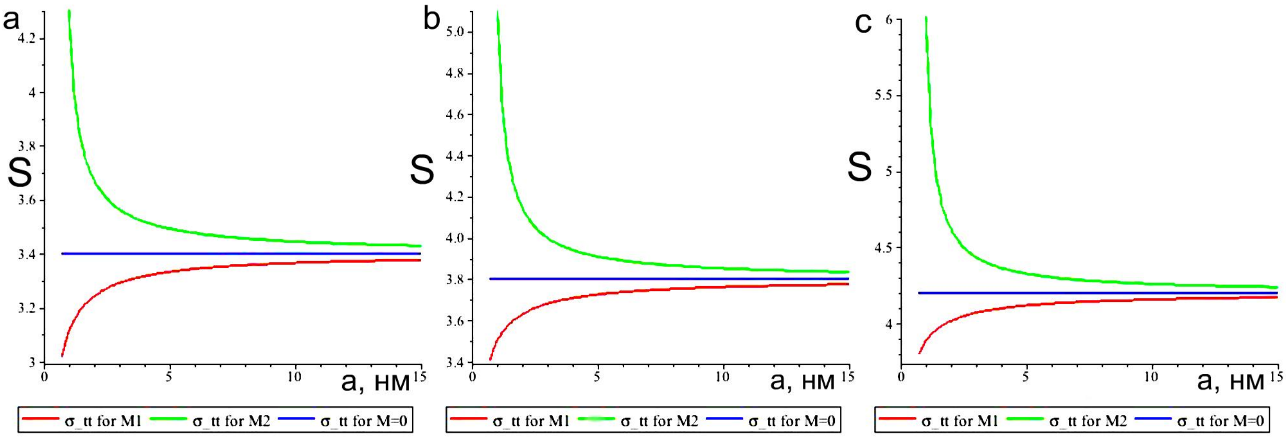

Рис. 2 — ККН на границе отверстия рис. 1а в зависимости от радиуса базового кругового отверстия a при $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3$ (соответственно a, b, c)

Таким образом, в главе 4 проанализирован эффект поверхностных напряжений, проявляющихся в нанометровом диапазоне, вследствие различия упругих свойств поверхности и основного материала. В частности:

- с увеличением радиуса базового кругового отверстия, максимальные значения окружных напряжений на границе стремятся к классическому решению без учета поверхностного напряжения;
- с уменьшением радиуса базового отверстия для различных упругих свойств поверхности максимальные значения окружных напряжений будут неограниченно возрастать или убывать в зависимости от коэффициента M;
- с увеличением отклонения границы отверстия от круговой формы, возрастает влияние поверхностного напряжения на напряженное состояние вблизи отверстия. Так, при $\varepsilon = 0{,}3$ для отверстия радиусом 2 нм относительная разность решения задачи с учетом поверхностного напряжения и классического решения составляет примерно десять процентов.

В **главе 5** рассматривается плоская задача о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с включением нанометрового размера при действии нагрузки на бесконечности с учетом межфазного напряжения. Как и в предыдущих главах, считается, что граница включения мало отличается от окружности радиуса a и может быть определена произвольной функцией. Матрице соответствует область Ω_1, включению — Ω_2. Упругие свойства каждой области Ω_k, $k = 1{,}2$, определяются коэффициентом Пуассона ν_k и модулем сдвига μ_k. Общая граница Γ представляется в виде

$$z \equiv \zeta = \rho e^{i\theta} = a\left(1 + \varepsilon f(s)\right) s.$$

На рис. 3 кривая построена при $f(\theta) = \cos 2\theta$, ее максимальное отклонение от окружности $\varepsilon = 0{,}1$. Для сравнения на рис. 3 приведена также граница кругового включения, для которого известно решение соответствующей краевой задачи[12].

