На правах рукописи

Потехина Елена Алексеевна

Применение произведения Адамара степенных рядов в комбинаторных и вероятностных задачах

Специальность 01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена в Череповецком государственном университете

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Толовиков Михаил Игоревич

Официальные оппоненты: **Кузьмин Олег Викторович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»,
заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики
Чуднов Александр Михайлович,
доктор технических наук, профессор,
ФГКВОУ ВО «Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного»,
профессор кафедры автоматизированных систем специального назначения

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»

Защита состоится «___» _______ 2017 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан «___»_________2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физико-математических наук,
профессор Нежинский В.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Произведением Адамара формальных степенных рядов $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$ и $H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ называется степенной ряд $G(x)*H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k x^k$.

Хорошо известно, что произведение Адамара разложений в ряд рациональных функций является рациональной функцией. В то же время, явных формул для вычисления произведения Адамара степенных рядов рациональных функций в общем случае до недавнего времени известно не было. Техника вычисления произведения Адамара в задачах дискретной математики недостаточно развита и не систематизирована.

Произведение Адамара степенных рядов находит применение в ряде задач перечислительной комбинаторики и дискретной теории вероятностей. В некоторых из них применение произведения Адамара позволяет найти решение в явном виде. Конкретные задачи, с одной стороны, служат источником примеров, в которых требуется вычислять произведение Адамара степенных рядов, а с другой – их решение позволяет находить новые методы вычисления произведения Адамара рациональных функций в более или менее общих ситуациях.

Цель работы: исследовать возможности применения произведения Адамара степенных рядов для некоторого класса комбинаторных и вероятностных задач.

Задачи диссертационной работы:

– проанализировать существующие методы вычисления произведения Адамара степенных рядов рациональных функций;

– проанализировать существующие подходы к решению комбинаторных и вероятностных задач с применением произведения Адамара;

– получить новый метод вычисления произведения Адамара степенных рядов рациональных функций;

– используя новый метод вычисления произведения Адамара степенных рядов рациональных функций, решить ряд комбинаторных задач;

– решить некоторые вероятностные задачи с применением произведения Адамара.

Объектом исследования является класс комбинаторных и вероятностных задач.

Предметом исследования являются комбинаторные и вероятностные задачи, связанные с применением произведения Адамара степенных рядов, а также методы вычисления произведения Адамара степенных рядов рациональных функций.

Методологическую и теоретическую основу исследования составляют научные труды отечественных и зарубежных авторов в области комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей.

Методы исследования. При выполнении исследования использовались следующие методы: метод производящих функций, методы линейной алгебры, теории вероятностей, метод трансфер-матрицы, а также алгебраический метод вычисления произведения Адамара.

Научная новизна результатов исследования:

1) Автором получен новый комбинаторно-алгебраический метод вычисления произведения Адамара рациональных функций. Известный ранее алгебраический метод[1] [19] вычисления произведения Адамара рациональных функций требует вычисления опреде-

---

[1] *Толовиков М.И.* Случайные блуждания и произведение Адамара степенных рядов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, вып. 3. С. 505-506.

лителей порядка $m + n$. С помощью методов комбинаторного анализа и линейной алгебры порядок определителей автором снижен до величины $\min(m, n)$, что расширяет возможности применения произведения Адамара для получения решения конкретных задач в явном виде.

2) С помощью полученного автором нового метода вычисления произведения Адамара найдено общее решение задачи перечисления замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками размеров 1×1, $1\times m$ и $1\times n$, а для $n = 3$ формулы получены автором в явном виде. Решение этой задачи в частных случаях (при $n = 2$) с помощью комбинаторных методов ранее опубликовали в своих работах Л. Шапиро[1] и Й.Х. Ким[2].

3) Полученный автором новый метод вычисления произведения Адамара рациональных функций позволяет в задаче перечисления замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками снять ограничения на длину плитки и решить известную ранее задачу в новой постановке (получено общее решение задачи перечисления замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками произвольной длины).

4) С помощью полученного автором нового метода вычисления произведения Адамара рациональных функций (теоремы 1, 2 и 3) решена задача перечисления упорядоченных разбиений компонент двумерного вектора на слагаемые (первая компонента разбивается на слагаемые 1 и n, а вторая – на слагаемые 1 и m, где m, n – произвольные целые числа, $m \geq 2$, $n \geq 2$). Ранее эта задача была решена только в частных случаях при $n = 2$[3].

5) С помощью доказанных автором теорем 2 и 3 решена задача перечисления упорядоченных разбиений компонент двумерного вектора на произвольные слагаемые. Полученный автором новый метод вычисления произведения Адамара рациональных функций позволяет в данной задаче снять ограничения на величину слагаемого и решать известную ранее задачу в новой постановке.

6) Комбинаторным методом автором получены явные формулы для вычисления производящей функции весов замощений прямоугольника плитками по числу типов взаимного расположения плиток с максимальными длинами в верхнем и нижнем ряду $m = 2$, $n = 2$ соответственно, а также при $m = 2$, $n \geq 2$. Объект исследования в данном случае является новым.

7) Получено общее решение задачи вычисления производящей функции весов замощений прямоугольника плитками по числу типов взаимного расположения плиток, а также вычисления производящей функции весов разбиений. Решение получено с применением метода трансфер-матрицы, что по сравнению с комбинаторным методом позволяет снять ограничения на длину плитки, а также на величину слагаемого в разбиении.

8) С применением произведения Адамара автором явно вычислены производящие функции распределений некоторых статистик от серий рекуррентных событий, а также производящие функции распределений некоторых статистик от осциллирующего случайного блуждания. Ранее произведение Адамара в задачах исследования распределений статистик от серий указанных выше случайных событий не применялось. Применение произведения Адамара позволяет явно вычислить производящие функции распределений

---

[1] *Shapiro L.W.* A combinatorial proof of a Chebyshev polynomial identity // Discrete Math. 1981. Vol. 34. P. 203-206.

[2] *Kim J.H.* Hadamard products, lattice paths, and skew tableaux. Doctor of Philosophy thesis, Brandeis University Department of Mathematics. ProQuest, UMI Dissertation Publishing, 2012. 69 p.

[3] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 440 с.

некоторых характеристик случайных последовательностей в тех случаях, в которых их явное вычисление с помощью комбинаторных методов затруднительно.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Результаты ее первой главы представляют методический интерес и могут быть использованы в преподавании, в частности, для чтения специальных курсов. Все результаты представляют интерес для специалистов по комбинаторному анализу и теории вероятностей и могут быть использованы в этих областях для решения конкретных задач. Некоторые результаты исследования (теоремы 10 и 11) могут быть использованы при разработке алгоритмов распределения ресурсов в вычислительных сетях.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования докладывались на 24 научных конференциях, симпозиумах и семинарах:

– на семинаре отдела дискретной математики Математического института им. В.А. Стеклова РАН (Москва, 8 апреля 2013 г.);

– на семинаре кафедры математической кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (28 ноября 2014 г.);

– на XX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013» (Москва, МГУ, 9 – 12 апреля 2013 г.);

– на XLVII Международной конференции «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, СПбГУ, 4 – 7 апреля 2016 г.);

– на IX Международной Петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике» (Петрозаводск, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, 30 мая – 3 июня 2016 г.);

– на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, КФУ, 26 июня – 2 июля 2016 г.);

– на Международной научно-практической конференции «Математика в современном мире», посвященной 150-летию Д.А. Граве (Вологда, 2013 г.);

– на XII, XIII и XIV Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике (2011 – 2013 гг.)

