На правах рукописи

Скопинов Сергей Николаевич

Метод функции Ляпунова для анализа устойчивости на конечном промежутке времени процессов нагрева с учетом их многозначности

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	**Райтманн Фолькер**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета
Официальные оппоненты:	**Буркин Игорь Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Тульского государственного университета;
	Иванов Борис Филиппович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна.
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина)

Защита состоится «__» ____________ 2018 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/1709.html.

Автореферат разослан «__» ____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49,
доктор физико-математических наук — Чурин Ю.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации изучаются некоторые вопросы устойчивости на конечном промежутке времени для задачи микроволнового нагрева. Эта задача описывается системой уравнений гиперболического и параболического типов. Разрабатываются элементы теории процессов для данной задачи. Доказывается устойчивость на конечном промежутке времени для процессов, порожденных одномерной и трехмерной задачами микроволнового нагрева. Некоторые из этих результатов распространяются на вариационные неравенства.

Актуальность темы. Описание устойчивости на конечном промежутке времени задачи микроволнового нагрева играет существенную роль для наблюдения за процессом этого нагрева и управления им для обеспечения необходимой температуры. Микроволновый нагрев широко применяется для приготовления пищи, в промышленности и других областях. Одна из других важнейших задач микроволнового нагрева - это её медицинское применение, которое характерно для рассматриваемых задач в данной работе. В этом случае нагрев тканей в области опухоли и, вследствие этого, уничтожение злокачественных клеток, может заменить хирургическую операцию по удалению раковой опухоли, которая может находиться в области щитовидной железы, в области лёгких и других органов человека.
Одно из таких приложений - гипертермия, нагрев тканей опухоли микроволновым излучением. Простейший способ такого применения - когда раковая опухоль находится близко к поверхности тела. В этом случае пациент помещается в специальную установку, которая имеет до $N = 24$ источников микроволнового излучения, которые находятся вокруг тела пациента и действуют на одинаковой частоте. Качество процедуры гипертермии измеряется с помошью температуры T_{90}, что означает температуру, которая достигается по крайней мере в 90 процентах области опухоли. Гипертермия обычно подразумевает нагрев тела пациента до температуры $41 - 45°$C, длительность такой процедуры может достигать 30-60 минут.
Актуальность темы подтверждается также тем, что она входила в число исследований, поддержанных Немецко-Российским научным центром (G-RISC). Диссертант проходил стажировку в Германии в течение месяца (Freie Universitaet Berlin, июнь 2011 г.).

Разработанность темы. Наличие устойчивости на конечном промежутке времени задачи микроволнового нагрева - важное свойство, характеризующее поведение её решения. Оно является близким по отношению к понятию непрерывной зависимости от начальных данных, но не следует из него, так как не предполагает непрерывность решения задачи. В отличие от устойчивости на бесконечном промежутке времени в рамках теории Ляпунова здесь используется свойство, которое не следует из условия устойчивости на бесконечном промежутке времени. В отечественной литературе понятия устойчивости на конечном промежутке появляются при изучении некоторых систем механики, в т.ч. из теории упругости (Г.В. Каменков [2], Н.Х. Арутюнян и др. [1]). Вопрос устойчивости на конечном промежутке в современной трактовке был рассмотрен для обыкновенных дифференциальных уравнений в работах L. Weiss, E.F. Infante ([6]) и др., затем это понятие было расширено для разрывных систем, для которых нет условия единственности решения (А.В. Капустян и др. [5]).

Цель работы. Основной целью работы является исследование устойчивости на конечном промежутке времени для задачи микроволнового нагрева. Другими задачами, рассматриваемыми в данной работе, являются использование теории процессов для различных задач нагрева для изучения устойчивости на конечном промежутке времени, рассмотрение этих свойств для вариационных неравенств и проведение численных экспериментов для демонстрации устойчивости такого вида.

Методы исследования. В диссертации использованы следующие методы исследования:
- построение функционалов Ляпунова в виде квадратичных форм в различных функциональных пространствах,
- построение функционалов Ляпунова с помощью частотных методов в бесконечномерных гильбертовых пространствах,
- определение классов процессов с помощью решения задач нагрева,
- рассмотрение и анализ устойчивости на конечном промежутке времени для задач с гистерезисной нелинейностью в виде вариационного неравенства,
- численное моделирование задачи нагрева конечно-разностным методом в MatLab.

