На правах рукописи

Петросян ОванесЛеонович

КООПЕРАТИВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ДИНАМИЧЕСКИМ ОБНОВЛЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ

Специальность 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидатафизико-математических наук

Санкт-Петербург

2017

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Захаров Виктор Васильевич

Официальные оппоненты: Реттиева Анна Николаевна, доктор физико-математических наук, доцент, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук, и.о. зам. директора по научной работе

Сандомирская Марина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, Лаборатория теории рынков и пространственной экономики НИУ ВШЭ, научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук

Защита состоится «__» ______ 2017 года в____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, г. Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д.33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте

https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/Wvm58zpgrB.pdf

Автореферат разослан« » __________2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В. М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень ее разработанности.

Теория дифференциальных игр в настоящее время является одним из наиболее бурно развивающихся разделов математической теории игр. Главным образом это связано с тем, что математический аппарат дифференциальных игр позволяет реалистично моделировать конфликтно-управляемые процессы, непрерывно развивающиеся во времени. Так динамика фазовой переменной, описывающей состояние процесса, задается системой дифференциальных уравнений на некотором временном промежутке заданной продолжительности.

Теория дифференциальных игр сформировалась как отдельный раздел математической теории игр в пятидесятых годах двадцатого века. Одними из первых интересные результаты в этой области получили Р. Айзекс, Л. Берковитц, В. Флеминг. Долгое время исследования были посвящены в основном антагонистическим дифференциальным играм. Значительные успехи в данной области связаны с представителями отечественной научной школы Н.Н. Красовским, Л.С. Понтрягиным, Е. Ф. Мищенко, Б. Н. Пшеничным, Л.А. Петросяном.

Особый интерес представляют также кооперативные дифференциальные игры. Естественным подходом к изучению кооперативных дифференциальных игр, как игр дележей, является попытка переноса результатов классической кооперативной теории "однократных" игр Неймана-Моргенштерна. Однако при использовании результатов классической теории необходимо дополнительно исследовать вопрос о динамической и сильно динамической устойчивости полученного решения. Попытки применения динамически неустойчивых принципов оптимальности при решении прикладных задач в области экономики, экологии, менеджмента приводят к не реализуемости таких принципов, поскольку в некоторый момент времени возникают условия, когда соглашение о кооперации могут быть пересмотрено. Это обстоятельство впервые было замечено Л. А. Петросяном в 1977 году, тогда он сформулировал строгое математическое определение динамической устойчивости принципа оптимальности (кооперативного решения), а в 1979 году он предложил способ решения проблемы динамической неустойчивости кооперативного решения при помощи схемы выплат, получившей название процедуры распределения дележа (ПРД). Определение сильной динамической устойчивости впервые было дано им в 1993 году.

Теория кооперативных дифференциальных игр изучает вопросы построения оптимальных (кооперативных) решений в конфликтно-управляемых процессах со многими участниками на определенном временном интервале. Но множество подобных процессов развивается во времени непрерывно, а их участники непрерывно получают обновленную информацию и адаптируются. Именно для таких процессов был предложен подход позволяющий моделировать кооперативные игры с динамическим обновлением информации. Но возникает много вопросов, например, как для таких игр построить кооперативную траекторию, стратегии, ее порождающие, суммарный выигрыш вдоль кооперативной траектории, определить распределение суммарного выигрыша между игроками.

Цели и задачи исследования

Целью диссертационной работы является формализация и построение оптимальных решений о распределении выигрышей в конфликтно-управляемых процессах со многими участниками, когда информация о процессе обновляется динамически с течением времени. Для достижения поставленной цели в работе ставятся и решаются следующие задачи:
Построение сильно динамически устойчивого ПРД-ядра.

1. Формализация поведения игроков на периодах между моментами времени, когда информация об игре обновляется, т.е. построение усеченных подыгр.
2. Исследование каждой усеченной подыгры, нахождение кооперативной траектории, построение характеристической функции вдоль кооперативных траекторий, получение оптимального решения.
3. Нахождение результирующего решения для игры, определенной на совокупности всех временных интервалов.
4. Формализация общей кооперативной игры, определенной на совокупности всех временных интервалов, определение характеристической функции для игры с динамическим обновлением информации.
5. Исследование свойства сильной динамической устойчивости (сильной временной состоятельности) результирующего решения дифференциальной кооперативной игры.
6. Построение результирующего решения, соответствующего набору классических решений в каждой усеченной подыгре, а именно пропорционального решения, вектора Шепли, С-ядра, сильно динамически устойчивого ПРД-ядра.
7. Исследование связи результирующего решения и решения в каждой усеченной подыгре, а именно пропорционального решения, вектора Шепли, С-ядра, сильно динамически устойчивого ПРД-ядра.
8. Изучение различных вариантов или моделей игр с динамическим обновлением информации, а именно: кооперативные дифференциальные игры с динамическим обновлением информации, с предписанной или бесконечной продолжительностью, кооперативные дифференциальные игры с динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом, кооперативные дифференциальные игры со случайным обновлением информации.
9. Апробация полученных теоретических результатов на теоретико-игровой модели добычи ограниченного ресурса, демонстрация свойства сильной динамической устойчивости полученного решения.