– на 6-й и 7-й Международных научно-технических конференциях «Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ, СУБД» (Вологда, ВоГТУ, 2011 г., 2013 г.);

– на четырех Всероссийских научно-практических конференциях «Череповецкие научные чтения» (Череповец, ЧГУ, 2010 – 2013 гг.);

– на семи военно-научных конференциях (Череповец, филиал Воен. акад. МО РФ, ЧВВИУРЭ, 2010 – 2015 гг.).

Публикации. Результаты исследования опубликованы в 26 работах ([1] – [26]), из которых [9], [17], [19] и [23] – в журналах, рекомендованных ВАК РФ. В совместной работе [19] соискателю принадлежат разделы 4 и 7, а также свойство 3 теоремы 7. Кроме того, в совместной работе [1] соискателю принадлежат примеры вычисления производящих функций распределений статистик в последовательностях 1-зависимых индикаторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, а также списка литературы, содержащего 102 наименования. Работа проиллюстрирована 38 рисунками. Общий объем работы – 138 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основная часть работы разделена на три главы.

В первой главе выполнен обзор и анализ существующих методов вычисления произведения Адамара степенных рядов рациональных функций, а также существующих подходов к решению комбинаторных и вероятностных задач с применением произведения Адамара.

Во второй главе автором сформулированы и доказаны теоремы, позволяющие получить с применением произведения Адамара степенных рядов рациональных функций общее решение задач перечисления замощений прямоугольника плитками, вычисления производящей функции весов замощений прямоугольника плитками по числу типов взаимного расположения плиток, перечисления упорядоченных разбиений компонент двумерного вектора на произвольные слагаемые. Эти теоремы также дают новый метод вычисления произведения Адамара степенных рядов рациональных функций.

В главе 1 упомянуты все существовавшие до недавнего времени решения задачи перечисления замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками размера 1×1 с весом a и плитками размера $1\times m$ с весом b в верхнем ряду, а также плитками размера 1×1 с весом c и плитками размера $1\times n$ с весом d в нижнем ряду, сводящиеся к вычислению произведения Адамара $(1-ax-bx^m)^{-1} * (1-cx-dx^n)^{-1}$. Это произведение Адамара вычислил комбинаторным методом Й.Х. Ким при $n = 2$, $b = 1$, $d = 1$. При $n > 2$ комбинаторным методом решить данную задачу весьма затруднительно.

В **параграфе 2.1** приводится решение указанной выше задачи при произвольных m и n с помощью комбинаторно-алгебраического метода вычисления произведения Адамара, предложенного автором. Применение известного ранее алгебраического метода требует вычисления определителей порядка $n + m$. Порядок определителей удалось снизить на величину m. Полученный результат выражает следующая теорема, сформулированная и доказанная автором.

Теорема 1. Для любых целых m, n, k ($m \ge 2$, $n \ge 2$, $k < m$) справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{1-ax-bx^n} * \frac{x^k}{1-cx-dx^m} = \frac{\det \mathbf{R}_n}{\det \mathbf{S}_n},$$

где $\mathbf{S}_n$ – матрица порядка n вида

$$\begin{pmatrix} 1-acx+B_1 & A_{12} & \cdots & A_{1,n-2} & A_{1,n-1} & -bcx^n+A_{1,n} \\ -c+B_2 & 1+A_{22} & \cdots & A_{2,n-2} & A_{2,n-1} & A_{2,n} \\ B_3 & -c+A_{32} & \cdots & A_{3,n-2} & A_{3,n-1} & A_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n-1} & A_{n-1,2} & \cdots & -c+A_{n-1,n-2} & 1+A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ B_n & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n-2} & -c+A_{n,n-1} & 1+A_{n,n} \end{pmatrix},$$

где $B_i = -df_{m-i+1}x^{m-i+1}$, $A_{ij} = -bdf_{m-i-n+j}x^{m+j-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 2, 3, \ldots, n$, $f_m = f_m(a,b) = \sum_{i=0}^{[m/n]} C_{m-(n-1)i}^{i} a^{m-ni} b^i$ при $m \ge 0$, $f_m = 0$ при $m < 0$, матрица $\mathbf{R}_n$ получается из $\mathbf{S}_n$ заменой первой строки строкой

$$\begin{pmatrix} f_k x^k & bf_{k-n+1}x^{k+1} & \cdots & bf_{k-3}x^{k+n-3} & bf_{k-2}x^{k+n-2} & bf_{k-1}x^{k+n-1} \end{pmatrix}.$$

Выпишем полученный результат в явном виде при $n = 3$. Получим: для любого целого $m \ge 2$ и любого целого $k < m$ справедлива формула

$$\frac{1}{1-ax-bx^3} * \frac{x^k}{1-cx-dx^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

где

$$P(x) = b^2d^2(f_{m-1}f_{m-3}f_{k-2} - f_{m-1}f_{m-4}f_{k-1} - f_{m-2}^2 f_{k-2} + f_{m-2}f_{m-3}f_{k-1} +$$

$$+f_{m-2}f_{m-4}f_k - f_{m-3}^2 f_k)x^{2m+k} - bcd(f_{m-1}f_{k-1} - f_{m-2}f_k - bf_{m-3}f_{k-2} +$$
$$+bf_{m-4}f_{k-1})x^{m+k+1} - bd\left(f_{m-1}f_{k-2} + f_{m-2}f_{k-1} - 2f_{m-3}f_k\right)x^{m+k} -$$
$$-bc^2 f_{k-1}x^{k+2} - bcf_{k-2}x^{k+1} - f_k x^k,$$
$$Q(x) = b^m d^3 x^{3m} - bcd^2(f_m f_{m-2} - f_{m-1}^2 - 2bf_{m-1}f_{m-4} + 2bf_{m-2}f_{m-3} +$$
$$+abf_{m-2}f_{m-4} - abf_{m-3}^2)x^{2m+1} - bd^2(2f_m f_{m-3} - 2f_{m-1}f_{m-2} - bf_{m-2}f_{m-4} +$$
$$+bf_{m-3}^2)x^{2m} + bc^2 d\left(2f_{m-1} - af_{m-2} + bf_{m-4}\right)x^{m+2} +$$
$$+bcd\left(3f_{m-2} - 2af_{m-3}\right)x^{m+1} + d\left(f_m + 2bf_{m-3}\right)x^m + bc^3x^3 + acx - 1.$$

В **параграфе 2.2** приводится решение задачи перечисления замощений прямоугольника плитками произвольной длины. Рассмотрим производящую функцию $\sum_{r=0}^{\infty} f_r\left(d_1, d_2, ..., d_n\right)x^r = \left(1 - d_1x - d_2x^2 - ... - d_nx^n\right)^{-1}$ последовательности, задаваемой рекуррентным соотношением

$$f_r(d_1, d_2, \ldots, d_n) = d_1 f_{r-1} + d_2 f_{r-2} + \ldots + d_n f_{r-n}$$

с начальными условиями $f_0 = 1$ и $f_r = 0$ при $r < 0$. При $d_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и $n = 2$ данная последовательность представляет собой последовательность чисел Фибоначчи. Элемент $f_r(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ может быть интерпретирован как сумма весов замощений прямоугольника размера $1\times r$ плитками размеров 1×1, $1\times2, \ldots, 1\times n$ и весами $d_1, d_2, \ldots, d_n$, соответственно. Под весом замощения понимается произведение весов образующих его плиток.

