На правах рукописи

Сорокин Владимир Николаевич

Разработка методов и алгоритмов решения многомерных минимаксных задач тропической оптимизации

Специальность 01.01.07 –
вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2018

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования
Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: **Кривулин Николай Кимович**,
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Ерохин Владимир Иванович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, старший научный сотрудник

Николаев Дмитрий Александрович,
кандидат физико-математических наук,
Липецкий государственный технический университет, доцент кафедры прикладной математики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»

Защита состоится «____» ____________ 2018 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9 и на сайте:
`https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/KqM3N92JNH.pdf`.

Автореферат разослан «____» ____________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

Ю. В. Чурин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тропическая (идемпотентная) математика представляет собой раздел прикладной математики, который изучает теорию полуколец и полуполей с идемпотентным сложением, а также связанные с ними вычислительные задачи. За последнее время тропическая математика стала одной из быстро развивающихся ветвей математической науки, роль которой в качестве инструмента эффективного решения задач в экономике, технике, управлении и других сферах человеческой деятельности постоянно растет.

Существует несколько основных причин для объяснения возросшего интереса к тропической математике. Во-первых, многие упомянутые задачи, в которых целевая функция в обычной математике является нелинейной и негладкой (и соответственно сложной для многих стандартных методов анализа), становятся линейными при переходе на язык идемпотентной алгебры. После этого решение таких задач может быть получено путем вычисления собственных чисел и векторов матриц или решения линейных неравенств и уравнений. Во-вторых, многие вычислительные процедуры линейной алгебры, такие, например, как алгоритм Якоби и метод Гаусса-Зейделя имеют свои идемпотентные аналоги, которые позволяют строить эффективные вычислительные алгоритмы тропической математики. При этом открываются новые возможности для исследования таких задач, что во многих случаях приводит к упрощению как процедур их численного решения, так и интерпретации полученных результатов.

Помимо этого, эволюция многих динамических систем, играющих важную роль в практических задачах (например, системы и сети с очередями), может быть представлена в терминах линейных уравнений идемпотентной алгебры, что обеспечивает основу для разработки новых подходов к численному (имитационному) моделированию таких систем.

Тропическая математика имеет большое количество приложений к задачам оптимизации, включая задачи размещения, принятия решений, сетевого планирования и другие задачи. Значительная часть этих задач может быть решена с использованием точных конечношаговых вычислительных методов, таких как методы линейного и смешанного целочисленного линейного программирования и т.п. В этих методах применяются итерационные процедуры, с помощью которых можно численно получить одно из решений, если решение существует, либо убедиться в отсутствии решений.

В отличие от решений с помощью указанных процедур, решения на основе методов тропической оптимизации во многих случаях предоставляют возможность нахождения всего множества решений в явном виде в простой матрично-векторной форме, удобной как для аналитического исследования множества решений, так и для создания алгоритмов численного решения. Полученное таким образом решение может быть напрямую использовано в других задачах в качестве области допустимых значений, обеспечивая композицию решений различных задач. Прямые явные решения позволяют проводить дальнейшее исследование множества решений математическими методами, изучать влияние дополнительных ограничений, точно определять трудоемкость нахождения решений, а также строить экономичные процедуры для последовательных и параллельных вычислений. Эти решения обычно представляют значительный интерес, что делает тему настоящей работы, направленной на разработку, обоснование и исследование эффективности прямых точных методов решения задач тропической оптимизации и их приложений, весьма актуальной.

Степень разработанности темы исследования. Начало активного развития тропической математики относится к 1950-60 годам, вскоре после публикаций работ Р. А. Канингхейм-Грина, Н. Н. Воробьева, И. В. Романовского и А. А. Корбута. Идемпотентный анализ в том смысле, в котором он понимается сейчас, был разработан научным коллективом академика В. П. Маслова.

