На правах рукописи

Малых Артем Евгеньевич

Алгебраическая аппроксимация глобальных аттракторов динамических систем на многообразии и некоторые вопросы ее стратификации

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	**Райтманн Фолькер**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета
Официальные оппоненты:	**Буркин Игорь Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Тульского государственного университета;
	Иванов Борис Филиппович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна.
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина)

Защита состоится «__» ____________ 2018 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/1699.html.

Автореферат разослан «__» ____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49,
доктор физико-математических наук Чурин Ю.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена изучению аппроксимаций глобальных аттракторов динамических систем с помощью алгебраических множеств.

Динамические системы являются распространенной математической моделью в различных областях науки и техники, в том числе в физике, промышленности, метеорологии. При этом важную роль играет существование глобальных аттракторов и их аппроксимация. В данной работе рассматривается аппроксимация алгебраическими множествами. Важным преимуществом алгебраических множеств является легкость их представления для компьютерных вычислений (как символьных, так и численных).

Часто встречается ситуация, когда динамическую систему, моделирующую, например, механический процесс или систему управления, удобно рассматривать не в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а на общем многообразии. Среди многообразий, на которых заданы такие системы, часто встречаются плоский цилиндр и проективное многообразие. Рассмотрение систем на многообразии, в частности, позволяет получить локализацию глобального аттрактора.

Кроме аппроксимации глобального аттрактора часто возникает необходимость получить дополнительную информацию о его структуре. Одним из инструментов для этого является стратификация Уитни.

Степень разработанности темы. Для аппроксимации глобальных аттракторов динамических систем имеются разные подходы. Один из них – применение функций Ляпунова и поверхностей без контакта с векторным полем ([1, 2]). Этот метод в применении к динамическим системам на цилиндре изложен в [3]. При использовании такой аппроксимации и локализации аттрактора, можно получить оценки различных размерностных характеристик данного аттрактора ([4]). Для аттракторов диссипативных динамических систем в бесконечномерном фазовом пространстве можно построить конечномерные проекторы на конечномерные пространства. Нередко такими аттракторами являются глобально устойчивые периодические или почти периодические решения системы.

Второй подход при аппроксимации аттракторов заключается в построении инерциальных многообразий ([5]). Для некоторых классов аттракторов существование инерциальных многообразий доказано. Недостаток данного подхода заключается в том, что аппроксимирующие множества являются гладкими многообразиями, тогда как аттракторы могут быть фрактальными множествами. Поэтому в работах [6, 7] изложен новый подход аппроксимации алгебраическими и аналитическими множествами. Такие множества в общем случае уже не являются гладкими многообразиями и могут содержать сингулярные точки.

В работе [6] и в других работах тех же авторов рассмотрены эволюционные системы в линейных (конечномерных и бесконечномерных пространствах).

Первые результаты распространения этих результатов на системы, заданные на многообразиях, изложены в [12], [8]. В данной работе эти исследования продолжаются.

Цель и задачи работы. Целью работы является расширение результатов, полученных Фояшем и Темамом (см. [6]), в двух направлениях. Первое направление — получение аппроксимационной теоремы для динамических систем с дискретным временем на $\mathbb{R}^n$, второе направление — получение результатов, позволяющих аппроксимировать динамические системы, заданные на многообразии.

Методология и методы исследования. В работе применяются:

- элементы теории аналитических и алгебраических функций и множеств;
- аппарат проективной геометрии для аппроксимации аттрактора;
- цилиндрическая алгебраическая декомпозиция как метод стратификации;
- численные аппроксимации, а также символьные вычисления, выполненые в пакете Wolfram Mathematica.

Положения, выносимые на защиту.

1. Получена адаптация для систем с дискретным временем аппроксимационной теоремы Фояша-Темама (см. [6]).
2. Получено интегральное представление точки, лежащей на глобальном аттракторе динамической системы, заданной на проективном многообразии.
3. Предложен алгоритм построения стратификации Уитни алгебраического множества в двумерном евклидовом пространстве на основе цилиндрической алгебраической аппроксимации.

Степень достоверности и апробация результатов. Правильность адаптации для динамических систем с дискретным временем аппроксимационной теоремы Фояша-Темама подтверждается численным экспериментом, проведенным для аппроксимации глобального аттрактора системы Хенона (см. [9]). Правильность работы алгоритма стратификации алгебраического множества подтверждается экспериментом, в ходе которого реализация предложенного алгоритма на языке Wolfram Mathematica применяется к двум алгебраическим множествам, в том числе к алгебраической аппроксимации аттрактора системы Хенона.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертационной работе, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные аппроксимационные результаты могут быть использованы для изучения аттракторов, возникающих при моделировании различных физических систем.