Коэффициент $f_r(d_1, d_2, \ldots, d_n)\, f_r(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ при x^r в произведении

$$(1 - d_1x - d_2x^2 - \ldots - d_nx^n)^{-1} * (1 - b_1x - b_2x^2 - \ldots - b_mx^m)^{-1} =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} f_r\left(d_1, d_2, ..., d_n\right) f_r\left(b_1, b_2, ..., b_m\right)x^r$$

может быть интерпретирован как сумма весов замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками размеров 1×1, $1\times2, \ldots, 1\times n$ в верхнем ряду, а также плитками размеров 1×1, $1\times2, \ldots, 1\times m$ – в нижнем ряду. Плитка верхнего ряда размера $1\times i$ имеет вес d_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Плитка нижнего ряда размера $1\times j$ имеет вес b_j ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Общее решение задачи перечисления замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками произвольной длины выражено теоремами 2 и 3, сформулированными и доказанными автором.

Теорема 2. Для любых целых m, n, k ($m \geq 2$, $n \geq 2$, $k < m$) справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{1 - d_1x - d_2x^2 - ... - d_nx^n} * \frac{x^k}{1 - b_1x - b_2x^2 - ... - b_mx^m} = \frac{(-1)^k \det \mathbf{R}_{m,m-k}}{\det \mathbf{R}},$$

где $\mathbf{R}$ – матрица порядка m вида

$$\begin{pmatrix} 1 + A_{11} & -d_1x + A_{12} & -d_2x^2 + A_{13} & \cdots & -d_{m-2}x^{m-2} + A_{1,m-1} & B_1 \\ A_{21} & 1 + A_{22} & -d_1x + A_{23} & \cdots & -d_{m-3}x^{m-3} + A_{2,m-1} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & 1 + A_{33} & \cdots & -d_{m-4}x^{m-4} + A_{3,m-1} & B_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & A_{m-1,3} & \cdots & 1 + A_{m-1,m-1} & B_{m-1} \\ A_{m,1} & A_{m,2} & A_{m,3} & \cdots & A_{m,m-1} & B_m \end{pmatrix},$$

$d_0 = -1$, $\quad A_{ij} = -\sum_{s=m-i+1}^{n} d_s x^s \sum_{t=m-j+1}^{m} b_t f_{s-t+i-j}$, $\quad B_i = -\sum_{s=m-i}^{n} f_{s-m+i} d_s x^s$, $\quad i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $f_s = b_1 f_{s-1} + b_2 f_{s-2} + \ldots + b_m f_{s-m}$ при $s > 0$, $f_s = 1$ при $s = 0$, $f_s = 0$ при $s < 0$, матрица $\mathbf{R}_{m,m-k}$ получается из $\mathbf{R}$ вычеркиванием m-й строки и $(m-k)$-го столбца.

Теорема 3. Для любых целых m, n, k ($m \geq 2$, $n \geq 2$, $k < m$) справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{1 - d_1 x - d_2 x^2 - \ldots - d_n x^n} * \frac{x^k}{1 - b_1 x - b_2 x^2 - \ldots - b_m x^m} = \frac{\det \mathbf{G}}{\det \mathbf{H}},$$

где $\mathbf{H}$ – матрица порядка n вида

$$\begin{pmatrix} D_1 & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1,n-1} & L_{1,n} \\ D_2 & 1 + L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{2,n-1} & L_{2,n} \\ D_3 & -b_1 + L_{32} & 1 + L_{33} & \cdots & L_{3,n-1} & L_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n-1} & -b_{n-3} + L_{n-1,2} & -b_{n-4} + L_{n-1,3} & \cdots & 1 + L_{n-1,n-1} & L_{n-1,n} \\ D_n & -b_{n-2} + L_{n,2} & -b_{n-3} + L_{n,3} & \cdots & -b_1 + L_{n,n-1} & 1 + L_{n,n} \end{pmatrix},$$

$b_0 = -1$, $L_{ij} = -\sum_{s=i}^{m} b_s x^{s+j-i} \sum_{t=j}^{s+j-i} d_t f_{s-t+j-i}$, $D_i = -\sum_{s=0}^{m-i+1} b_{s+i-1} f_s x^s$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 2, 3, \ldots, n$, $f_s = d_1 f_{s-1} + d_2 f_{s-2} + \ldots + d_n f_{s-n}$ при $s > 0$, $f_s = 1$ при $s = 0$, $f_s = 0$ при $s < 0$, матрица $\mathbf{G}$ получается из $\mathbf{H}$ заменой первой строки строкой

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \end{pmatrix},$$

$C_i = x^{k+i-1} \sum_{s=i}^{n} d_s f_{k-s+i-1}$.

Теорема 2 используется при $n \geq m$, а теорема 3 – при $n \leq m$. Эти теоремы применимы для правильных рациональных дробей (при $k < m$). В общем случае можно выделить целую часть дроби, применить свойство линейности произведения Адамара, а также формулу $x^k * \sum_{s=0}^{\infty} g_s x^s = g_k x^k$.

В **параграфах 2.3** и **2.4** указывается связь задач перечисления упорядоченных разбиений компонент вектора на фиксированные и произвольные слагаемые с задачами перечисления замощений прямоугольника плитками, рассмотренными в параграфах 2.1 и 2.2.

В **параграфе 2.5** решена задача перечисления замощений прямоугольника плитками по числу типов взаимного расположения плиток. Задача замощения прямоугольника плитками рассматривается в динамике. Укладка верхнего ряда прямоугольника размера $2\times r$ выполняется плитками размеров 1×1, $1\times2, \ldots, 1\times n$ и весами $d_1, d_2, \ldots, d_n$, соответственно, а нижнего ряда – плитками размеров 1×1, $1\times2, \ldots, 1\times m$ и весами $b_1, b_2, \ldots, b_m$, соответственно. Укладка верхнего ряда выполняется последовательно слева направо до тех пор, пока верхний ряд не станет выступать над нижним. Затем выполняется укладка нижнего ряда последовательно слева направо до тех пор, пока нижний ряд не станет выступать относительно верхнего. Таким образом, путем чередования укладки верхнего и нижнего ряда, заполняется весь прямоугольник. В случае, когда не выступает ни верхний ряд, ни нижний, полагаем, что выступает нижний ряд, и переходим к укладке верхнего ряда. В зависимости от того, выступает верхний ряд или нижний, любую плитку можно отнести к одному из четырех типов: нн, нв, вн, вв. Плитку верхнего ряда назовем плиткой типа нв, если при ее укладке выступающим становится верхний ряд. Плитку верхнего ряда назовем плиткой типа нн, если при ее укладке выступающим остается нижний ряд. Аналогично определяются типы вн и вв для плиток нижнего ряда.

Вычислим производящую функцию

$$F\left(x,u_{\text{нн}},u_{\text{нв}},u_{\text{вн}},u_{\text{вв}}\right)=\sum_{\substack{k=0\\ i_1+i_2+i_3+i_4=k}}^{\infty} w_{k,i_1,i_2,i_3,i_4}u_{\text{нн}}^{i_1}u_{\text{нв}}^{i_2}u_{\text{вн}}^{i_3}u_{\text{вв}}^{i_4}x^k,$$

где w_{k,i_1,i_2,i_3,i_4} – сумма весов замощений прямоугольников всевозможных размеров k плитками, из которых i_1 плиток типа нн, i_2 плиток типа нв, i_3 плиток типа вн, i_4 плиток типа вв.