Изучению задач тропической математики посвящен ряд исследований, опубликованных за последние несколько десятилетий, включая работы российских авторов С. Л. Блюмина, В. Д. Матвеенко, Д. Ю. Григорьева, А. Э. Гутермана, Г. Б. Михалкина, Н. К. Кривулина, С. Н. Сергеева, Я. Н. Шитова и других. За рубежом существенный вклад в развитие этой области внесли работы Д. С. Голана, Ф. Л. Бачелли, Г. Я. Олсдера, К. Циммерманна, У. Циммерманна, С. Гобера, П. Бутковича и Б. Хейдерготта.

Существует широкий класс задач оптимизации, в которых целевая функция и ограничения выражаются при помощи операций максимума и минимума, а также арифметических операций. К этому классу относятся, например, некоторые задачи размещения и сетевого планирования. Решение таких задач часто сопряжено с определенными трудностями, которые могут быть связаны, в частности, с нелинейностью и негладкостью целевой функции и ограничений.

Во многих случаях решение подобных задач можно упростить путем их представления на языке тропической математики и использования ее результатов. Тропическая (идемпотентная) математика охватывает область, связанную с изучением теории полуколец с идемпотентным сложением и ее приложениями. Одним из направлений развития этой области является разработка вычислительных методов и алгоритмов решения задач оптимизации, которые могут быть сформулированы в терминах тропической математики (задач тропической оптимизации).

Существует класс задач оптимизации, которые формулируются в терминах тропической математики, состоят в минимизации нелинейных функционалов, и могут иметь ограничения в виде линейных векторных неравенств. Решение некоторых таких задач опирается на экстремальное свойство спектрального радиуса матрицы и связано с его вычислением. Изучению этого класса задач посвящены работы Р. А. Канингхейм-Грина, П. Бутковича и

Н. К. Кривулина, в которых были найдены решения для задачи без ограничений со сложной целевой функцией, а также для задачи с более простой целевой функцией при наличии линейных ограничений на множество допустимых значений. При этом результаты для задачи с целевой функцией наиболее общего вида с линейными ограничениями известны не были.

Также имеется ряд практических задач, которые сводятся к наилучшему приближенному решению в смысле метрики Чебышева и псевдочебышевской метрики векторных уравнений, заданных на пространствах векторов над тропическими полуполями.

Исследованию задачи посвящен ряд работ, опубликованных в различное время, включая работы Р. А. Канингхейм-Грина, К. Циммерманна, П. Бутковича и Н. К. Кривулина. Представленные в этих работах результаты обычно сводятся к нахождению одного из решений и не позволяют определить все множество решений задачи. Поэтому представляет интерес разработка методов получения всех решений в явном виде в компактной векторной форме и построение вычислительных процедур поиска всех решений.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертации является исследование ряда задач тропической оптимизации для получения их полного решения в явном виде, разработка эффективных методов для численного нахождения соответствующих решений, а также реализация этих методов при решении прикладных задач, возникающих при математическом моделировании задач сетевого планирования. Для достижения указанной цели необходимо было сформулировать и решить следующие задачи:

1. Решить задачу с псевдоквадратичной целевой функцией и линейными ограничениями на множестве допустимых значений с использованием аппарата тропической математики для нахождения полного решения в явном виде в простой аналитической форме.

2. Реализовать численный метод, позволяющий найти решение этой задачи за полиномиальное по размерности задачи время.

3. Разработать математическую модель задачи планирования мероприятий по ликвидации последствий аварии с радиоактивным загрязнением местности, для решения которой может быть использовано полученное решение и разработанный вычислительный метод.

4. Использовать аппарат идемпотентной математики и технику разрежения матриц для нахождения полного множества решений расширенной задачи псевдочебышевской аппроксимации в тропическом векторном пространстве, а также реализовать численный метод получения этого множества.

5. Исследовать тропическое линейное векторное неравенство и разработать метод нахождения множества всех его решений.

Соответствие диссертации паспорту специальности. Содержание диссертационного исследования соответствует следующим пунктам паспорта специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика»: создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники (пункт 1); разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности (пункт 2); реализация численных методов в решении прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественнонаучных и научно-технических проблем, соответствие выбранных алгоритмов специфике рассматриваемых задач (пункт 4).