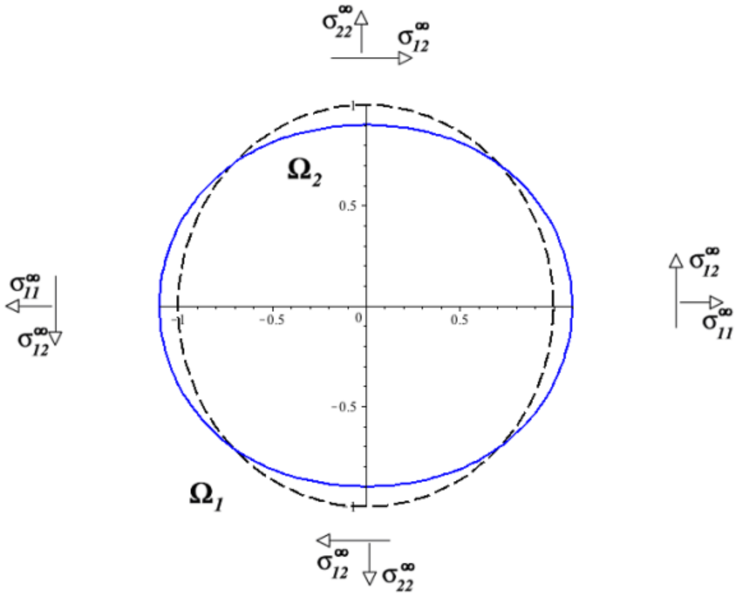

Рис. 3 — Почти круговое включение (сплошная линия) в бесконечной упругой пластине под действием усилий на бесконечности ($\varepsilon = 0{,}1$)

Предполагается, что на межфазной границе контакта двух сред Γ отсутствуют разрывы перемещений, а скачок напряжений σ^k $(k = 1, 2)$ определяется через межфазное напряжение $\tau = \sigma_{tt}^s/a$, используя обобщенный закон Лапласа – Юнга. Условия контакта имеют вид:

$$\Delta\sigma_n(\zeta) = \sigma_n^- - \sigma_n^+ = \frac{\tau}{R} - i\frac{1}{h}\frac{d\tau}{d\theta} \equiv t^s(\zeta),$$

$$\Delta u_n(\zeta) = u_n^- - u_n^+ = 0.$$

На основе метода возмущений и упрощенной поверхностной теории упргости Гертина – Мердока, для любого приближении построено аналитическое решение, позволяющее оценить влияние погрешности отклонения формы включения от круговой на напряженное состояние границы упругого включения. Также, при помощи соотношений объемной и поверхностной теории упругости и условия идеального сцепления поверхности с основным материалом разработан алгоритм составления последовательности интегральных уравнений для вычисления неизвестного межфазного напряжения в каждом приближения. Графические результаты получены в первом приближении для почти кругового нановключения, границы которого задана по косинусоидаль-

[12] *Tian L., Rajapakse R. K. N. D.* Analytical solution for size-dependent elastic field of a nanoscale circular inhomogeneity // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*. — 2007. — Vol. 74. no. 5. — P. 568-574

ному закону. При помощи программного пакета MAPLE построены графики зависимостей ККН от радиуса базового кругового включения в матрице и во включении для различных материалов. Проанализировано влияние межфазных эффектов вблизи включений различной формы и обнаружено, что учет различия упругих свойств на межфазной границе оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние вблизи включения с радиусом до 30 нм (размерный эффект). С увеличением размера включения, решение задачи стремится к классическому решению без учета межфазного напряжения.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы, которые состоят в следующем:

- Решена задача о напряженно-деформированном состоянии бесконечного упругого тела с почти круговым дефектом в условиях плоской деформации при действии нагрузки на бесконечности.
- Разработан метод возмущений границы, позволяющий получить решение задачи для любого приближения и для любой формы дефекта, а также оценить влияние малых отклонений границы дефекта от круговой формы на напряженное состояние границы дефекта.
- Получено решение плоской задачи теории упругости для бесконечного тела с почти круговым макроотверстием при использовании пакета конечно-элементного анализа ANSYS и проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния, полученного методом возмущений и методом конечных элементов.
- Аналитически решена задача о совместной деформации цилиндрического макровключения, близкого к круговому, и матрицы. Данное решение позволяет оценить влияние отклонения формы межфазной границы от круговой на напряженное состояние границы упругого включения.
- Для задач на наноуровне в общем случае построены однотипные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения, к которым в каждом приближении сводится решение задачи. Разработан алгоритм точного решения интегрального уравнения в виде степенного ряда с неизвестными коэффициентами.
- Исследован эффект поверхностных напряжений и получено новое аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с отверстием нанометрового размера.
- Получено аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с включением, близким к круговому, при учете межфазного напряжения.
- Для всех задач проанализировано влияние малого отклонения границы

дефекта от круговой формы, размера дефекта и его формы на напряженное состояние границы.