Рассмотрим сначала частные случаи решения указанной выше задачи, позволяющие получить формулы в явном виде.

Рассмотрим замощения прямоугольника размера $2\times r$ плитками размера 1×1 с весом c и плитками размера $1\times n$ с весом d в верхнем ряду, а также плитками размера 1×1 с весом a и плитками размера $1\times m$ с весом b в нижнем ряду. Искомую производящую функцию обозначим для данного случая $F_{n,m}\left(x,u_{\text{нн}},u_{\text{нв}},u_{\text{вн}},u_{\text{вв}}\right)$ и применим для ее вычисления комбинаторный метод, описанный в указанных выше работах Л. Шапиро и Й.Х. Кима. Полученные результаты выражены теоремами 4 и 5, сформулированными и доказанными автором.

Теорема 4. В принятых выше обозначениях справедливо равенство:

$$F_{2,2}\left(x,u_{\text{нн}},u_{\text{нв}},u_{\text{вн}},u_{\text{вв}}\right)=$$

$$=\frac{1-bdu_{\text{нв}}u_{\text{вн}}x^2}{1-\left(ac+2bd\right)u_{\text{нв}}u_{\text{вн}}x^2-\left(a^2du_{\text{вв}}+bc^2u_{\text{нн}}\right)u_{\text{нв}}u_{\text{вн}}x^3-\left(acu_{\text{нн}}u_{\text{вв}}-bdu_{\text{нв}}u_{\text{вн}}\right)bdu_{\text{нв}}u_{\text{вн}}x^4}.$$

Теорема 5. Для любого целого n ($n\geq 2$) справедливо равенство:

$$F_{n,2}\left(x,u_{\text{нн}},u_{\text{нв}},u_{\text{вн}},u_{\text{вв}}\right)=\left(1-bdf_{n-2}u_{\text{нв}}u_{\text{вн}}x^2\right)\Big[1-\left(ac+adf_{n-1}+2bdf_{n-2}\right)u_{\text{нв}}u_{\text{вн}}x^2-$$

$$-bc\left(df_{n-1}+c\right)u_{\text{нн}}u_{\text{нв}}u_{\text{вн}}x^3+b^2d\left(d\left(f_{n-2}^2-f_{n-1}f_{n-3}\right)-cf_{n-3}\right)u_{\text{нв}}^2u_{\text{вн}}^2x^4\Big]^{-1},$$

где $f_i=f_i\left(a,b,u_{\text{вв}},x\right)=\left(af_{i-1}+bf_{i-2}\right)u_{\text{вв}}x$ при $i>0$, $f_0=1$, $f_i=0$ при $i<0$.

Приведем также решение данной задачи в общей постановке.

Определение 1. Пусть $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ – последовательности неотрицательных целых чисел. Последовательность целых чисел $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ называют осциллирующей, если она удовлетворяет условиям: $z_0 = 0$; если $k > 0$, то $z_k = z_{k-1} - y_k$ при $z_{k-1} > 0$ и $z_k = z_{k-1} + x_k$ при $z_{k-1}\leq 0$.

Будем полагать, что элементы последовательностей $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ принадлежат множествам $\{0, 1,\ldots, n\}$, $\{0, 1,\ldots, m\}$ соответственно. Тогда элементы осциллирующей последовательности $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ принадлежат множеству $V = \{-m + 1, -m + 2,\ldots, n-1, n\}$. Дуге (i, j) орграфа $G = (V, D)$ с множеством дуг $D = \{(i, j)\in V^2 \mid i > 0, j\leq i$ или $i\leq 0, j\geq i\}$ припишем вес: $w_{ij} = d_{j-i}u_{\text{нн}}$ при $i\leq 0, j\leq 0$, $w_{ij} = d_{j-i}u_{\text{нв}}$ при $i\leq 0, j > 0$, $w_{ij} = b_{i-j}u_{\text{вн}}$ при $i > 0$, $j\leq 0$, $w_{ij} = b_{i-j}u_{\text{вв}}$ при $i > 0, j > 0$.

Последовательность $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ элементов множества V является последовательностью вершин некоторого бесконечного пути в орграфе G тогда и только тогда, когда она является осциллирующей. Если в качестве последовательностей $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ рассматривать соответственно последовательности длин плиток верхнего и нижнего ряда замощения прямоугольника размера $2\times r$, то осциллирующая последовательность $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ строится по описанному выше алгоритму укладки плиток. Здесь $z_0 = 0$ соответствует начальному моменту укладки, когда прямоугольник пуст. Заметим, что осциллирующая последовательность $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ образует цепь Маркова.

Для отыскания весов путей в орграфе G известен метод трансфер-матрицы. Непосредственное его применение в данной задаче требует вычисления определителя порядка $m + n$. Порядок определителя удалось снизить на величину n. Полученный результат выражает следующая теорема, сформулированная и доказанная автором.

Теорема 6. Для любых целых m, n ($m \geq 2$, $n \geq 2$) справедлива следующая формула:

$$F\left(x, u_{\text{нн}}, u_{\text{нв}}, u_{\text{вн}}, u_{\text{вв}}\right) = \frac{\det \mathbf{R}_{m,m}}{\det \mathbf{R}},$$

где $\mathbf{R}$ – матрица порядка m вида

$$\begin{pmatrix} 1+A_{11} & -d_1 u_{\text{нн}} x + A_{12} & -d_2 u_{\text{нн}} x + A_{13} & \cdots & -d_{m-2} u_{\text{нн}} x + A_{1,m-1} & -d_{m-1} u_{\text{нн}} x + A_{1,m} \\ A_{21} & 1+A_{22} & -d_1 u_{\text{нн}} x + A_{23} & \cdots & -d_{m-3} u_{\text{нн}} x + A_{2,m-1} & -d_{m-2} u_{\text{нн}} x + A_{2,m} \\ A_{31} & A_{32} & 1+A_{33} & \cdots & -d_{m-4} u_{\text{нн}} x + A_{3,m-1} & -d_{m-3} u_{\text{нн}} x + A_{3,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & A_{m-1,3} & \cdots & 1+A_{m-1,m-1} & -d_1 u_{\text{нн}} x + A_{m-1,m} \\ A_{m,1} & A_{m,2} & A_{m,3} & \cdots & A_{m,m-1} & 1+A_{m,m} \end{pmatrix},$$

$A_{ij} = -u_{\text{вн}} u_{\text{нв}} x^2 \sum_{s=m-i+1}^{n} d_s \sum_{t=m-j+1}^{m} b_t f_{s-t+i-j}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., m$, $f_s = 0$ при $s < 0$, $f_s = 1$ при $s = 0$, $f_s = (b_1 f_{s-1} + b_2 f_{s-2} + \ldots + b_m f_{s-m})\, u_{\text{вв}}\, x$ при $s > 0$, матрица $\mathbf{R}_{m,m}$ получается из $\mathbf{R}$ вычеркиванием m-й строки и m-го столбца.

В **параграфе 2.6** по теореме 6 в общем виде решена задача вычисления производящей функции суммы весов разбиений с учетом типов взаимного расположения элементов.