Научная новизна. В диссертации обобщен ряд задач тропической оптимизации с псевдоквадратичной целевой функцией, решение которых получается применением разработанного точного конечношагового численного метода, в котором количество шагов известно заранее, а шаги представляют собой применение простых матрично-векторных операций. Полученные результаты обеспечивают дальнейшее развитие теории численных методов задач тропической оптимизации.

Найдено новое применение полученных результатов при разработке численных методов решения прикладной задачи планирования операции по ликвидации последствий радиационной аварии при наличии ограничений на сроки выполнения работ.

Впервые получено полное решение задачи с псевдочебышевской метрикой, для которой был разработан точный численный метод получения множества всех решений. Предложен конечношаговый алгоритм, который используется для построения общего решения, представленного в компактной матрично-векторной форме.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы имеют теоретическую ценность и могут быть использованы для решения реальных задач сетевого планирования. В частности, как было показано в главе 2, с их помощью можно оптимальным образом наметить план действий по ликвидации последствий чрезвычайной ситуации антропогенной природы.

Результатом работы стало получение полных решений для двух задач тропической оптимизации, которые могут быть использованы в комбинации с другими задачами и ограничениями. Матрично-векторная форма решений предполагает естественное распараллеливание вычислений.

Для задачи с псевдоквадратичной целевой функцией и линейными ограничениями решение записано в простой аналитической форме в удобном виде, что делает возможным проведение дальнейшего аналитического исследования множества решений математическими методами.

Методология и методы исследования. В работе применяются инструменты линейной алгебры, общей теории чисел, теории экстремальных задач, математического моделирования, а также методы оптимизации, теории сложности вычислений, компьютерного моделирования, построения математических моделей сложных систем и идемпотентной математики. Программирование велось на языке высокого уровня R.

Положения, выносимые на защиту.

1. Полностью решена задача с псевдоквадратичной целевой функцией и линейными ограничениями, решение получено в явном виде в простой аналитической форме с использованием матрично-векторных операций.

2. Разработан точный конечношаговый численный метод построения решения этой задачи с полиномиальной по размерности задачи сложностью, где все шаги представляют собой выполнение простых матрично-векторных операций.

3. Представлена математическая модель задачи сетевого планирования мероприятий по ликвидации чрезвычайной ситуации, которая решается путем применения разработанного численного метода.

4. Решена расширенная задача псевдочебышевской аппроксимации в тропическом векторном пространстве с использованием разрежения матрицы задачи. Разработан точный численный метод нахождения множества всех решений задачи, а также процедуры, позволяющие уменьшить вычислительную сложность этого метода. Предложен конечношаговый алгоритм, который используется для построения общего решения, представленного в компактной векторной форме.

5. Получены результаты исследования линейного векторного неравенства, построена схема нахождения множества всех решений неравенства. Предложены варианты использования схемы в задачах оптимизации в случаях, когда присутствуют ограничения на множество допустимых значений в форме рассматриваемого неравенства.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность изложенных в работе теоретических результатов обеспечивается их строгим математическим доказательством. Кроме того, достоверность результатов подтверждается сравнением с ранее известными результатами. В работе приводятся полные доказательства для теорем, доказанных диссертантом; для прочих использованных утверждений приведены ссылки на доказательства.

Результаты данной работы докладывались на международной конференции International Scientific Conference «Mathematical Modeling» (Borovets, Bulgaria – 2017); на I Международной научно-практической конференции «Теоретические и прикладные вопросы комплексной безопасности» (Санкт-Петербург, Россия – 2018); на семинарах кафедры статистического моделирования Санкт-Петербургского государственного университета, семинаре «Стохастическая оптимизация в информатике» СПбГУ и семинаре СПбГУ и СПб ЭМИ по тропической математике и смежным вопросам.