Аппробация работы. Результаты работы докладывались на международной конференции «PHYSCON 2009» (Катания, Италия 2009), на международной конференции «Science and Progress» в рамках научного центра G-RISC (Санкт-Петербург, Россия 2011), а также на международной конференции «Equadiff 2017» (Братислава, Словакия 2017).

Публикации на тему диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 печатных работах (см. [13, 14, 12, 15]), в том числе в двух статьях. Статьи [12, 15] опубликованы в изданиях, индексируемых системой Scopus.

Вклад диссертанта в совместные работы. В работе [13] соавторам принадлежит постановка задачи, а также текст, диссертанту принадлежат теоретические результаты. В работе [12] первому соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, второму соавтору принадлежит численное моделирование, а также изложение оригинальной теоремы Фояша-Темама, диссертанту принадлежат теоретические результаты. В работе [15] первому соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, второму соавтору принадлежат результаты, касающиеся оценки размерности, диссертанту принадлежит алгоритм стратификации.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Содержание работы

Во введении аргументирована актуальность темы диссертации, приведен обзор соответствующей литературы, определены цели и задачи работы, обоснована их научная ценность.

В первой главе в начале напоминаются вкратце некоторые основные понятия теории динамических систем, затем вводится понятие алгебраического множества, после чего приводятся две аппроксимационные теоремы:

теорема Фояша-Темама об аппроксимации для систем с непрерывным временем, приведенная в статье [6], а также полученная автором модификация этой теоремы для случая систем с дискретным временем.

Для начала дадим определение алгебраического множества.

Определение 1. *Пусть для некоторого* $k \in \mathbb{N}$ $P_1, ..., P_k$ *– многочлены от* n *переменных с коэффициентами из* $\mathbb{R}^n$*. Множество* $\mathcal{S}$ *называется алгебраическим, если верно, что*

$$\mathcal{S} = \mathcal{V}_n(P_1, ..., P_k),$$

где $\mathcal{V}_n(P_1, ..., P_k) = \{u \in \mathbb{R}^n | P_i(u) = 0 \ \forall i = 1, 2, ..., k\}$.

Рассмотрим дискретную динамическую систему, заданную отображением

$$u_{t+1} = F(u_t), t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где

$$F(u) = -Au - R(u), u \in \mathbb{R}^n,$$

и выполнены следующие свойства:

(A1) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный симметричный оператор;

(A2) F обратимо;

(A3) F^{-1} – отображение, которое является вещественно аналитическим в шаре $\mathcal{B}_{r_1}(v_1)$;

(A4) $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, которое является вещественно аналитическим в точке v_2 с радиусом сходимости $r_2 > 0$ таким, что $F^{-l}(\mathcal{B}_{r_1}(v_1)) \subset \mathcal{B}_{r_2}(v_2)$, где $l \in \mathbb{N}$;

(A5) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа A, при этом $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$, тогда $|\lambda_n| < 1$;

(A6) у системы, заданной соотношением (1), существует глобальный $\mathcal{B}$-аттрактор $\mathcal{A}$. Пусть этот аттрактор содержится в шаре $\mathcal{B}_{r_1}(v_1)$ радиуса r_1 с центром в точке $v_1 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть m — минимальное натуральное число, такое что $|\lambda_{m+1}| < 1$, а π_m - проектор на линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, порожденное собственными векторами, соответствующим собственным числам $\lambda_{m+1}, ..., \lambda_n$ матрицы A. Определим для любых $N, L, M \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}^n$ при фиксированных $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ формальную сумму

$$\begin{aligned} J_{N,L,M}(u) &:= (-1)^N (\pi_m A)^N u_{-N} + \\ &+ \sum_{l=1}^{N} (-1)^l (\pi_m A)^{l-1} \tilde{R}(\tilde{F}^{-l}(u, v_1, L), v_2, M), \end{aligned} \tag{2}$$

где $u_{-N} = (F^{-1})^N(u)$, $\tilde{R}(\cdot, v_2, M)$ – фрагмент ряда Тейлора длины M ряда Тейлора функции R в окрестности v_2, $\tilde{F}^{-l}(\cdot, v_1, L)$ – фрагмент ряда Тейлора длины L ряда Тейлора функции F^{-l} в окрестности v_1. Теперь приведем формулировку аппроксимационной теоремы.

Теорема 1. *Пусть имеется динамическая система* (1).
Тогда для любого $\epsilon > 0$ *найдутся натуральные* $N, L, M \in \mathbb{N}$ *такие, что для любого* $u_* \in \mathcal{A}$ *выполняется*

$$\left\| \pi_m u_* - J_{N,L,M}(u_*) \right\| < \epsilon.$$

Поскольку $J_{N,L,M}$ является комбинацией полиномиальных отображений, множество

$$\{u \in \mathbb{R}^n | \pi_m u - J_{N,L,M}(u) = 0\} \tag{3}$$

является алгебраическим.