В третьей главе рассмотрены приложения произведения Адамара к вычислению производящих функций распределений некоторых статистик от серий рекуррентных событий, а также некоторых статистик от осциллирующего случайного блуждания. В этой главе показана возможность явного вычисления распределений некоторых характеристик случайных последовательностей при условии, что производящие функции исходных случайных величин рациональны.

В **параграфе 3.1** с применением произведения Адамара вычислены производящие функции распределений некоторых статистик от серий рекуррентных событий. Здесь рассматривается последовательность повторяющихся испытаний с возможными исходами E_j ($j = 1, 2,\ldots$). Предполагается, что испытания могут продолжаться неограниченно, и вероятности $\mathbf{P}\left(E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_n}\right)$ определяются однозначно для всех конечных наборов. Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое свойство конечных последовательностей: для любого набора $\left(E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_n}\right)$ можно сказать, обладает он свойством $\mathcal{E}$ или нет.

Определение 2[1]. Свойство $\mathcal{E}$ определяет рекуррентное событие, если:

1) для того чтобы $\mathcal{E}$ происходило на n-м и $(n + m)$-м местах последовательности $\left(E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_{n+m}}\right)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{E}$ происходило на последнем месте каждой из двух подпоследовательностей $\left(E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_n}\right)$ и $\left(E_{j_{n+1}}, E_{j_{n+2}}, ..., E_{j_{n+m}}\right)$;

2) если $\mathcal{E}$ происходит на n-м месте, то

---

[1] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528 с.

$$\mathbf{P}\left(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_{n+m}}\right) = \mathbf{P}\left(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right)\mathbf{P}\left(E_{j_{n+1}}, E_{j_{n+2}}, \ldots, E_{j_{n+m}}\right).$$

Очевидно, что с каждым рекуррентным событием $\mathcal{E}$ связана последовательность чисел, определенная для $n = 1, 2, \ldots$ следующим образом:

$f_n = \mathbf{P}$ ($\mathcal{E}$ впервые происходит при n-м испытании).

Введем производящую функцию $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$. Рассмотрим формальные производящие функции от бесконечного множества не коммутирующих между собой переменных $y_0, y_1, y_2, \ldots$:

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k+k=n} P_{i_1,i_2,\ldots,i_k} y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_k}, \quad \mathbf{F}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_{n-1},$$

где $P_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ – вероятность того, что рекуррентное событие $\mathcal{E}$ произошло в последовательности из n испытаний при испытаниях с номерами $i_1 + 1$, $i_1 + i_2 + 2, \ldots$, $i_1 + i_2 + \ldots + i_k + k$, а при испытаниях с остальными номерами – не произошло.

Теорема 7. Справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots)\,\mathbf{F}(y_0, y_1, \ldots) + \mathbf{F}(y_0, y_1, \ldots).$$

Теорема 8. Пусть $\mathrm{z}_0(x, y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1} x^n$. Тогда

$$\mathbf{F}(y_0, y_1, \ldots) = \left(\mathrm{z}_0(t, y_0, y_1, \ldots) * F(t)\right)\Big|_{t=1}.$$

Теоремы 7 и 8, сформулированные и доказанные автором, позволяют явно вычислить производящие функции распределений некоторых статистик от серий рекуррентных событий. Их применение не требует вычисления вероятностей $P_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, что значительно облегчает решение задач данного класса.

Пример 1. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность испытаний Бернулли. Рекуррентное событие $\mathcal{E}$ означает «успех» в последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $F(x) = px(1 - qx)^{-1}$. Найдем производящую функцию $\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots)$ последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ при подстановке $y_i = x^{i+1} y_0$, если i – четное, и $y_i = x^{i+1} y_1$, если i – нечетное. При этом

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s_0+s_1=k} P_{n,k}^{s_0,s_1} x^n y_0^{s_0} y_1^{s_1},$$

где $P_{n,k}^{s_0,s_1}$ – вероятность того, что в последовательности из n испытаний рекуррентное событие $\mathcal{E}$ произошло k раз, причем событие $\mathcal{E}$ произошло на последнем месте s_0 подпоследовательностей нечетной длины и s_1 подпоследовательностей четной длины. Применяя теоремы 8 и 7, находим

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \frac{px(y_0 + y_1 xq)}{1 - x^2 q^2 - px(y_0 + y_1 xq)}.$$

Пример 2. При подстановке $y_0 = x$, $y_i = x^{i+1} y$ ($i > 0$) для рассмотренной выше последовательности имеем

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{d+d_0=k} P_{n,k}^{d_0,d} x^n y^d,$$

где $P_{n,k}^{d_0,d}$ – вероятность того, что в последовательности из n испытаний рекуррентное событие $\mathcal{E}$ произошло k раз, причем событие $\mathcal{E}$ произошло на последнем месте d_0 подпоследовательностей единичной длины и d подпоследовательностей, длина которых превышает единицу. Из теорем 8 и 7 находим

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \frac{px\left(1 - qx(y-1)\right)}{1 - x - pqx^2(y-1)}.$$

Пример 3. Выполняя подстановку $y_i = x^{i+1}y^i$ ($i = 0, 1, \ldots$) для рассмотренной выше последовательности получаем

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P_{n,k} x^n y^{n-k},$$

где $P_{n,k}$ – вероятность того, что рекуррентное событие $\mathcal{E}$ произошло в последовательности из n испытаний k раз. По теоремам 8 и 7 находим

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = px(1 - x(qy + p))^{-1}.$$

Пример 4. С помощью теорем 8 и 7 найдем производящую функцию $\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots)$ рассмотренной выше последовательности при подстановке $y_i = x^{i+1}y_i$, если $i = 0, 1, \ldots, r$, и $y_i = x^{i+1}y$, если $i > r$. При этом

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{n-k_0-k_1-\ldots-k_r-k=m} P_{n,m,k_0,k_1,\ldots,k_r,k}\, x^n y_0^{k_0} y_1^{k_1} \ldots y_r^{k_r} y^k,$$

где $P_{n,m,k_0,k_1,\ldots,k_r,k}$ – вероятность того, что в последовательности из n испытаний рекуррентное событие $\mathcal{E}$ произошло $n - m$ раз, причем событие $\mathcal{E}$ произошло на последнем месте k_0 подпоследовательностей длины 1, k_1 подпоследовательностей длины 2, …, k_r подпоследовательностей длины $r + 1$, k подпоследовательностей длины, превышающей $r + 1$. Имеем

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \frac{pxy_0 + p\sum_{i=1}^{r} q^i x^{i+1}(y_i - y_{i-1}) + pq^{r+1}x^{r+2}(y - y_r)}{1 - qx - pxy_0 - p\sum_{i=1}^{r} q^i x^{i+1}(y_i - y_{i-1}) - pq^{r+1}x^{r+2}(y - y_r)}.$$

Пример 5. Выполняя подстановку $y_i = x^{i+1}y$ при $i \le r$ и $y_i = 0$ при $i > r$ для последовательности из примера 1 находим

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P_{n,k}^{r}\, x^n y^k,$$

где $P_{n,k}^{r}$ – вероятность того, что в последовательности из n испытаний рекуррентное событие $\mathcal{E}$ произошло k раз, причем событие $\mathcal{E}$ произошло на последнем месте подпоследовательностей, длина которых не превышает $r + 1$. Применяя теоремы 8 и 7, получаем

$$\mathbf{U}(y_0, y_1, \ldots) = \frac{pxy\left(q^r x^r + q^{r-1}x^{r-1} + \ldots + qx + 1\right)}{1 - pxy\left(q^r x^r + q^{r-1}x^{r-1} + \ldots + qx + 1\right)}.$$

В **параграфе 3.2** с применением произведения Адамара вычислены производящие функции распределений некоторых статистик от осциллирующего случайного блуждания.