Результаты работы использовались при создании рабочего прототипа на хакатоне «EdHack: Chatbots and AI», проводившегося в рамках Международной конференции по новым образовательным технологиям EdCrunch (Москва, Россия – 2016).

Результаты диссертационной работы были получены при поддержке грантов Российского гуманитарного научного фонда (РГНФ) №16-02-00059 – «Развитие моделей и методов тропической математики в прикладных задачах экономики и управления» и №13-02-00338 – «Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления», а также гранта Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) №18-010-00723A – «Разработка моделей и методов тропической математики для прикладных задач экономики и управления».

Публикации. Основные результаты работы представлены в 2 печатных работах [1, 2], опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, переводы которых [3, 4] индексируются в международных библиографических базах Scopus и Web Of Science.

Всего по результатам диссертации автором опубликовано 5 печатных работ [1, 2, 5–7].

В совместных работах с Кривулиным Н. К. [1, 2, 5, 6] соискателю принадлежит формулировка и доказательства теорем о решении задачи с псевдоквадратичной целевой функцией и линейными ограничениями, а также расширенной задачи псевдочебышевской аппроксимации в тропическом векторном пространстве, разработка алгоритмов и программных средств, проведение вычислительных экспериментов для верификации полученных результатов, соавтору принадлежат постановки задач и выбор методов решения.

Личный вклад автора. Все основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично или при его определяющем участии.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и трех приложений. Общий объём диссертации составляет 123 страниц. В тексте содержится 1 таблица и 5 рисунков. Библиография работы состоит из 103 наименований.

Содержание работы

В **первой главе** приводятся основные понятия и результаты тропической математики, на которые опираются решения, представленные в остальной части работы. Затем проводится исследование задачи с псевдоквадратичной целевой функцией и линейными ограничениями.

Рассмотрим набор $\langle \mathbb{X}, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$, где $\mathbb{X}$ – непустое множество, на котором определены операции сложения $\oplus$ и умножения $\odot$. Сложение идемпотентно: для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$. Умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо для всех элементов, кроме $\mathbb{0}$.

Примеры идемпотентных полуполей на множестве вещественных чисел: $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$, $\mathbb{R}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0 \rangle$, $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_{+} \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1 \rangle$, $\mathbb{R}_{\min,\times} = \langle \mathbb{R}_{+} \cup \{+\infty\}, \min, \times, +\infty, 1 \rangle$, где $\mathbb{R}_{+} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц над $\mathbb{X}$, состоящих из m строк и n столбцов. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, считается нулевой. Матрица, у которой нет нулевых строк (столбцов), называется регулярной по строкам (столбцам). Матрица, состоящая из одного столбца или строки, образует вектор. Множество вектор-столбцов размерности n с элементами из $\mathbb{X}$ обозначается $\mathbb{X}^{n}$. Вектор регулярен, если у него нет нулевых компонент.

Матрично-векторные операции сложения и умножения вводятся аналогично операциям в стандартной алгебре с заменой соответствующих покомпонентных операций на $\oplus$ и $\odot$.

Мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ будем называть преобразование, при котором она трансформируется в транспонированную матрицу $\boldsymbol{A}^{-} = (a_{ij}^{-})$ с элементами $a_{ij}^{-} = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij}^{-} = \mathbb{0}$ в противном случае.

Рассмотрим квадратные матрицы из $\mathbb{X}^{n \times n}$. Обозначим через $\boldsymbol{I}$ единичную матрицу, на главной диагонали которой стоят $\mathbb{1}$, а вне ее – $\mathbb{0}$. След квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Введем функцию, которая ставит в соответствие любой матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ скаляр по правилу $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^{n}$.

При условии, что $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, введем оператор, который сопоставляет матрице $\boldsymbol{A}$ матрицу $\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}$.

Скаляр λ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$.

Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ и вычисляется по формуле $\lambda = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^{n})$.

Вектор, все компоненты которого равны $\mathbb{1}$, обозначается $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})^{T}$.