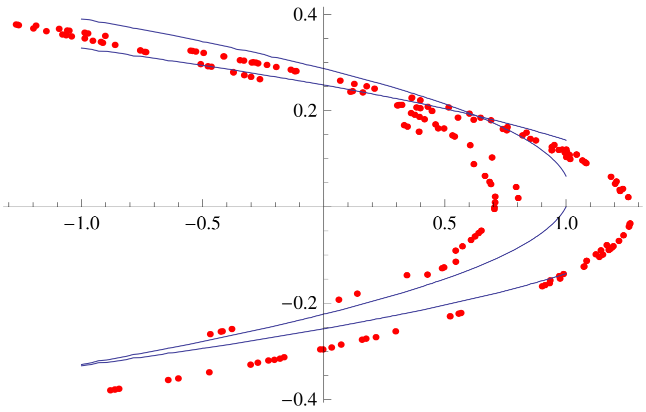
В качестве примера системы, к аттрактору которого можно применить теорему 1 рассмотрим хорошо известную систему, заданную отображением Хенона ([9]):

$$\begin{cases} u^1_{n+1} = 1 - a(u^1_n)^2 + u^2_n, \\ u^2_{n+1} = bu^1_n, \end{cases} \tag{4}$$

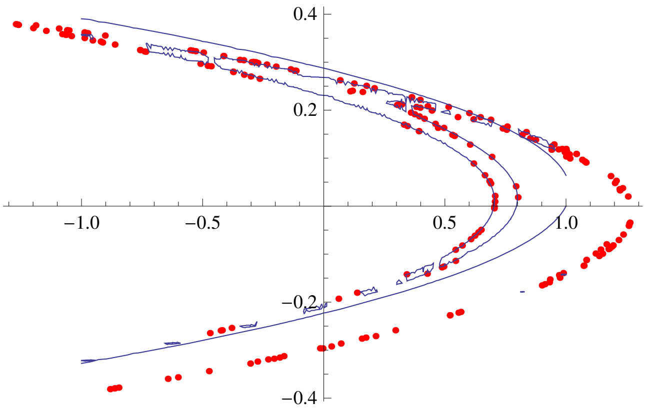
$a, b \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, ...$ Положим $a = 1.4$ и $b = 0.3$. Для этих значений параметров доказано существование глобального $\mathcal{B}$-аттрактора динамической системы, заданной отображением Хенона. Можно легко убедиться, что данная система удовлетворяет теореме 1. На рисунке 1 изображены аппроксимации глобального $\mathcal{B}$-аттрактора системы Хенона для различных значений N, L, M.

Во второй главе в качестве фазового пространства используются многообразия; вкратце даются определения, которые позволяют рассматривать динамические системы на многообразиях, приводится в качестве примера многообразия плоский цилиндр. После этого рассматриваются динамические системы на проективном многообразии. Приводится пример доопределения динамической системы, заданной на евклидовом пространстве до системы на проективном многообразии. Основным результатом данной главы является интегральное представление точки, лежащей на глобальном $\mathcal{B}$-аттракторе такой системы.

Через $\mathbb{R}P^n$ обозначается n-мерное вещественное проективное многообразие. Атлас $\mathbb{R}P^n$, использованный в этой главе — стандартный атлас для $\mathbb{R}P^n$, основанный на проективных координатах.



(a) N=2, L=2, M=2



(b) N=4, L=2, M=2

Рис. 1: Аппроксимации глобального $\mathcal{B}$-аттрактора системы Хенона.

В оригинальной теореме Фояша-Темама важную роль имеет интегральное представление точки, лежащей на аттракторе, и для того, чтобы перенести данную теорему на случай $\mathbb{R}P^n$ необходимо адаптировать это интегральное представление для $\mathbb{R}P^n$. Основная сложность при такой адаптации заключается в том, что решение может находиться в разных картах многообразия. Далее приводятся некоторые обозначения и утверждения для теоремы, дающей такую адаптацию.

Введем следующее обозначения:

$$\tilde{s}(j,i) = \begin{cases} j-1, i<j \\ j, i>j, \end{cases}$$

$$\tilde{o}(j,i) = \begin{cases} i, i<(j+1) \\ i-1, i>(j+1). \end{cases}$$

Также, за $\mathfrak{e}_i, i=1,...,n$ обозначим вектор с единицей на позиции i и с нулями на всех остальных позициях.

Через $\psi_{i,j}$ обозначается отображение перехода из карты x_i в карту x_j.