- Для задач с включением рассмотрено влияние относительной жесткости материалов на напряженное состояние тела.
- Обнаружено, что для задач на наноуровне поверхностные и межфазные напряжения оказывают значительное влияние на напряженно-деформированное состояние вблизи дефектов с радиусом базового отверстия $a < 30$ нм.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК, и изданиях, входящих в базу данных Scopus:

1. Башканкова Е. А., Вакаева А. Б., Греков М. А. Метод возмущений в задаче о почти круговом отверстии в упругой плоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2015. № 2. С. 106–117. (Bashkankova E. A., Vakaeva A. B., Grekov M. A. Perturbation method in the problem on a nearly circular hole in an elastic plane // Mech. Solids. 2015. Vol. 50. P. 198–207.).

2. Vakaeva A. B., Grekov M. A. Effect of surface stresses in an elastic body with a curvilinear nanohole // Proceedings of The 2015 International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015. P. 440–443.

3. Grekov M. A., Vakaeva A. B. Effect of nanosized asperities at the surface of a nanohole // Proceedings of the VII European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering. 2016. Vol. IV. P. 7875–7885.

4. Grekov M. A., Vakaeva A. B. The perturbation method in the problem on a nearly circular inclusion in an elastic body // Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering (Coupled Problems 2017). 2017. P. 963–971.

5. Grekov M. A., Kostyrko S. A., Vakaeva A. B. The Model of Surface Nanorelief within Continuum Mechanics // AIP Conference Proceedings, 2017. Vol. 1909, P. 020062.

6. Вакаева А. Б. Напряженно-деформированное состояние упругого тела с почти круговым включением при учете межфазного напряжения // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2017. № 4. С. 20–25.

Статьи в других изданиях и тезисах конференций

7. Вакаева А. Б., Греков М. А. Метод возмущений в задаче о криволинейном отверстии в упругой плоскости // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та. 2013. С. 159–164.

8. Вакаева А. Б., Греков М. А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого тела с почти круговыми дефектами // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 111–116.

9. Вакаева А. Б., Греков М. А. Напряженно-деформированное состояние упругого тела с почти круговым отверстием при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 125–130.

10. Grekov M., Vakaeva A. Stress-strain state of an elastic body with a nearly circular hole // Proceedings of the 9th European Solid Mechanics Conference. 2015. (Abstract).

11. Вакаева А. Б., Греков М. А. Эффект поверхностных напряжений в упругом теле с криволинейным наноотверстием // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. 2015. С. 345–346.

12. Вакаева А. Б., Греков М. А. Цилиндрическая нанополость в упругом материале // VII Международная школа «Физическое материаловедение»: сборник конкурсных докладов. 2016. С. 155–160.

13. Вакаева А. Б. Эффект поверхностных напряжений и формы нанометрового рельефа поверхности отверстия в упругом теле // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 154–158.

14. Вакаева А. Б., Греков М. А. Почти круговое отверстие нанометрового размера в упругом теле // XXII Петербургские чтения по проблемам прочности: сборник материалов. 2016. С. 158–160.

15. Grekov M. A., Vakaeva A. B. The perturbation method in the problem on a nearly circular inclusion in an elastic body // VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. 2017. (Abstract).

16. Греков М. А., Вакаева А. Б. Эффект межфазных напряжений в упругом теле с нановключением // Международная научная конференция "VIII Поляховские чтения". Тезисы докладов. Изд-во СПбГУ. 2018. С. 196-197.