Далее в главе рассматривается задача оптимизации с нелинейной (псевдоквадратичной) целевой функцией и ограничениями в форме линейного неравенства.

Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^{n}$ и скаляр $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Полное решение задачи получено в следующей форме.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ – матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$, а $\boldsymbol{B}$ – матрица, для которой $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. Для любого натурального m и $k = 1, \ldots, m$ введем обозначения*

$$\boldsymbol{S}_{0m} = \bigoplus_{i=0}^{m} \boldsymbol{B}^{i}, \qquad \boldsymbol{S}_{km} = \bigoplus_{0 \leq i_0 + \cdots + i_k \leq m-k} \boldsymbol{B}^{i_0} \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{i_k}.$$

Тогда минимум в задаче (1) *равен*

$$\theta = r \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{S}_{k,n-1} \boldsymbol{p})^{1/(k+2)},$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1} \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*} \boldsymbol{u}, \qquad \theta^{-1} \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \theta (\boldsymbol{q}^{-} (\theta^{-1} \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}.$$

Для доказательства теоремы применяется подход, при котором вводится дополнительная переменная, описывающая минимальное значение целевой функции. Затем задача сводится к решению неравенства, в котором эта переменная выступает в роли параметра. Необходимые и достаточные условия существования решений неравенства используются для вычисления параметра, а общее решение неравенства берется в качестве решения исходной задачи оптимизации.

Предлагается метод, позволяющий существенно уменьшить количество необходимых арифметических операций и производится оценка вычислительной сложности решения задачи (1), которая оказывается полиномиальной.

Полученное решение является полным и представлено в простой аналитической форме в матрично-векторном виде. Это дает возможность проводить дальнейшее аналитическое исследование задачи, а также обеспечивает возможность эффективной программной реализации и распараллеливания вычислений.

Результаты главы опубликованы в работах [1, 5].

Вторая глава посвящена применению результатов первой главы для решения задачи разработки плана мероприятий по ликвидации аварии на радиационно опасном объекте с радиоактивным загрязнением местности, которая представляет собой задачу сетевого планирования. Для решения таких задач применяются детерминированные методы, такие как метод критического пути (CPM) и диаграммы Ганта, либо вероятностные, например, метод оценки и пересмотра планов (PERT) и метод графической оценки и анализа (GERT). Задачи сетевого планирования можно сформулировать в виде задач оптимизации. Для их решения используются различные методы линейного и нелинейного программирования. При этом зачастую подобное решение является алгоритмическим и не предоставляет полного решения задачи.

Одним из способов решения некоторых задач планирования производства и сетевого планирования является применение методов тропической математики. По сравнению с методами математического программирования, которые зачастую предоставляют лишь алгоритмическое решение, для некоторых классов задач сетевого планирования применение методов тропической оптимизации дает возможность получить в явном виде полное решение.

Предположим, что на некоторой территории произошла авария с радиоактивным загрязнением местности. Необходимо провести обследование местности, выработать план первоочередных работ и осуществить его.

Для этого в район загрязнения будут отправлены несколько групп исполнителей работ. Перед началом работы каждой группы осуществляется ее доставка к месту аварии, а после завершения работы – ее эвакуация с места аварии, при этом имеются ограничения на наиболее позднюю дату высадки, а также на наиболее раннюю возможную дату эвакуации групп после завершения задания. Для каждой группы известна продолжительность работ, которые она должна выполнить, а также зависимости между сроками выполнения этих работ и сроками выполнения работ других групп.

Необходимо запланировать операцию таким образом, чтобы минимизировать максимальное время пребывания (промежуток между высадкой и эвакуацией) всех групп в опасной зоне с учетом всех ограничений.