Утверждение 1. *Отображение $\psi_{j,i}$ представляется в виде*

$$\psi_{j,i}(u) = \frac{1}{u^{\tilde{o}(j,i)}}(\tilde{B}_{j,i}u + \mathfrak{e}_{\tilde{s}(j,i)}), \tag{5}$$

где $u \in \mathcal{D}(\psi_{j,i})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, $i \neq j$. При этом для $i < j$

$$\tilde{B}_{j,i} = \left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{array}{c} I_{i-1} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{array}{cccc} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{array}} \\ \hline
\begin{array}{ccc} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \end{array} & E'_{j,i} & \begin{array}{ccc} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \end{array} \\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\begin{array}{ccc} 0 & \ldots & \ldots\ 0 \end{array}} \\ \hline
\multicolumn{2}{c|}{\begin{array}{cccc} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{array}} & I_{n-j}
\end{array}\right),$$

где I_{i-1} – единичная матрица $(i-1) \times (i-1)$; $E'_{j,i}$ – $(j-i) \times (j-i+1)$ матрица с единицами на позициях $(l, l+1), l = 1, 2, ..., (j-i)$ и нулями на остальных позициях; I_{n-j} – единичная матрица $(n-j) \times (n-j)$.

Для $i > j$ имеет место аналогичное представление с точностью до размеров блоков и положения нулевой строки, а также сдвига диагонали во втором блоке.

Пусть имеется векторное поле F, задающее дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi}(t) = F(\varphi(t)), \tag{6}$$

где $F : \mathbb{R}P^n \to T\mathbb{R}P^n$. Пусть (6) задает динамическую систему

$$(\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (\mathbb{R}P^n, \rho)). \tag{7}$$

Потребуем также, чтобы динамическая система (7) имела глобальный $\mathcal{B}$-аттрактор $\mathcal{A}$. Пусть также в любой карте x_i, $i = 1, ..., n+1$ атласа представление векторного поля F является неким полиномиальным отображением. Рассмотрим некоторую точку $p \in \mathcal{A}$ и рассмотрим последовательность

$$\mathcal{T}(\varphi^{(\cdot)}(p)) = \{T_k\}_{k\in\beta} \subset \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}, \tag{8}$$

где $p \in \mathcal{A}$, $\beta = \{z \in \mathbb{Z}_+ \mid z \leq z_*\}$, где $z_* \in \mathbb{Z}_+$, либо $z_* = \infty$. При этом потребуем, чтобы:

(B1) $T_0 = 0$;

(B2) $T_{k-1} > T_k$, где $k, k-1 \in \beta$;

(B3) для любых T_k, T_{k-1} существует карта $x_{i_{k-1}}$ такая, что для любых t таких, что $T_k \leq t \leq T_{k-1}$, $k, k-1 \in \beta$, точка $\varphi^t(p)$ остается в области определения $x_{i_{k-1}}$;

(B4) для любых $k-1, k+1 \in \beta$ существует t такое, что $T_{k+1} < t < T_{k-1}$ и $\varphi^t(p) \notin \mathcal{D}(x_{i_{k-1}})$;

(B5) верно, что

$$\bigcup_{k,k-1\in\beta} (T_k, T_{k-1}] = \mathbb{R}_-;$$

(B6) верно, что любое множество вида $[\tilde{T}, 0], \tilde{T} < 0$ покрыто конечным количеством отрезков $[T_k, T_{k-1}], k, k-1 \in \beta$;

(B7) для любого $k : k-1 \in \beta$ верно, что $\|x_{i_{k-1}}(\varphi^t(p))\| \leq M_1, M_1 > 0$.

Утверждение 2. *Для системы* (7) *и точки* $p \in \mathcal{A}$ *существует* $\mathcal{T}(\varphi^{(\cdot)}(p))$.

Пусть также в любой карте x_{i_k} представление векторного поля F имеет форму

$$F_{i_k}(u) = -A_{i_k}u - R_{i_k}(u),$$

где A_{i_k} – положительно определенная симметричная $n \times n$ матрица.

Зафиксируем некоторую точку $p_* \in \mathcal{A}$. Пусть $\varphi(\cdot, p_*)$ - решение задачи Коши (6), $\varphi(0) = p_*$. Далее, для краткости будем обозначать его через φ.

Через

$$x_{i_k}(\varphi(t)) \tag{9}$$

будем обозначать координатное представление точки $\varphi(t)$ в карте x_{i_k}. Через

$$x_{i_k}^{i_{k-1}}(\varphi(t)) \tag{10}$$

будем обозначать координату с индексом i_{k-1} вектора (9).