Результаты, выносимые на защиту.
- Получены достаточные условия устойчивости на конечном промежутке времени в одномерной задаче нагрева с помощью оценки нормы решения в разных нормах функциональных пространств и с помощью функционалов Ляпунова.
- Доказаны достаточные условия устойчивости на конечном промежутке времения для трехмерной задаче нагрева.
- Приведены достаточные условия устойчивости на конечном промежутке времени для вариационных неравенств, описывающих эволюционные систе-

мы с нелинейностями типа гистерезиса.
- Проведены численные эксперименты для одномерной задачи нагрева, иллюстрирующие свойство устойчивости на конечном промежутке времени.

Достоверность результатов. Все полученные аналитические результаты математически строго доказаны. Они совпадают с известными результатами для устойчивости на конечном промежутке времени в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Если процесс является динамической системой, результаты совпадают с аналогичными из теории динамических систем. Численное моделирование подтверждает правильность теоретических выводов для одномерной задачи микроволнового нагрева.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми, в частности впервые рассмотрена устойчивость на конечном промежутке времени решений задачи нагрева, используя при этом элементы теории процессов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Введенные элементы теории процессов могут быть использованы для исследования различных систем, описывающих прикладные задачи.
Полученные результаты для задачи микроволнового нагрева представляют теоретический интерес для изучения других задач нагрева, в частности, индукционного нагрева, который протекает при более высоких температурах. Ценность полученных результатов по устойчивости на конечном промежутке времени усиливается связью данной темы с практикой. Приведенные в диссертации результаты могут быть использованы при практическом использовании процесса микроволнового нагрева тканей биоматериала с целью предсказания температурного профиля и управления процессом нагрева.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на международных конференциях "The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications"(Орландо, Флорида, США, 2012), "The 8th International Conference of Differential and Functional Differential Equations" (Москва, 2017), "Science and Progress"в рамках научного центра G-RISC (Санкт-Петербург, 2010, 2015) и на семинарах кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета (2010-2014). Кроме того, диссертантом были сделаны два доклада в рамках стажировки в Свободном университете Берлина (Freie Universitaet Berlin) на семинарах группы профессора Б. Фидлера (Германия, Берлин, 2011).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в пяти печатных работах, в том числе в трех статьях. Статьи [1*, 2*, 3*] опубликованы в рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в перечень ВАК. В работе [1*] соавтору принадлежит постановка задачи об устойчивости на конечном промежутке времени в одномерной задаче микроволнового нагрева, все результаты получены диссертантом самостоятельно. В работе [2*] второму соавтору принадлежит постановка задач, первому соавтору принадлежат результаты по теории функционалов наблюдения. Результаты по ассимптотическому поведению решения принадлежат диссертанту. В работе [3*] второму соавтору принадлежит постановка задач, первому соавтору принадлежат результаты по исследованию устойчивости с использованием символов операторов. Все результаты по устойчивости вариационных неравенства принадлежат диссертанту.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы (всего 15 разделов), заключения, списка литературы, включающего 53 наименований. Работа изложена на 88 страницах машинописного текста и содержит 4 рисунка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе приводятся некоторые сведения о процессе микроволнового нагрева. Описываются применения микроволнового нагрева материала в промышленности и в медицине. Особое внимание уделяется медицинскому вопросу. Выводится математическая модель (начально-краевая задача), описывающая микроволновый нагрев материала. Эта модель сводится к одномерной модели по пространственной переменной при определенных предположениях.

Во второй главе приводится понятие процесса, впервые предложенное в работе C.M. Dafermos ([4]), которое является частным случаем коцикла, вводится понятие устойчивости на конечном промежутке времени для процесса.

В разделе 2.1 приводятся известные элементы теории процессов, понятие устойчивости на конечном промежутке времени для процесса и теорема о достаточных условиях устойчивости.

Пусть $(\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}})$ - полное метрическое пространство. Введём понятие процесса на $\mathcal{N}$:

Определение 1. *Отображение* $\psi : \mathbb{D} \to \mathcal{N}$ *называется процессом на* $\mathcal{N}$*, где* $\mathbb{D} = \{(t, s, u) | (t, s, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathcal{N}\}$*, если выполняются следующие свойства:*

1. $\psi^0(s,\cdot) = I_{\mathcal{N}}$ - *тождественное отображение на* $\mathcal{N}$ *для всех* $s \in \mathbb{R}$.
2.$\psi^{t+t'}(s,u) = \psi^t(t'+s, \psi^{t'}(s,u))$ *для всех* $(s,u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{N},\ t, t' \in \mathbb{R}_+$.