Пусть имеется проект, состоящий из n операций. Для каждой операции с номером $i = 1, \ldots, n$ обозначим время начала через x_i, а время окончания через y_i. Каждая операция завершается сразу, как только заданные условия для ее выполнения оказываются выполненными. Введем следующие обозначения: a_{ij} — минимально возможная задержка между началом операции $j = 1, \ldots, n$ и окончанием операции i, b_{ij} – наименьший допустимый интервал времени между началом операции $j = 1, \ldots, n$ и началом операции i, l_i – конечная дата высадки и p_i – начальная дата эвакуации i-й группы.

Запишем задачу планирования в виде задачи нахождения времени начала x_i и времени завершения y_i операций для каждой из групп, которые минимизируют максимальное время нахождения групп в районе заражения, представленное как разность между датами эвакуации t_i и переброски s_i:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \max_{1 \le i \le n} (t_i - s_i), \\
& s_i = -\max(-x_i, -l_i), \\
& t_i = \max\Big(\max_{1 \le j \le n}(a_{ij} + x_j), p_i\Big), \\
& x_i \ge \max_{1 \le j \le n}(b_{ij} + x_j), \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{2}$$

Применим результат теоремы 1 для решения задачи ликвидатора, приведенной к форме (2), представив задачу в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Задача планирования сроков выполнения проекта принимает форму задачи тропической оптимизации:

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{l}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{l}^{-}\boldsymbol{p}, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Заменив $\boldsymbol{l}^{-}\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{q}^{-}$, $\boldsymbol{l}^{-}\boldsymbol{p}$ на r и применив теорему 1, получаем решение задачи над полуполем $\mathbb{R}_{\max,+}$.

В **третьей главе** рассматривается задача, связанная с нахождением наилучшего приближенного решения в смысле метрики Чебышева векторного уравнения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{p}$ обозначают заданные матрицу и вектор, $\boldsymbol{x}$ – неизвестный вектор, а произведение матрицы на вектор понимается в смысле тропического полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Проблема чебышевской аппроксимации сводится к задаче тропической оптимизации по нахождению векторов $\boldsymbol{x}$, на которых достигается минимум

$$\min \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

В дальнейшем при рассмотрении этой задачи не будем ограничиваться только полуполем $\mathbb{R}_{\max,+}$, поэтому далее будем называть подобную задачу задачей псевдочебышевской аппроксимации.

Рассмотрим задачу (3) в следующем более общем виде. Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^{n}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается минимум

$$\min \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Сначала находится минимальное значение целевой функции задачи, предлагается описание множества решений в форме системы неравенств и приводится одно из решений.

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ – регулярная по строкам матрица, а $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – регулярные векторы. Тогда минимум в задаче (4) равен $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$, а все регулярные решения $\boldsymbol{x}$ определяются системой неравенств*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}.$$

В частности, минимум достигается при $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{q}$.

Далее вводится понятие разреженной матрицы задачи $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, которая получается из исходной матрицы путём обнуления всех элементов, которые меньше порогового значения по следующему правилу:

$$\widehat{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } a_{ij} \geq \Delta^{-2}p_iq_j^{-1}; \\ \mathbb{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Показывается, что замена матрицы задачи на разреженную не изменяет минимальное значение целевой функции и множество решений. С помощью разрежения матрицы задачи находится расширенное множество решений, а затем полное решение расширенной задачи аппроксимации в виде семейства решений. Это семейство задается множеством матриц, полученных из разреженной матрицы задачи путем дальнейшего обнуления ее элементов. Общее решение представлено в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ – регулярная по строкам разреженная матрица задачи (4), где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – регулярные векторы, и $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество матриц, полученных из $\boldsymbol{A}$ путем сохранения по одному ненулевому элементу в каждой строке и обнулением остальных, а через $\boldsymbol{B}$ – матрицу, столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p}$ для всех матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$.*

Тогда минимум в задаче (4) равен Δ, а все регулярные решения $\boldsymbol{x}$ имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \leq \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{u} = \mathbb{1}.$$

В качестве следствия этого результата получаем решение задачи (3), которая является частным случаем задачи (4). Таким образом, для задачи псевдочебышевской аппроксимации было представлено множество всех решений, которое в дальнейшем может быть сокращено с учетом дополнительных требований или ограничений.