Введем обозначения $B_{i_{k-1}} := \tilde{B}_{i_k, i_{k-1}}$, $\varphi(t) \in \mathcal{D}(x_{i_k}) \cap \mathcal{D}(x_{i_{k-1}})$, $o(i_{k-1}) := \tilde{o}(i_k, i_{k-1})$ и $s(i_{k-1}) := \tilde{s}(i_k, i_{k-1})$, также

$$H_K(\tau) := \sum_{k=1}^{K} c(k,\tau) \Big[\Big(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{x_{i_j}^{o(i_{j-1})}(\varphi(T_j))} B_{i_{j-1}} \Big) e^{\sum_{l=1}^{k-1} A_{i_{l-1}}(T_l - T_{l-1})} \tag{11}$$
$$e^{A_{i_{k-1}}(\tau - T_{k-1})} R_{i_{k-1}}(x_{i_{k-1}}(\varphi(\tau))) \Big].$$

для $k \in \beta$.

Также пусть

$$c(k,\tau) := \begin{cases} 1, \tau \in [T_{k+1}, T_k) \\ 0, \tau \notin [T_{k+1}, T_k), \end{cases}$$

Теорема 2. *При выполнении требований, описанных выше, а также если выполняется одно из двух:* β *– конечное множество с максимальным элементом* K *или* $K \in \beta$ *такое, что* $s(\{i_0, i_1, ..., i_{K-1}\}) = \{1, 2, ..., n\}$, *тогда*

$$x_{i_0}(\varphi(0)) = -\int_{-\infty}^{0} H_K(\tau)) d\tau + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{x_{i_k}^{i_{(k-1)}}(\varphi(T_k))} \mathfrak{e}^{(i_k)}. \tag{12}$$

В третьей главе рассматривается стратификация — разбиение подмножества многообразия $\mathcal{M}$ на непересекающиеся подмногообразия $\mathcal{M}$, называемые стратами, по определенным правилам, подробно описанным ниже. В контексте теории динамических систем стратификация может быть интересна тем, что позволяет описывать структуру аттракторов с помощью изучения стратификации самих аттракторов, либо их аппроксимаций (например, если точная форма аттрактора неизвестна или слишком сложна для изучения). Рассматривается специальный вид стратификации — стратификация Уитни. Основной результат третьей главы — доказательство того, что процедура цилиндрической алгебраической декомпозиции (Cylyndrical Algebraic Decomposition, CAD), примененная к алгебраическому множеству в $\mathbb{R}^2$ дает стратификацию Уитни. Также вводится понятие максимальной стратификации Уитни и алгоритм ее получения.

Определение 2. *Стратификацией множества $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ называется разбиение $\mathcal{S}$ на связные гладкие подмногообразия $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ пространства $\mathbb{R}^n$ такие, что набор $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ локально конечен в каждой точке $\mathcal{S}$ (то есть для любой точки $u \in \mathcal{S}$ верно, что существует некоторая ее окрестность, которая пересекает лишь конечное подмножество $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathcal{J}}$). Множество $\mathcal{J}$ здесь – некоторое множество индексов. Элементы набора $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ называются стратами.*

Рассмотрим стратификацию Уитни множества $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$.

Напомним, что $G_{n,k,},(n, k \in \mathbb{N}, k \leq n)$ – это набор всех k-мерных подпространств $\mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что $G_{n,k}$ имеет структуру вещественного аналитического многообразия размерности $n(n-k)$ и называется *грассманианом.*

Определение 3. *Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ – подмногообразия $\mathcal{S}$, $\dim \mathcal{Q} = m$. Если для любых последовательностей точек $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, принадлежащих $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно, сходящихся к точке $u \in \mathcal{P}$ с последовательностью касательных пространств $\{T_{v_k}\mathcal{Q}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящейся к $\mathcal{L}$ в топологии грассманиана $G_{n,m}$, верно, что последовательность линий $\{\overrightarrow{u_k v_k}\}$, содержащих 0 и $v_k - u_k$, сходится к прямой $l \subset \mathbb{R}^n$ в топологии $G_{n,1}$ и $l \subset \mathcal{L}$, говорят, что $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ удовлетворяют* условию Уитни *в точке p.*

Определение 4. *Стратификация, в которой каждая пара страт удовлетворяет условию Уитни называется стратификацией Уитни.*

Дополнительно к этому мы потребуем выполнения следующего свойства: Если $\mathcal{S}_i \cap \overline{\mathcal{S}_j} \neq \emptyset$, тогда $\mathcal{S}_i \subset \overline{\mathcal{S}_j}$ (граничное условие) .

Теорема Уитни ([10]) утверждает, что при довольно общих условиях стратификация Уитни существует. В частности, она существует для алгебраических множеств.

Определение 5. *Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{V}_n(P_1, ..., P_k)$ – алгебраическое множество, заданное системой из k полиномов $\{P_i\}_{i=1}^k$, пусть $A(u)$ – $k \times n$ матрица $(\frac{\partial P_i}{\partial u^j}(u)), i = 1, 2, ..., k, j = 1, 2, ..., n$. Пусть κ – максимальный ранг $A(u)$ на $\mathcal{S}$. Точка $u \in \mathcal{S}$ называется регулярной если $\operatorname{rank} A(u) = \kappa$, иначе точка называется сингулярной.*

Множество регулярных точек множества $\mathcal{S}$ обозначается $\mathcal{S}_{reg}$.