Введём понятие устойчивости на конечном промежутке для процесса:

Определение 2. *Процесс* $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *называется* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$ *-устойчивым, где* $0 < \alpha \leq \beta, t_0 > 0, T' \geq 0$ *- произвольные числа,* $p \in \mathcal{N}$, *если из условия* $\rho_{\mathcal{N}}(p, \psi^0(s, u_s)) < \alpha$ *следует, что* $\rho_{\mathcal{N}}(p, \psi^t(s, u_s)) < \beta$ *для всех* $t \in [t_0, t_0 + T')$, $s, u_s \in \mathbb{R} \times \mathcal{N}$.

В случае, если $\mathcal{N}$ является банаховым пространством, вместо понятия $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-устойчивости можно использовать понятие $(\alpha, \beta, t_0, T', \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$-устойчивости.

В разделе 2.2 приводятся достаточные условия устойчивости на конечном промежутке времени в одномерной задаче нагрева с помощью оценки разных норм функциональных пространств.

В разделе 2.3 приводятся достаточные условия устойчивости на конечном промежутке времени в одномерной задаче нагрева с помощью оценки функционалов Ляпунова.

Рассмотрим систему, состоящую из параболического и гиперболического уравнений в одномерном случае, которая описывается с помощью уравнения Максвелла и теплопроводности:

$$w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta) w_t = 0, \qquad x \in (0,1), t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta) {w_t}^2, \qquad x \in (0,1), t \in (0,T), \tag{2}$$

$$w(0,t) = 0, w(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in (0,1), \tag{6}$$

где θ - температура, w - интеграл по времени от ненулевой компоненты электрического поля, σ - электрическая проводимость, которая зависит от температуры, $T > 0$, θ_0, w_0, w_1 - заданные функции.

Введём обозначение $v(x,t) := w_t(x,t)$. Тогда задача $(1) - (6)$ имеет слабое решение $(w(x,t), v(x,t), \theta(x,t))$ в пространстве $Z := (C([0,T]; L^2(0,1)))^2 \times (L^2(0,T; \mathcal{H}^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1)))$ ([6]). Определим нормированное пространство $Y := \mathcal{H}^1_0(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ с нормой

$$\|(w,v,\theta)\|^2_Y = \|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{7}$$

где $(w, v, \theta) \in Y$. Рассмотрим функцию $y(t) = y(t, t_0, y_0) = (w(\cdot, t), v(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$ как решение задачи $(1)-(6)$ в пространстве Y с нормой (7), где вместо начального момента времени 0 берется произвольное $0 \leq t_0 < T$ такое, что $y(t_0, t_0, y_0) = (w_0, w_1, \theta_0)$, где $w(\cdot, t), v(\cdot, t), \theta(\cdot, t) \in Y$ и удовлетворяет системе $(1)-(6)$ в слабом смысле.

Отметим, что на протяжении всей работы во всех функциональных пространствах, в обозначении которых встречается символ H, он будет заменён на $\mathcal{H}$, чтобы отделить их от напряжённости магнитного поля H.

Сформулируем следующую теорему об устойчивости на конечном промежутке времени для системы $(1)-(6)$, которая доказывается в данном разделе:

Теорема 1. *Пусть* $J := [t_0, t_0 + T') \subset (0, T)$ *- временной интервал,* $0 < \alpha \leq \beta$ *- положительные числа, и существуют дифференцируемый по Фреше функционал* $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ *и интегрируемая функция* $g : J \to \mathbb{R}$ *такие, что следующие условия выполнены:*

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) < g(t) \tag{8}$$

для п.в. $t \in J$, *и произвольных функций* $y(\cdot) \in Z$, *таких, что* $\alpha \leq \|y(t)\|_Y \leq \beta$;

$$\int_s^t g(\tau)d\tau \leq \min_{y \in Y : \|y\|_Y = \beta} \Phi(y) - \max_{y \in Y : \|y\|_Y = \alpha} \Phi(y) \tag{9}$$

для любых $s, t \in J, s < t$.

Тогда задача $(1)-(6)$ *будет* $(\alpha, \beta, t_0, T', \|\cdot\|_Y)$-устойчива.