Перебор всевозможных матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$ для построения подмножеств семейства решений задачи в соответствии с результатом теоремы 2 может представлять определенные трудности. Поэтому предлагаются процедуры, позволяющие сократить число подмножеств, которые необходимо исследовать при построении полного решения.

Кроме того, некоторые подмножества семейства решений могут содержаться в других подмножествах и поэтому могут не учитываться. В работе построен формальный критерий для определения подмножеств, отбрасывание которых не меняет общего решения задачи.

Приводится алгоритм нахождения всех подмножеств решения для задачи псевдочебышевской аппроксимации, необходимых для получения полного множества решений задачи (4), в котором используются предложенные процедуры.

Точная оценка вычислительной сложности алгоритма затруднена из-за того, что в зависимости от структуры разреженной матрицы задачи и выбранного порядка обхода ее строк, число матриц, которые необходимо рассмотреть, может сильно отличаться. Поэтому была проведена статистическая оценка количества рассматриваемых матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$, для чего для каждой размерности от 3 до 10 были сгенерировано по 100000 случайных матриц со стандартным нормальным распределением элементов. Для каждой такой матрицы алгоритм находил полное решение, а число рассмотренных в процессе

Размерность	Среднее	Дисперсия	Медиана
3	1.2	0.4	1
4	1.6	0.9	1
5	2.3	1.8	2
6	3.7	3.5	2
7	6.2	7.4	4
8	10.9	15.8	6
9	20.0	35.1	9
10	37.4	73.2	14

Таб. 1. Число рассмотренных вариантов в зависимости от размерности задачи.

матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ фиксировалось. После этого было вычислено среднее, дисперсия и медиана полученного распределения числа рассмотренных матриц, результаты приведены в таблице 1.

Случай, когда в большинстве строк разреженной матрицы значительная часть элементов ненулевые и при этом все строки равнозначны в том смысле, что в каждой из них присутствуют как элементы, позволяющие значительно сократить перебор вариантов в своем столбце, так и те, которые этому не способствуют, является наихудшим. Тогда количество рассматриваемых матриц может быть экспоненциальным по размерности задачи, но в тестовых задачах, как видно из таблицы, подобные случаи обычно не встречаются.

Завершается глава примером численного решения задачи на множестве трехмерных векторов. Результаты этой главы опубликованы в работах [2, 6].

В **четвёртой главе** рассматривается неравенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \tag{5}$$

решение которого представляет большой интерес для многих приложений.

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\boldsymbol{p} \in \mathbb{X}^n$. Будем называть тропическим выпуклым конусом множество всех векторов $\boldsymbol{c} \in \mathbb{X}^n$, таких, что $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{p}$. Множество всех решений неравенства (5) представляет собой сложную фигуру, которая образуется объединением таких конусов, поэтому в явном виде решение получить трудно. Вместо этого предлагается метод, с помощью которого можно получить все решения алгоритмически.

Для начала заметим, что можно считать вектор $\boldsymbol{b} = (b_i)$ регулярным, так как для нулевых компонент неравенство выполняется автоматически. Можно «нормировать» по нему матрицу $\boldsymbol{A}$. Умножим i-ю строку $\boldsymbol{A}$ на b_i^{-1}, сведя неравенство к виду $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} \geq \mathbf{1}$, где $\tilde{\boldsymbol{A}}$ – получившаяся матрица. В дальнейшем будем считать, что неравенство сведено к данному виду.

Рассмотрим ненулевые элементы матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. Если при $a_{ij} \neq \mathbb{0}$ для некоторого x_j выполняется соотношение $a_{ij}x_j \geq \mathbb{1}$, то неравенство будет выполнено для i-й компоненты вектора $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$. Введем n параллельных осей, на которых будем наносить значения переменных $x_1, \ldots, x_n$. Для i и j таких, что $a_{ij} \neq \mathbb{0}$, отметим на i-й оси точки a_{ji}^{-1}, указывая для них индексы j. Если в какой-то точке оказывается несколько индексов, следует записать их все.