Определение 3. Пусть Z – случайная величина, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательности неотрицательных случайных величин. Последовательность $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$, определенная формулами: $Z_0 = Z$,

$$Z_n = Z_{n-1} - sg(Z_{n-1})Y_{sg(Z_0)+\ldots+sg(Z_{n-1})} + \overline{sg}(Z_{n-1})X_{\overline{sg}(Z_0)+\ldots+\overline{sg}(Z_{n-1})},\ n > 0,$$

где $sg(Z) = 1$ при $Z > 0$, $sg(Z) = 0$ при $Z \le 0$, $\overline{sg}(Z) = 1 - sg(Z)$, называется осциллирующим случайным блужданием, построенным по тройке $\left(Z, (X_n)_{n=1}^{\infty}, (Y_n)_{n=1}^{\infty}\right)$.

Так как распределение времени $\tau_n = sg\,(Z_0) + sg\,(Z_1) + \ldots + sg\,(Z_{n-1})$, проведённого осциллирующим случайным блужданием на положительной полуоси за первые n шагов, связано с распределением случайной величины $S_{n,k} = Z_0 + X_1 + \ldots + X_{n-k} - Y_1 - \ldots - Y_k$ равенством[1] $\mathbf{P}\,(\tau_n \le k) = \mathbf{P}\,(S_{n,k} \le 0)$ для всех $n \ge 0,\ 0 \le k \le n$, то для вычисления распределения τ_n полезна следующая теорема, доказанная автором.

Теорема 9. Пусть в принятых выше обозначениях $\left(X_n\right)_{n=1}^{\infty}$ и $\left(Y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ – не зависящие друг от друга последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, $f\left(x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(X_1=m\right)x^m$, $g\left(x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(Y_1=m\right)x^m$, $\mathbf{P}\left(Z_0=0\right)=1$, $F\left(\lambda,\mu\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(S_{i+j,j}\le 0\right)\lambda^i\mu^j$. Тогда

$$F\left(\lambda,\mu\right)=\left(\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-\lambda f\left(x\right)}\right)*\left(\frac{1}{1-\mu g\left(x\right)}\right)\Bigg|_{x=1}.$$

Пример 6. Пусть случайные величины X_1 и Y_1 имеют равномерное распределение и соответствующие производящие функции

$$f\,(x) = m^{-1}\,(1 + x + \ldots + x^{m-1}),\ g\,(x) = n^{-1}\,(1 + x + \ldots + x^{n-1}),$$

где $n = 3$. Тогда по теореме 9 имеем

$$F\left(\lambda,\mu\right)=3m\left(\lambda\mu h_{m-2}+\left(m-\lambda\right)\left(3-\mu\right)\right)\left(S\left(\lambda,\mu\right)\right)^{-1},$$

где $h_m=\sum_{k=0}^{[m/2]}C_{m-k}^{k}\mu^{m-k}\left(3-\mu\right)^{k-m}$, $S\left(\lambda,\mu\right)=\left(3-\mu\right)\Big(\left(-1\right)^m\lambda^2\mu^m\left(3-\mu\right)^{1-m}+$

$$+\left(m-\lambda\right)^2\left(3-\mu\right)+\lambda\left(m-\lambda\right)\left(3-\mu\right)h_m+\lambda\mu\left(m-\lambda\right)h_{m-2}+$$
$$+2m\lambda\mu h_{m-1}-m\mu\left(m-\lambda\right)-m^2\mu\Big)-m\lambda\mu^2h_{m-2}.$$

В **параграфе 3.3** автором доказана теорема 10, позволяющая вычислить производящую функцию $G_k\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p_{k,n,m}x^nt^m$ вероятностей $p_{k,n,m}$ того, что в случайном процессе на каком-то шаге появится прямоугольник размера $k{\times}n$, состоящий из m плиток. Укладка бесконечной полосы ширины k плитками размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, имеющими соответственно вероятности выпадения для первого ряда – q_{11}, q_{12}, q_{13},…, для второго ряда – q_{21}, q_{22}, q_{23},…, соответственно, и т.д., для k-го ряда – q_{k1}, q_{k2}, q_{k3},…, соответственно, начинается с первого ряда и выполняется по следующему алгоритму. Каждая новая плитка укладывается в тот ряд, который в данный момент имеет наименьшую длину относительно начала отсчета. Началом отсчета считается момент времени, в который ни один из заполненных плитками рядов не являлся выступающим относительно других. Если несколько рядов плиток имеют одинаковую длину, и она является наименьшей, то укладка выполняется в ряд с наименьшим номером. Чередуя укладку рядов, заполняем полосу. Алгоритм укладки плиток в динамике образует алгоритм построения цепи Маркова. Пусть $\left(X_{1j}\right)_{j=1}^{\infty}$, $\left(X_{2j}\right)_{j=1}^{\infty}$,…,$\left(X_{kj}\right)_{j=1}^{\infty}$ – не зависящие друг от друга последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения,

$$g_i\left(x\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(X_{ij}=j\right)x^j=\sum_{j=0}^{\infty}q_{ij}\,x^j\quad\left(i=1,\,2,\,...,k\right),$$

причем q_{ij} – вероятность того, что плитка i-го ряда будет иметь длину j.

[1] *Толовиков М.И.* Однородные цепи Маркова с двумя состояниями и суммы независимых случайных индикаторов // Вестник ЧГУ. 2004. №2(7). С. 134-136.

Теорема 10. В принятых выше обозначениях справедливо равенство:

$$G_k(x,t)=\frac{1}{1-g_1(x)t}*\frac{1}{1-g_2(x)t}*\ldots*\frac{1}{1-g_k(x)t}.$$

Теорема 11. Пусть $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(Y_k)_{k=1}^{\infty}$ – не зависящие друг от друга последовательности независимых случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, имеющих равномерное распределение и соответствующие производящие функции

$$g_1(x) = m^{-1}(1 + x + \ldots + x^{m-1}),\; g_2(x) = n^{-1}(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

Тогда в принятых выше обозначениях справедливы равенства:

1) при $n = 3$

$$G_2(x,t) = R(x,t)\, S(x,t)^{-1},$$

где

$$R(x,t)=3m\Big((m-t)(3-t)^2-t(m-t)(3-t)x-mt(3-t)x^2+$$
$$+t^2(3-t)f_{m-2}x^m+t^2\big((3-t)f_{m-1}-tf_{m-2}\big)x^{m+1}\Big),$$
$$S(x,t)=(3-t)\Big((m-t)^2(3-t)^2-mt(m-t)(3-t)x-m^2t(3-t)x^2+$$
$$+t(m-t)(3-t)\big((3-t)f_m+tf_{m-2}\big)x^m+mt^2\big(2(3-t)f_{m-1}-tf_{m-2}\big)x^{m+1}-$$
$$-t^3(3-t)\big(f_{m-1}^2-f_mf_{m-2}\big)x^{2m}\Big),$$