Для задачи $(1)-(6)$ определяется конкретный вид функционала Φ и функции g, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

В разделе 2.4 доказаны достаточные условия устойчивости на конечном промежутке времени для трехмерной задаче нагрева.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область с гладкой границей Γ, которая является открытой и односвязной. Рассмотрим задачу

$$E_t + \sigma(\theta)E = \nabla \times H, \qquad x \in \Omega, t \in (0, T), \tag{10}$$

$$H_t + \nabla \times E = 0, \qquad x \in \Omega, t \in (0, T), \tag{11}$$

$$\theta_t - \triangle\theta = \sigma(\theta)|E|^2, \qquad x \in \Omega, t \in (0, T), \tag{12}$$

$$\nu \times E(x, t) = 0, \theta(x, t) = 0, \qquad x \in \Gamma, t \in (0, T), \tag{13}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad\qquad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$E(x,0) = E_0(x),\ H(x,0) = H_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

где θ - температура, E - напряженность электрического поля, H - напряженность магнитного поля, σ - электрическая проводимость, которая зависит от температуры, $\theta_0, H_0, E_0, \sigma$ - заданные функции.

Определим пространство $Y = \mathcal{H}_0(\mathrm{rot}, \Omega) \times \mathcal{H}(\mathrm{rot}, \Omega) \cap \mathcal{H}_0(\mathrm{div}\, 0, \Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ с нормой

$$\|(E, H, \theta)\|_Y^2 = \|E\|_{L^2(\Omega)^3} + \|H\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\theta\|_{L^2(\Omega)}, \tag{16}$$

где $(E, H, \theta) \in Y$. Рассмотрим функцию $y(t) = y(t, t_0, y_0) =$
$= (E(\cdot, t), H(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$ как решение задачи $(10) - (15)$ с нормой (16), где вместо начального момента времени 0 рассматривается произвольное $t_0 \geq 0$, где $(E(\cdot, t), H(\cdot, t), \theta(\cdot, t)) \in Y$ и удовлетворяют системе $(10) - (15)$ в слабом смысле. Тогда относительно данного y понятие устойчивости на конечном промежутке времени для трехмерной задачи можно понимать как в определении 2.

Вводим функционал Ляпунова $\Phi(y)$ в виде

$$\Phi(y(t)) = \Phi(E, H, \theta) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\|E\|^2 + \|H\|^2 + a\theta^2)dx, \tag{17}$$

где $(E, H, \theta) \in Y$, a - некоторая константа.

Теорема 2. *Пусть задана варьируемая функция*

$$g(t) \equiv -\frac{c}{2}\alpha,\ t \in [0, T') \tag{18}$$

где

$$c := \min\{1, 2c_2, c_3\} \tag{19}$$

с $c_2 := 1 - \frac{2}{\kappa}$, $c_3 := -\delta(\frac{\sigma_1}{2\kappa} + 1)$, α *- параметр из определения 2. При этом* $\kappa > 0$ *и* δ *- такие параметры, что выполнены соотношения* $c_2 > 0$ *и* $c_3 > 0$. *Тогда функция* $\Phi(y)$ *из* (17) *и* $g(t)$ *из* (18) *удовлетворяют условиям теоремы 1 с* $t_0 = 0$, *что обеспечит устойчивость на конечном промежутке времени для трехмерной задачи нагрева (10)-(15).*

В разделе 2.5 приведены графики численного моделирования одномерной задачи микроволнового нагрева конечно-разностным методом в MatLab и описывается связь этих графиков с теоретическими результатами. Графики показаны на рисунках 1 и 2.

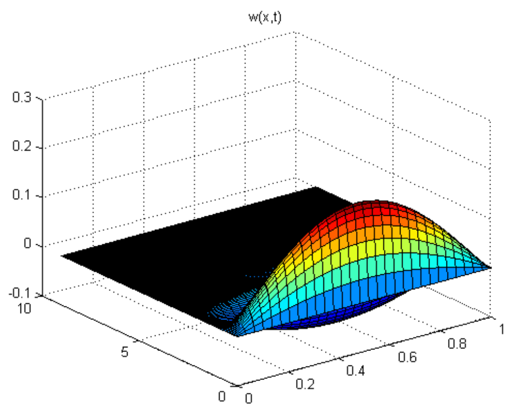

Рис. 1. Компонента $w(x,t)$ решения системы (10) – (15)

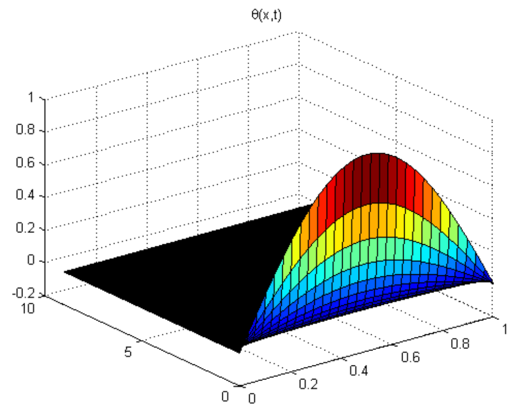

Рис. 2. Компонента $\theta(x,t)$ решения системы (10) – (15)

В третьей главе вводится понятие многозначного процесса, устойчивости и неустойчивости на конечном промежутке для многозначного процесса, а также приводятся теоремы, описывающие эти свойства.