После выбора одной из отмеченных точек на оси i в качестве значения переменной x_i, неравенства будут выполняться для всех компонент b_j вектора $\boldsymbol{b}$, где индексы j соответствуют индексам выбранной точки, а также всех точек оси i левее её. Для решения задачи достаточно выбрать точки x_i так, чтобы в множество индексов, находящихся на их осях слева от выбранных точек, попадали все индексы координат вектора $\boldsymbol{b}$.

Метод можно усовершенствовать, если есть какая-либо априорная информация о векторах или же присутствуют дополнительные ограничения.

Также в главе рассматриваются возможности применения предложенного метода в задачах тропической оптимизации при наличии ограничения на множество допустимых значений в форме рассматриваемого неравенства и приводится численный пример. Результаты главы опубликованы в работе [7].

В **заключении** подведены основные итоги диссертационной работы, которые состоят в следующем.

Разработаны новые методы и алгоритмы численного решения многомерных минимаксных задач тропической оптимизации, а также программно-алгоритмическое обеспечение для их реализации при решении прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественно-научных и научно-технических проблем. Полностью решена вычислительная задача с псевдоквадратичной целевой функцией и линейными ограничениями.

Сформулирована и решена задача ликвидатора, заключающаяся в составлении плана работ по ликвидации последствий радиационной аварии.

Решена расширенная задача псевдочебышевской аппроксимации в тропическом векторном пространстве. Предложены процедуры для упрощения вычислений, а также разработан алгоритм, реализующий эти процедуры.

Получены результаты исследования тропического векторного неравенства и предложен вычислительный метод, позволяющий найти все множество решений этого неравенства.

Предлагаются возможные направления для дальнейшей работы.

В **приложениях** представлено описание процедур и компьютерный код методов, применявшихся для расчетов.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых изданиях

1. Кривулин Н. К., *Сорокин В. Н.* Решение задачи тропической оптимизации с линейными ограничениями // Вестник Санкт-Петербургского уни-

верситета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. — 2015. — Т. 2 (60). Вып. 4. — С. 541–552.

2. Кривулин Н. К., *Сорокин В. Н.* О решении одной многомерной задачи тропической оптимизации с использованием разрежения матриц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2018. — Т. 5 (63). Вып. 1. — С. 86–99.

Публикации в изданиях, входящих в базы цитирования Web of Science и SCOPUS

3. Krivulin N. K., *Sorokin V. N.* Solution of a tropical optimization problem with linear constraints // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. — 2015. — Vol. 48, N. 4. — P. 224–232.
4. Krivulin N. K., *Sorokin V. N.* Solution of a multidimensional tropical optimization problem using matrix sparsification // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. — 2018. — Vol. 51, N. 1. — P. 66–76.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

5. Кривулин Н. К., *Сорокин В. Н.* Решение задач тропической оптимизации при наличии ограничений с приложением к управлению сроками проектов // Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления. Сб. науч. статей. Вып. 2 / Под ред. Н. К. Кривулина. — Санкт–Петербург: Издательство «ВВМ», 2014. — С. 24–45.
6. Кривулин Н. К., *Сорокин В. Н.* Использование разрежения матриц для решения многомерной задачи тропической оптимизации // International Scientific Conference. Mathematical Modeling. Proceedings. Vol. 1. — Sofia: Scientific Technical Union of Mechanical Engineering «INDUSTRY-4.0», 2017. — С. 36–39.
7. *Сорокин В. Н.* Метод построения всех решений линейного векторного неравенства в идемпотентной алгебре // Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления. Сб. науч. статей. / Под ред. Н. К. Кривулина. — Санкт–Петербург: Издательство «ВВМ», 2013. — С. 108–120.

Подписано в печать 10.04.2018. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,00. Тираж 100 экз. Заказ № 0497

Отпечатано в Издательстве ВВМ.
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.