$f_s = 0$ при $s < 0$, $f_s=\sum_{i=0}^{[s/2]}C_{s-i}^{i}t^{s-i}(3-t)^{i-s}$ при $s \ge 0$;

2) при $n = 4$

$$G_2(x,t) = 4m(4-t)^{m-4}R(x,t)\, S(x,t)^{-1},$$

где

$$R(x,t)=(m-t)^2(4-t)^3-t(m-t)^2(4-t)^2x-mt(m-t)(4-t)^2x^2-$$
$$-m^2t(4-t)^3x^3+t^2(m-t)(4-t)^2\big(f_{m-2}+2f_{m-3}\big)x^m+$$
$$+t^2(4-t)\Big(mf_{m-2}(4-t)+(m-t)(4-t)\big(f_{m-1}+f_{m-2}\big)-t(m-t)\big(f_{m-2}+2f_{m-3}\big)\Big)x^{m+1}+$$
$$+mt^2(4-t)\Big(f_{m-1}(4-t)+t\big(f_{m-4}-f_{m-2}\big)\Big)x^{m+2}+t^4(4-t)\big(f_{m-3}^2-f_{m-4}f_{m-2}\big)x^{2m}+$$
$$+t^4\Big(t\big(f_{m-4}f_{m-2}-f_{m-3}^2\big)+(4-t)\big(f_{m-3}f_{m-2}-f_{m-4}f_{m-1}\big)\Big)x^{2m+1},$$
$$S(x,t)=(m-t)^3(4-t)^m-mt(m-t)^2(4-t)^{m-1}x-m^2t(m-t)(4-t)^{m-1}x^2-$$
$$-m^3t(4-t)^{m-1}x^3+t(m-t)^2(4-t)^{m-1}\Big((4-t)f_m+t\big(f_{m-2}+2f_{m-3}\big)\Big)x^m+$$
$$+mt^2(m-t)(4-t)^{m-2}\Big((4-t)\big(2f_{m-1}+3f_{m-2}\big)-t\big(f_{m-2}+2f_{m-3}\big)\Big)x^{m+1}-$$
$$-m^2t^2(4-t)^{m-2}\Big(t\big(f_{m-2}-f_{m-4}\big)-2f_{m-1}(4-t)\Big)x^{m+2}+t^3(m-t)(4-t)^{m-2}\times$$
$$\times\Big((4-t)\big(f_{m-2}f_m-f_{m-1}^2+2\big(f_{m-3}f_m-f_{m-2}f_{m-1}\big)\big)+t\big(f_{m-3}^2-f_{m-4}f_{m-2}\big)\Big)x^{2m}+$$
$$+mt^3(4-t)^{m-3}\Big((4-t)^2\big(f_{m-2}f_m-f_{m-1}^2\big)+t\big(f_{m-4}f_{m-2}-f_{m-3}^2\big)\Big)x^{2m+1}-t^{m+3}x^{3m},$$

$f_s = 0$ при $s < 0$, $f_s = 1$ при $s = 0$, $f_s = (f_{s-1} + f_{s-2} + f_{s-3})\, t\,(4-t)^{-1}$ при $s > 0$.

Информация о вероятности $p_{k,n,m}$ может быть использована при разработке алгоритмов распределения ресурсов в вычислительных сетях[1]. Под плитками будем понимать задачи, поступающие в вычислительную сеть, под длиной плитки – время, необходимое для решения данной задачи, под рядом плиток – последовательность задач, направляемых управляющим узлом сети конкретному вычислительному узлу. Тогда вероятностей $p_{k,n,m}$ – вероятность того, что k вычислительных узлов за время n завершат выполнение m текущих задач. Теорема 11, сформулированная и доказанная автором, позволяет рассчитать вероятности $p_{2,n,m}$ для случая, когда распределение вероятностей того, что задача, направляемая конкретному вычислительному узлу, будет решена за фиксированное время, равномерно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрены вопросы приложения произведения Адамара степенных рядов рациональных функций к решению некоторых задач комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей.

В ходе работы над диссертацией получены следующие результаты:

1) Получен новый комбинаторно-алгебраический метод вычисления произведений Адамара рациональных функций:

$$\frac{1}{1-ax-bx^n}*\frac{x^k}{1-cx-dx^m},\ \frac{1}{1-d_1x-d_2x^2-\ldots-d_nx^n}*\frac{x^k}{1-b_1x-b_2x^2-\ldots-b_mx^m},$$

где $m, n, k \in \mathbb{Z}$ ($m \geq 2$, $n \geq 2$, $0 \leq k < m$). Метод выражен теоремами 1, 2 и 3. Известный ранее алгебраический метод вычисления произведений Адамара рациональных функций требует вычисления определителей порядка $m + n$. С помощью методов комбинаторного анализа и линейной алгебры порядок определителей автором снижен до величины $\min(m, n)$, что расширяет возможности применения произведения Адамара для получения решения конкретных задач в явном виде, поскольку в этом случае порядок определителей от величины $\max(m, n)$ не зависит, он равен произвольному, но фиксированному числу $\min(m, n)$.

2) С помощью доказанной автором теоремы 1 получено общее решение задачи перечисления замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками размеров 1×1, $1\times m$ и $1\times n$, а для $n = 3$ автором получена формула (1) в явном виде. Решение этой задачи при $n = 2$ с помощью комбинаторных методов ранее опубликовали в своих работах Л. Шапиро и Й.Х. Ким.

3) С помощью доказанных автором теорем 2 и 3 получено общее решение задачи перечисления замощений прямоугольника размера $2\times r$ плитками произвольной длины. Полученный автором новый метод вычисления произведений Адамара рациональных функций позволяет в данной задаче снять ограничения на длину плитки и решить известную ранее задачу в новой постановке.

4) С помощью полученного автором нового метода вычисления произведений Адамара рациональных функций (теорема 1) решена задача перечисления упорядоченных разбиений компонент двумерного вектора на слагаемые (первая компонента разбивается на слагаемые 1 и n, а вторая – на слагаемые 1 и m, где m, n – произвольные целые числа, $m \geq 2$, $n \geq 2$). Ранее эта задача была решена только в частных случаях при $n = 2$.

5) С помощью доказанных автором теорем 2 и 3 решена задача перечисления упорядоченных разбиений компонент двумерного вектора на произвольные слагаемые. По-

[1] *Жук С.Н.* Об онлайн-алгоритмах упаковки прямоугольников в несколько полос // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 4. С. 117-131.

лученный автором новый метод вычисления произведения Адамара рациональных функций позволяет в данной задаче снять ограничения на величину слагаемого и решить известную ранее задачу в новой постановке.

6) Комбинаторным методом автором получены явные формулы для вычисления производящей функции суммы весов замощений прямоугольника плитками по числу типов взаимного расположения плиток при $m = 2$, $n = 2$ (теорема 4), а также при $m = 2$, $n \geq 2$ (теорема 5). Объект исследования в данном случае является новым.

7) Получено общее решение задачи вычисления производящей функции весов замощений прямоугольника плитками по числу типов взаимного расположения плиток, а также вычисления производящей функции весов разбиений (теорема 6). Решение получено с применением метода трансфер-матрицы, что по сравнению с комбинаторным методом позволяет снять ограничения на длину плитки, а также на величину слагаемого в разбиении.