В разделе 3.1 приводятся известные элементы теории локальных многозначных процессов, понятие движения и понятие функционала Ляпунова для локального многозначного процесса.

Пусть $(\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}})$ - полное метрическое пространство, $2^{\mathcal{N}}$ - множество всех непустых подмножеств $\mathcal{N}$. Введём понятие локального многозначного процесса на $\mathcal{N}$ аналогично тому, как это сделано в работе [5].

Определение 3. *Отображение $\psi : \mathbb{D} \to 2^{\mathcal{N}}$ называется локальным многозначным процессом на $\mathcal{N}$, где $\mathbb{D} = \{(t,s,u)|(s,u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{N}, t \in [0, b(s,u))\}$, где $[0, b(s,u))$ - максимальный правый промежуток существования отображения ψ^t, если выполняются следующие свойства:*
1. $\psi^0(s,\cdot) = I_{\mathcal{N}}$ *- тождественное отображение на $\mathcal{N}$ для всех $s \in \mathbb{R}$.*
2.$\psi^{t+t'}(s,u) \subset \psi^t(t'+s, \psi^{t'}(s,u))$ *для всех* $(s,u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{N}, \forall t' \in [0, b(s,u))$, $\forall t \in [0, b(t', \psi^{t'}(s,u))), t + t' < b(s,u)$.
Такой локальный многозначный процесс называется строгим, если $\psi^{t+t'}(s,u) = \psi^t(t', \psi^{t'}(s,u))$.

Обозначим $\mathcal{J}(s,u_s) = \{t \in \mathbb{R}|t \in [0, b(s,u_s))\}, (s,u_s) \in \mathbb{R}\times\mathcal{N}$.

Определение 4. *Пусть $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ - локальный многозначный процесс. Зафиксируем (s,u_s) - точка в $\mathbb{R}\times\mathcal{N}$. Семейство однозначных отображений*

$$\mathcal{D}(s,u_s) := \{t \in \mathcal{J}(s,u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\},$$

назовём движением ψ*, которое начинается в* (s, u_s)*, если* $u(t) \in \psi^t(s, u(s))$*,* $\forall t \in \mathcal{J}(s, u_s)$ *и* $u(s) = u_s$*. Каждое такое однозначное отображение назовём реализацией движения* $\mathcal{D}(s, u_s)$*.*

Введём понятие функционала Ляпунова для локального многозначного процесса:

Определение 5. *Пусть* $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *- локальный многозначный процесс. Отображение*

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$$

называется функционалом Ляпунова для этого процесса, если выполнены следующие условия:
(i) Однопараметрическое семейство отображений

$$\Phi(t, \cdot) : \mathcal{N} \to \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

непрерывно;
(ii) Для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\Phi}(t, u) := \lim_{s \to 0+} \sup \tfrac{1}{s}[\Phi(t + s, \psi^s(t, u)) - \Phi(t, u)],$$

где $t \in \mathbb{R}$ *и* $u \in \mathcal{N}$*.*

В разделе 3.2 вводятся понятие устойчивости и понятие неустойчивости для локального многозначного процесса. Далее приводятся достаточные условия устойчивости на конечном промежутке времени, а так же достаточные условия неустойчивости локального многозначного процесса.

Введём понятие устойчивости на конечном промежутке времени для локального многозначного процесса:

Определение 6. *Локальный многозначный процесс* $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *называется* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$*-устойчивым, где* $0 < \alpha \leq \beta, t_0 > 0, T' \geq 0$ *- произвольные числа,* $p \in \mathcal{N}$*, если для каждой реализации* $u(\cdot)$ *произвольного движения* $\mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$*,* $s \leq t_0, t_0 + T' \leq b(s, u_s), u_s \in \mathcal{N}$*,* $u(\cdot) \in \mathcal{D}(s, u_s)$ *этого процесса из условия* $\rho_{\mathcal{N}}(p, u_{t_0}) < \alpha$*,* $u_{t_0} = u(t_0)$ *следует, что* $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ *для всех* $t \in [t_0, t_0 + T')$*.*

Введём понятие неустойчивости на конечном промежутке времени для локального многозначного процесса:

Определение 7. *Локальный многозначный процесс* $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *называется* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$*-неустойчивым, где* $0 < \alpha \leq \beta$, $t_0 > 0, T' \geq 0$ *- произвольные числа,* $p \in \mathcal{N}$, *если существует движение* $\mathcal{D}(s, u_s)$, $s \leq t_0, t_0 + T' \leq b(s, u_s), u_s \in \mathcal{N}$ *этого процесса такое, что существует его реализация* $u(\cdot) \in \mathcal{D}(s, u_s)$, $\rho_{\mathcal{N}}(p, u_{t_0}) < \alpha$, $u_{t_0} = u(t_0)$ *и момент времени* $t_1 \in (t_0, t_0 + T')$ *такие, что* $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t_1)) = \beta$.

Приведем теорему о устойчивости на конечном промежутке локального многозначного процесса:

Теорема 3. *Пусть* $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *- локальный многозначный процесс,* $J := [t_0, t_0 + T') \subset \mathcal{J}(s, u_s)$ *- временной интервал,* $0 < \alpha \leq \beta, s > 0$ *- положительные числа,* $u_s \in \mathcal{N}, p \in \mathcal{N}$, *и существуют функционал Ляпунова* $\Phi : J \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ *в смысле определения (5) и интегрируемая функция* $g : J \to \mathbb{R}$ *такие, что следующие условия выполнены:*

$$\dot{\Phi}(t, u(t)) < g(t) \tag{20}$$

для $t \in J$, *и произвольных отображений* $u(t) \in C(t_0, t_0 + T'; \mathcal{N})$ *таких, что* $\alpha \leq \rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) \leq \beta$ *для любого* $t \in J$;

$$\int_s^t g(s) ds \leq \min_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p,u) = \beta} \Phi(t, u(t)) - \max_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p,u) = \alpha} \Phi(s, u(s)) \tag{21}$$

для любых $s, t \in J, s < t$.

Тогда локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *будет* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-устойчивым.

В разделе 3.3 показывается в качестве примера существование локальных многозначных процессов для одномерной задачи нагрева с оператором энтальпии.

В четвёртой главе рассматривается понятие эволюционного вариационного неравенства.

В разделе 4.1 описывается структура такого эволюционного вариационного неравенства. При этом предполагается, что Y_0 - вещественное гильбертово пространство $(\cdot, \cdot)_0$ и $\| \cdot \|_0$ - скалярное произведение и норма соответственно. Предпологается так же, что $A : \mathcal{D}(A) \subset Y_0 \to Y_0$ - замкнутый неограниченный плотно определенный линейный оператор. Гильбертово пространство Y_1 определяется как $\mathcal{D}(A)$ и снабжается скалярным произведением

$$(y, \eta)_1 := ((\beta I - A)y, \, (\beta I - A)\eta)_0 \, , \quad y, \eta \in \mathcal{D}(A) \, , \tag{22}$$

где $\beta \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ - произвольное фиксированное число, существование которого предполагается ($\rho(A)$ - резольвентное множество оператора A).

Гильбертово пространство Y_{-1} определяется как замыкание пространства Y_0 относительно нормы $\|y\|_{-1} := \|(\beta I - A)^{-1} y\|_0$. Предполагается, что мы имеем плотные и непрерывные вложения

$$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}. \tag{23}$$

Скобка двойственности $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ на $Y_{-1} \times Y_1$ определяется однозначным продолжением по непрерывности функционалов $(\cdot, y)_0$ с $y \in Y_1$ на Y_{-1}. Для произвольного числа $T > 0$ определим норму для измеримых по Бохнеру функций из $L^2(0,T;Y_j),\ j = 1, 0, -1$ с помощью формулы

$$\|y\|_{2,j} := \left(\int_0^T \|y(t)\|_j^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{24}$$

В дальнейшем такая тройка пространств $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ называется гильбертовой.

Пусть $\mathcal{W}_T$ - пространство функций $y(\cdot) \in L^2(0,T;Y_1)$, для которых $\dot{y}(\cdot) \in L^2(0,T;Y_{-1})$, снабженное нормой

$$\|y(\cdot)\|_{\mathcal{W}_T} := \left(\|y(\cdot)\|_{2,1}^2 + \|\dot{y}(\cdot)\|_{2,-1}^2 \right)^{1/2}. \tag{25}$$

Предполагается, что Ξ и Z - два других гильбертовых пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_\Xi$, $(\cdot,\cdot)_Z$ и нормами $\|\cdot\|_\Xi, \|\cdot\|_Z$, соответственно.