Начнем с описания свойств CAD. Пусть имеется алгебраическое множество $\mathcal{S} = \mathcal{V}_n(P)$, где P—некий полином. Мы не умаляем общности здесь, поскольку каждое алгебраическое множество, описанное как $\mathcal{V}_n(P_1, P_2, ..., P_K)$, где $P_1, P_2, ..., P_K$ — некие полиномы, заданные на $\mathbb{R}^n$, может быть описано как $\mathcal{V}_n(\sum_{i=1}^K P_i^2)$, то есть с помощью единственного полинома $\sum_{i=1}^K P_i^2$.

Назовем точку $u \in \mathcal{S}$ *изолированной* точкой $\mathcal{S}$, если существует такая окрестность $\mathcal{U}_u$ точки u, что $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}_u = \{u\}$.

Назовем точку $(u^1, u^2) \in \mathcal{S}$ *разбивающей* для $\mathcal{S}$, если она является изолированной или сингулярной точкой $\mathcal{S}$ или такой, что касательная к $\mathcal{S}$ в этой точке параллельна оси u^2.

Назовем точку (u^1, u^2) *точкой разбиения* для $\mathcal{S}$, если существует разбивающая точка u с координатами (u^1, u^2_*).

CAD алгебраического множества $\mathcal{S}$ является разбиение $\mathcal{S}$ на набор множеств $\{\mathcal{S}_l\}, l = 1, 2, ..., L, L \in \mathbb{N}$ со следующими свойствами:

(C1) $\bigcup_{l=1}^L \mathcal{S}_l = \mathcal{S}$;

(C2) для любых $i, j = 1, 2, ..., L, i \neq j$ верно, что $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$;

(C3) для любого $l = 1, 2, ..., L$ верно, что $\mathcal{S}_l$ является либо точкой разбиения $\mathcal{S}$, либо графиком некоторой непрерывной функции $f_l : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ от u^1, где $\mathcal{I}$ – открытый интервал, при этом график f_l не содержит точек разбиения $\mathcal{S}$, либо интервалом прямой, параллельной оси u^2, не содержащим сингулярных точек $\mathcal{S}$;

(C4) не существует $i, j = 1, 2, ..., L$ таких, что $\overline{\mathcal{S}_i} \cup \mathcal{S}_j$ является графиком некоторой непрерывной функции от u^1, заданной на открытом интервале.

В оригинальной работе по CAD (см. [11]) гарантируется свойство (C3), но его можно усилить и доказать следующее свойство:

(C3') функция f_l из свойства **(C3)** является вещественно-аналитической.

Далее мы рассматриваем только алгебраические множества $\mathcal{S}$, входящие в $\mathbb{R}^2$.

Утверждение 3. *Пусть множества $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j$ являются элементами набора $\{\mathcal{S}_l\}_{l=1}^L$, описанного выше. Если $\overline{\mathcal{S}_i} \cap \mathcal{S}_j \neq \emptyset$, $i \neq j, i, j = 1, 2, ..., L$, то*

1. *$\mathcal{S}_j \subset \overline{\mathcal{S}_i}$;*
2. *$\mathcal{S}_j$ является неизолированной точкой разбиения $\mathcal{S}$.*

Утверждение 4. *Пусть $\{\mathcal{S}_l\}_{l=1}^L, L \in \mathbb{N}$ – CAD алгебраического множества $\mathcal{S}$, тогда $\{\mathcal{S}_l\}_{l=1}^L, L \in \mathbb{N}$ является стратификацией Уитни $\mathcal{S}$.*

Введем понятие максимальной стратификации Уитни.

Определение 6. *Стратификацию Уитни $\{\mathcal{S}'_i\}_{i=1}^K$ множества $\mathcal{S}$ называется максимальной, если для любой другой стратификации Уитни $\{\mathcal{S}_j\}_{k=1}^M$ множества $\mathcal{S}$ верно, что любая страта $\mathcal{S}_j$ является подмножеством некоторой страты $\mathcal{S}'_i$.*

Определение 7. *Пусть имеется стратификация Уитни $\{\mathcal{S}_l\}_{l=1}^L$ множества $\mathcal{S}$. Для каждой страты $\mathcal{S}_l, l = 1, 2, ..., L$ назовем входящими в нее стратами те страты, замыкания которых пересекаются с $\mathcal{S}_l$.*

Термин «входящие» здесь используется в смысле английского «incoming», а не в теоретико-множественном смысле. Далее приведем вспомогательное утверждение.