8) С применением произведения Адамара автором явно вычислены производящие функции распределений некоторых статистик от серий рекуррентных событий (теоремы 7 и 8), производящие функции распределений некоторых статистик от осциллирующего случайного блуждания (теорема 9), а также производящая функция вероятностей того, что в случайном процессе на каком-то шаге появится прямоугольник размера $k \times n$, состоящий из m плиток (теоремы 10 и 11). Явно вычислены распределения некоторых характеристик случайных последовательностей при условии, что производящие функции исходных случайных величин рациональны. Ранее произведение Адамара в задачах исследования распределений статистик от серий указанных выше случайных событий не применялось. Применение произведения Адамара позволяет явно вычислить производящие функции распределений некоторых характеристик случайных последовательностей в тех случаях, в которых их явное вычисление с помощью комбинаторных методов затруднительно.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Потехина Е.А., Толовиков М.И.* Распределение серий в последовательностях 1-зависимых индикаторов // Череповецкие научные чтения – 2010: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (3 ноября 2010 г.): В 3 ч. Ч. 3: Технические, естественные и экономические науки. Череповец: ЧГУ, 2011. С. 136-139.
2. *Потехина Е.А.* Производящие функции некоторых статистик от серий в последовательностях 1-зависимых индикаторов // Материалы XIX межвузовской военно-научной конференции (25 – 26 ноября 2010 г.). Ч. II. Череповец: Филиал ВКА имени А.Ф. Можайского, 2011. С. 91-95.
3. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара в задаче перечисления упорядоченных разбиений компонент вектора на фиксированные слагаемые // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, вып. 5. С. 798-799.
4. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара к исследованию распределения статистик в последовательностях 1-зависимых индикаторов // Материалы XXXIX военно-научной конференции молодых специалистов (11 – 13 мая 2011 г.). Ч. II. Череповец: Филиал Воен. акад. МО РФ, 2011. С. 24-27.
5. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара степенных рядов для вычисления распределений некоторых статистик от осциллирующего случайного блуждания // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта: Материалы 6-й Международной

научно-технической конференции (24 – 25 июня 2011 г.). Вологда: ВоГТУ, 2011. С. 157-161.

6. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара в задаче перечисления упорядоченных разбиений компонент вектора на произвольные слагаемые // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2012. Т. 19, вып. 3. С. 461-463.

7. *Потехина Е.А.* Осциллирующая последовательность в задаче перечисления упорядоченных разбиений // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2012. Т. 19, вып. 5. С. 739-741.

8. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара в задаче перечисления замощений прямоугольника плитками // Череповецкие научные чтения – 2011: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (1 – 2 ноября 2011 г.): В 3 ч. Ч. 3: Естественные, экономические, технические науки и математика. Череповец: ЧГУ, 2012. С. 172-175.

9. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара в задаче перечисления упорядоченных разбиений // Наукоемкие технологии. 2012. Т. 13, № 8. С. 58-65.

10. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара к решению одной из комбинаторных задач // Сборник научных трудов. Выпуск 5, ч. 1. Череповец: Филиал Воен. акад. МО РФ, 2012. С. 19-28.

11. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара в задаче вычисления производящей функции весов разбиений // Материалы XL военно-научной конференции молодых специалистов (2 – 4 мая 2012 г.). Ч. 2. Череповец: Филиал Воен. акад. МО РФ, 2013. С. 58-60.

12. *Потехина Е.А.* Осциллирующая последовательность в задаче вычисления производящей функции весов разбиений // Материалы XX межвузовской военно-научной конференции (11 октября 2012 г.). Ч. 4. Череповец: Филиал Воен. акад. МО РФ, 2013. С. 38-42.

13. *Потехина Е.А.* Применение метода трансфер-матрицы в задаче перечисления замощений прямоугольника плитками // Череповецкие научные чтения – 2012: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (1 – 2 ноября 2012 г.): В 3 ч. Ч. 3: Естественные, экономические, технические науки и математика. Череповец: ЧГУ, 2013. С. 226-229.

14. *Потехина Е.А.* Произведение Адамара в задаче перечисления замощений прямоугольника плитками // Ломоносов: Материалы XX Международной молодежной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (9 – 12 апреля 2013 г.). [Электронный ресурс] М.: МАКС Пресс, 2013. 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

15. *Потехина Е.А.* Осциллирующее случайное блуждание в задаче вычисления производящей функции весов разбиений // Материалы 41-й военно-научной конференции молодых специалистов и ученых (13 – 15 мая 2013 г.). Ч. 3. Череповец: Филиал Воен. акад. МО РФ, 2013. С. 33-36.

16. *Потехина Е.А.* Комбинаторное решение задачи перечисления замощений прямоугольника плитками // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ, СУБД и систем искусственного интеллекта: Материалы 7-й Международной научно-технической конференции (28 июня 2013 г.). Вологда: ВоГТУ, 2013. С. 154-158.

17. *Потехина Е.А.* Осциллирующее случайное блуждание в задаче перечисления упорядоченных разбиений // Наукоемкие технологии. 2013. Т. 14, № 8. С. 72-79.

18. *Потехина Е.А.* Производящие функции некоторых статистик от серий рекуррентных событий // Математика в современном мире: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 150-летию Д.А. Граве (7 – 10 октября 2013 г.). Вологда: ВГПУ, 2013. С. 58-61.

19. *Потехина Е.А., Толовиков М.И.* Осциллирующее случайное блуждание и произведение Адамара рациональных функций // Дискретная математика. 2013. Т. 25, вып. 3. С. 96-115.

20. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара для вычисления производящих функций некоторых статистик от серий рекуррентных событий // Череповецкие научные чтения – 2013: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (6 – 7 ноября 2013 г.): В 4 ч. Ч. 3: Естественные, экономические, технические науки и математика. Череповец: ЧГУ, 2014. С. 200-202.

21. *Потехина Е.А.* Вычисление распределений некоторых статистик от серий рекуррентных событий // Материалы 42-й военно-научной конференции молодых специалистов (13 – 15 мая 2014 г.). Ч. 2. Череповец: ЧВВИУРЭ, 2015. С. 33-36.

22. *Потехина Е.А.* Приложение произведения Адамара к одной из комбинаторно-вероятностных задач // Материалы 1-й совместной военно-научной конференции ФГУП «18 ЦНИИ» МО РФ и ЧВВИУРЭ (21 – 22 мая 2015 г.). Ч. 3. Череповец: ЧВВИУРЭ, 2015. С. 117-118.

23. *Потехина Е.А.* Приложение произведения Адамара к некоторым комбинаторным и вероятностным задачам // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 1. С. 101-112.

24. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара в одной из комбинаторно-вероятностных задач // Вероятностные методы в дискретной математике: Материалы IX Международной Петрозаводской конференции (30 мая – 3 июня 2016 г.) / Ин-т прикладных мат. исследований Карел. науч. центра РАН. Петрозаводск: ПетрГУ, 2016. С. 78-80.

25. *Потехина Е.А.* Приложение комбинаторно-алгебраического метода вычисления произведения Адамара к одной из комбинаторно-вероятностных задач // Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (26 июня – 2 июля 2016 г.). Казань: КФУ, 2016. С. 275-276.

26. *Потехина Е.А.* Применение произведения Адамара в задаче распределения ресурсов вычислительной сети // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3 (19), № 1. С. 463-471.