Вместе с выше введенным оператором $A : Y_1 \to Y_{-1}$ рассматриваются линейные ограниченные операторы $B : \Xi \to Y_{-1}$, $C : Y_1 \to Z$, многозначное отображение $\phi : \mathbb{R}_+ \times Z \to 2^\Xi$ и отображение $\psi_{cont} : Y_1 \to \mathbb{R}_+$. Относительно ϕ предполагаем, что это полунепрерывная сверху функция, ψ_{cont} - выпуклая, полунепрерывная снизу функция, $\psi_{cont} \not\equiv +\infty$. Рассмотрим эволюционное вариационное неравенство с многозначной нелинейностью в виде

$$(\dot{y} - Ay - B\xi, \eta - y)_{-1,1} + \psi_{cont}(\eta) - \psi_{cont}(y) \geq 0\,, \quad \forall\, \eta \in Y_1\,, \tag{26}$$

$$z(t) = Cy(t)\ ,\ \xi(t) \in \phi(t, z(t))\ ,\ y(0) = y_0 \in Y_0\,. \tag{27}$$

Введём другое понятие процессов из теории управления, которое появляется в работе Лихтарникова А.Л., Якубовича В.А. ([3]).

Определение 8. *Функция* $y(\cdot) \in \mathcal{W}_T \cap C(0,T;Y_0)$ *называется решением системы (26), (27) на промежутке* $(0,T)$, *если существует функция* $\xi(\cdot) \in L^2(0,T;\Xi)$ *такая, что для почти всех* $t \in (0,T)$ *соотношения (26), (27) выполнены и* $\int_0^T \psi_{cont}(y(t))dt < +\infty$. *Пара* $\{\xi(\cdot), y(\cdot)\}$ *называется* процессом. *Функция* $\xi(\cdot)$ *называется селектором относительно решения* $y(\cdot)$.

В разделе 4.2 доказываются достаточные частотные условия устойчивости на конечном интервале.

Введём понятие устойчивости на конечном интервале для вариационного неравенства:

Определение 9. *Неравенство (26), (27) называется* (α,β,t_0,T)-устойчивым, *если для каждого решения* $y(\cdot)$ *из неравенства* $\|y(t_0)\|_0 < \alpha$ *вытекает, что* $\|y(t)\|_0 < \beta$ *для всех* $t \in [t_0, t_0+T)$.

Сформулируем теорему о достаточных условиях устойчивости:

Теорема 4. *Пусть* $J := [t_0, t_0+T)$ *- временной интервал и существуют непрерывный функционал* $\Phi : J \times Y_0 \to \mathbb{R}$ *и интегрируемая функция* $g : J \to \mathbb{R}$ *такие, что следующие условия выполнены:*

$$\Phi(t,y(t)) - \Phi(s,y(s)) < \int_s^t g(\tau)d\tau \tag{28}$$

для всех $s,t \in J, s<t$, *и произвольных функций* $y(\cdot) \in \mathcal{W}_T \cap C(0,T;Y_0)$ *таких, что* $\alpha \le \|y(t)\|_0 \le \beta$ *для всех* $t \in J$;

$$\int_s^t g(\tau)d\tau \le \min_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \beta} \Phi(t,y) - \max_{y \in Y_0 : \|y\|_0 = \alpha} \Phi(s,y) \tag{29}$$

для всех $s,t \in J, s<t$.

Тогда неравенство (26), (27) (α,β,t_0,T)*-устойчиво.*

Раздел 4.3 посвящен прогнозированию потери (α,β,t_0,T)-устойчивости.

В разделе 4.4 исследуются эволюционные вариационные неравенства с нелинейностями типа гистерезиса.

Рассмотрим эволюционное вариационное неравенство с оператором гистерезиса в качестве нелинейности в виде

$$(\dot{y} - Ay - B\xi, \eta - y)_{-1,1} + \psi_{cont}(\eta) - \psi_{cont}(y) \ge 0\,, \quad \forall\, \eta \in Y_1\,, \tag{30}$$

$$z(t) = Cy(t)\ ,\ \xi(t) = \phi(z,\xi_0)(t)\ ,\ y(0) = y_0 \in Y_0, \xi_0 \in \mathcal{E}(z(0)) \tag{31}$$

где A, B, C - такие же, как в системе (26)-(27), пространства Ξ, Z, Y_{-1}, Y_0, Y_1 - такие же, как в предыдущем разделе.
Здесь ϕ - сильно непрерывный оператор гистерезиса:

$$\phi : \mathcal{D}(\phi) \subset W^{1,2}(0,T;Z) \times \Xi \to W^{1,2}(0,T;\Xi), \tag{32}$$

где $W^{1,2}(0,T;Z)$ и $W^{1,2}(0,T;\Xi)$ - пространства Соболева функций на промежутке времени $(0,T)$ со значениями в Z или Ξ соответственно. В конце раздела 4.3 в качестве иллюстрации частотных методов приводится задача нагрева стержня, для которой доказывается выполнение частотного условия.