Утверждение 5. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{S} = \mathcal{V}(P)$, где P — некий полином. Пусть $\{\mathcal{S}_l\}_{l=1}^L, L \in \mathbb{N}$ — CAD множества $\mathcal{S}$. Если $\mathcal{S}_* \in \{\mathcal{S}_l\}_{l=1}^L$ — регулярная точка, то у нее ноль или две входящих страт.*

Алгоритм построения максимальной стратификации Уитни в $\mathbb{R}^2$. Пусть $\{\mathcal{S}_l\}_{l=1}^L, L \in \mathbb{N}$ — CAD алгебраического множества $\mathcal{S}$. Будем собирать стратификацию пошагово. Заведем множества $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_L$, где $\mathcal{D}_0 = \emptyset$. Для $l = 1, 2, ..., L$ последовательно выполняется следующая процедура: если множество $\mathcal{S}_l$ имеет входящие множества, то это обязательно точка. Если данная точка сингулярна, то $\mathcal{D}_l := \mathcal{D}_{l-1} \cup \{\mathcal{S}_l\}$ (она добавляется в результирующую стратификацию как отдельная страта), если же это регулярная точка, то входящих страт будет ноль или две. Если их две (обозначим их $\mathcal{S}_l^1, \mathcal{S}_l^2$), то если в $\mathcal{D}_{l-1}$ есть множество $\mathcal{S}_l^*$, которое включает в себя одно из входящих множеств (пусть, не умаляя общности это $\mathcal{S}_l^1$), то $\mathcal{D}_l := \mathcal{D}_{l-1} \setminus \{\mathcal{S}_l^*\} \cup \{\mathcal{S}_l^* \cup \mathcal{S}_l^2 \cup \mathcal{S}_l\}$ (второе множество добавляется к этому множеству вместе с точкой), иначе $\mathcal{D}_l := \mathcal{D}_{l-1} \cup \{\mathcal{S}_l^1 \cup \mathcal{S}_l^2 \cup \mathcal{S}_l\}$ (в результирующей стратификации заводится новое множество, которое является объединением двух входящих множеств и точки). Если же входящих множеств у $\mathcal{S}_l$ нет, то $\mathcal{D}_l := \mathcal{D}_{l-1} \cup \{\mathcal{S}_l\}$. Множество $\mathcal{D}_L$ является итоговой стратификацией.

Утверждение 6. *Множество $\mathcal{D}_L$, описанное выше, является максимальной стратификацией Уитни множества $\mathcal{S}$.*

Перейдем теперь к примеру, непосредственно относящемуся к динамическим системам. Рассмотрим множество, полученное при аппроксимации глобального $\mathcal{B}$-аттрактора Хенона при значении параметра $N = 3$ в выражении (3) и параметрах L и M равным 10:

Пример 1. *Пусть*

$$\mathcal{S} = \mathcal{V}_2\Big(-2u^1 + \frac{10u^2}{3} - \frac{10}{3}\Big(-1 + \frac{10u^2}{3} + \frac{140}{9}\Big(-1 + u^1 + \frac{140(u^2)^2}{9}\Big)^2\Big)\Big). \quad (13)$$