В разделе 4.5 исследуется устойчивость на конечном интервале времени эволюционных вариационных неравенств с нелинейностями типа гистерезиса и операторами выхода вида

$$(\dot{y} - Ay - B\xi, \eta - y)_{-1,1} + \psi_{cont}(\eta) - \psi_{cont}(y) \geq 0\,, \quad \forall \eta \in Y_1\,, \tag{33}$$

$$z(t) = Cy(t)\ ,\ \xi(t) \in \phi(z, \xi_0)(t)\ ,\ y(0) = y_0 \in Y_0,\ \xi(0) = \xi_0 \in \phi(t, z(t))\,. \tag{34}$$

$$r(t) = Dy(t) + E\xi(t), \tag{35}$$

где операторы A, B, C, пространства Ξ, Z, Y_{-1}, Y_0, Y_1 - такие же, как в предыдущем разделе, R - другое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_R$. В частности, имеем $A \in \mathcal{L}(Y_0, Y_{-1})$, $B \in \mathcal{L}(\Xi, Y_{-1})$, $C \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Z)$, $D \in \mathcal{L}(Y_1, R)$ и $E \in \mathcal{L}(\Xi, R)$. Величина $r(t)$ называется выходом системы. Относительно такого выхода $r(t)$ доказывается теорема об устойчивости на конечном промежутке времени.

В заключении перечислены основные результаты диссертации. Полученные математические результаты по устойчивости на конечном промежутке времени позволяют использовать более эффективно процессы нагрева в медицине и промышленности.

Список цитируемой литературы

1. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.* Механика растущих вязко-упруго-пластических тел. – Москва: Наука, 1987.

2. *Каменков Г.В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени // *ПММ* – 1960. – 17, 5. – С. 529–540.

3. *Лихтарников А.Л., Якубович В.А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // *Сибирск. математ. журн.* – 1976. – 17, 5. – С. 1069–1085.

4. *Dafermos C.M.* An Invariance Principle for Compact Process // *Journal of Differential Equations* – 1971. – 9. – Pp. 239–252.

5. *Kapustyan A.V., Melnik V.S. and Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // *International Journal of Bifurcation and Chaos* – 2003. – Vol. 13., no. 7. – Pp. 1969–1983.

6. *Manoranjan R.V., Showalter R. and Yin H.M.* On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process // *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A* – 2006. – 15. – Pp. 1155–1168.

7. *Weiss L. and E.F. Infante* On the stability of systems defined over a finite time interval // *Proc. Nat. Acad. Sci.* – 1965. – 54. – Pp. 44–48.

Публикации автора по теме диссертации

1*. *Райтманн Ф., Скопинов С.Н.* Устойчивость на конечном промежутке времени в одномерной задаче микроволнового нагрева // *Вестник СПбГУ* – 2015. – 1, 2(60). – С. 54–59.

2*. *Kalinichenko D.Yu., Reitmann V. and Skopinov S.N.* Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell's equations and a controlled differential inclusion // *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement* – 2013. – Pp. 407–414.

3*. *Kalinichenko D.Yu., Reitmann V. and Skopinov S.N.* Stability and bifurcations on a finite time interval in variational inequalities // *Differential Equations* – 2012. – Vol. 48, no. 13. – Pp. 1–12.

4*. *Popov S., Reitmann V., Skopinov S.* Boundedness and finite-time stability for multivalued doubly-nonlinear evolution systems generated by a microwave heating problem // *Abstracts of "The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations"*. – 2017. – Moscow, Russia. – Pp. 142-143.

5*. *Skopinov S.* On two-phase microwave heating problem with monotone non-linearities // *Book of abstracts of G-RISC International Student's Conference "Science and Progress 2010"*. – 2010. – Saint-Petersburg, Russia. – P. 67.

6*. *Skopinov S.* Stability on the finite time interval for the 3-dimensional microwave heating problem // *Book of proceedings of G-RISC International Student's Conference "Science and Progress 2015"* – 2015. – Saint-Petersburg, Russia. – Pp. 50–55.