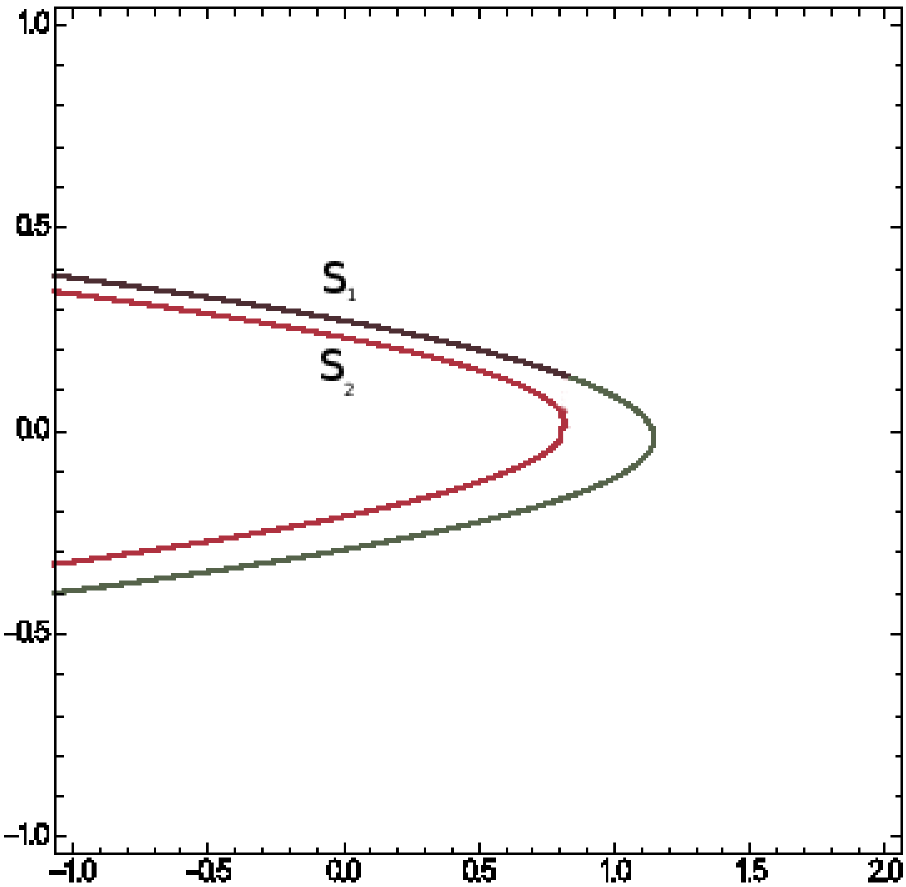


Рис. 2: Стратификация множества (13).

Аппроксимационное множество, изображенное на рисунке 2, состоит из двух страт $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, которые являются параболами, повернутыми на $\frac{\pi}{2}$.

<u>В заключении</u> перечислены основные результаты диссертации. В диссертационной работе решена задача построения алгебраической аппроксимации глобальных $\mathcal{B}$-аттракторов динамических систем с дискретным временем на евклидовом пространстве, заданных уравнением с полиномиальной правой частью. Для этого получена модификация аппроксимационной теоремы Фояша-Темама, применимая к этому классу систем.

Проведен численный эксперимент по аппроксимации глобального $\mathcal{B}$-аттрактора системы Хенона, использующий модификацию аппроксимационной теоремы Фояша-Темама для систем с дискретным временем, заданных на евклидовом пространстве.

В аналитическом виде найдено интегральное представление точки, лежащей на аттракторе динамической системы с непрерывным временем, заданной на проективном многообразии.

Предложен алгоритм построения стратификации Уитни для алгебраических множеств, содержащихся в $\mathbb{R}^2$.

Цитированная литература

1. *Леонов Г.А.* Функции Ляпунова в теории размерности аттракторов // Прикладная математика и механика. — 2012. — no. 76(2). — Pp. 180–196.
2. *Leonov G.A., Reitmann V.* Attraktoreingrenzung fur Nichtlineare Systeme. — Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1987. — 196 p.
3. *Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B.* Non-local Methods for Pendulum-like Feedback Systems. — Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1992. — 242 p.
4. *Райтманн Ф.* Динамические системы, аттракторы и оценки их размерности. — СПб.: Издательство СПбГУ, 2013. — 224 с.
5. *Foias C., Sell G.R., Temam R.* Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // Journal of Differential Equations. — 2004. — Vol. 73, no. 2. — Pp. 309–353.
6. *Foias C., Temam R.* The algebraic approximation of attractors: the finite dimensional case // Physica D Nonlinear Phenomena. — 1988. — Vol. 25, no. 5. — Pp. 163–182.
7. *Levine G., Tabor M.* Integrating the nonintegrable: analytic structure of the Lorenz system revisited // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1989. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 189–210.
8. *Leonov G.A., Reitmann V.* Extensions of Lyapunov's ideas in the algebraic approximation of attractors // Международный конгресс «Нелинейный динамический анализ - 2007», Санкт-Петербург, Россия. — 2007. — Pp. 486–486.
9. *Henon M.A.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys. — 1976. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 69–77.

10. *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets // Transactions of the American Mathematical Society. — 1992. — Vol. 36. — Pp. 228–254.

11. *Arnon D., Collins G., McCallum S.* // SIAM J. Comput. — 1984. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 865–877.

Публикации по теме диссертации

12. *Malykh A.E., Reitmann V., Rozhkov G.S.* Algebraic approximation of attractors of dynamical systems on manifolds // Differential Equations. — 2013. — Vol. 49, no. 13. — Pp. 1704–1728.

13. *Leonov G.A., Malykh A.E., Reitmann V.* Stratification of approximating surfaces for the Lorenz attractor // Proc. of 4th International Scientific Conference on Physics and Control «PHYSCON 2009». — 2009. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 1–4.

14. *Malykh A.E.* Algebraic approximation of global attractors of discrete dynamical systems // Proc. of International Student Conference «Science and Progress». — 2011. — Pp. 24–27.

15. *Kruk A.V., Malykh A.E., Reitmann V.* Upper bounds for the Hausdorff Dimension and the Stratification of an Invariant Set of Evolution System on a Hilbert Manifold // Differential Equations. — 2017. — Vol. 53, no. 13. — Pp. 1715–1733.