Научная новизна работы.

Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Методология и методы исследования.

В процессе проведения исследования автор опирался на научную методологию проведения исследования, общепризнанные принципы и подходы к исследовательской деятельности в области прикладной математики, методы теории оптимизации и теории игр.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Определено новое решение для кооперативных дифференциальных игр, обладающее свойством сильной динамической устойчивости - сильно динамически устойчивое ПРД-ядро.
2. Построены и исследованы новые математические модели дифференциальной игры с динамическим обновлением информации с предписанной и бесконечной продолжительностью, дифференциальной игры с динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом, дифференциальной игры со случайным обновлением информации.
3. Предложены конструктивные методы нахождения результирующего кооперативного решения в дифференциальных играх с динамическим обновлением информации с предписанной и бесконечной продолжительностью, дифференциальных играх с динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом, дифференциальных играх со случайным обновлением информации.
4. Предложена процедура построения характеристической функции в играх с динамическим обновлением информации на основе значений характеристических функций в усеченных подыграх.
5. Доказаны теоремы о сильной Δt-динамической устойчивости в дифференциальных играх с динамическим обновлением информации с предписанной и бесконечной продолжительностью, дифференциальных играх с динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом, дифференциальных играх со случайным обновлением информации.
6. Определена связь кооперативного решения в игре с динамическим обновлением информации и кооперативных решений (пропорциональное решение, вектор Шепли, С-ядро, сильно динамически устойчивое ПРД-ядро), в каждой усеченной подыгре.

Практическая значимость.

Полученные в диссертации результаты представляют практический интерес. Кооперативные дифференциальные игры с динамическим обновлением информации, а также их различные варианты являются удобными математическими моделями для описания процессов, происходящих в экономике, экологии, менеджменте и прочих сферах человеческой деятельности.

Степень достоверности и апробация результатов исследования.

Достоверность полученных результатов основана на строгом доказательстве всех сформулированных математических утверждений. Основные результаты были представлены на семинарах кафедры математического моделирования энергетических систем, на семинарах Центра теории игр, на международной конференции "Game Theory and Management" (Санкт-Петербург, 2015 и 2016 гг.), "Workshop on the Game Theory and Social Choice" (Будапешт, 2015 г.), на XIII международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2016 год).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ, две из которых ([1], [2]) - в изданиях, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией (ВАК) для публикации основных научных результатов. Публикации [3-5] индексируются в базе данных Scopus. В работе [2] диссертант построил новое решение для кооперативных дифференциальных игр с предписанной продолжительностью, обладающее свойствами сильной динамической устойчивостью – ПРД-ядро. В работе [5] диссертантом была построена модель кооперативных дифференциальных игр с динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом, для этого класса игр было получено решение и доказано свойство сильной Δt-динамической устойчивости. В работе [3] диссертантом была сформулирована и решена задача определения в некотором смысле оптимального информационного горизонта.

Структура и основное содержание работы

Диссертация состоит из введения, семи глав, разбитых на параграфы, заключения, списка используемой литературы, включающего 48 наименование. Объем составляет 108 страниц машинописного текста. Работа содержит 26 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель и ставятся задачи работы, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, приводится краткое содержание работы по главам.

Первая глава

Строится новое решение в кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью, обладающее свойством сильной динамической устойчивости – ПРД-ядро.

В разделе 1.1 описывается кооперативная дифференциальная игра с предписанной продолжительностью, описывается построение С-ядра в исходной игре, приводятся основные определения из области кооперативных игр.

В разделе 1.2 определяется множество ПРД, позволяющее построить динамически устойчивое ПРД-ядро. Предположим, что характеристическая функция $V(S; x^*(t), T-t)$ вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$ является непрерывно дифференцируемой по t, $t \in [t_0, T]$.

Определение 1.2.1. $B(t)$ *– это множество интегрируемых вектор функций, которое определяется следующим образом:*

$$B(t) = \{\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)):$$
$$-\frac{d}{dt}[V(N; x^*(t), T-t) - V(N\backslash S; x^*(t), T-t)] \geq \sum_{i\in S} \beta_i(t) \geq -\frac{d}{dt}[V(S; x^*(t), T-t)], \forall S \subset N,$$
$$\sum_{i\in N} \beta_i(t) = -\frac{d}{dt}[V(N; x^*(t), T-t)]\} \qquad (1).$$

В разделе 1.3 строится соответствующее множество дележей и исследуются его свойства.

Определение 1.3.1. *Пусть* $B(t) \neq \emptyset, \forall t \in [t_0, T]$. *ПРД-ядром* $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ *назовем множество всех вектор функций*$\alpha(t)$, *удовлетворяющих условию (3) для всех вектор функций*$\beta(t) \in B(t)$*:*

$$\alpha(t) = \int_t^T \beta(\tau) d\tau, t \in [t_0, T]. \qquad (3)$$

Доказано, что $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ можно рассматривать в качестве кооперативного решения:

Утверждение 1.3.1. *Пусть множество* $B(t) \neq \emptyset$ *и ПРД-ядро* $\overline{C}(x^*(t), T-t)$, $\forall t \in [t_0, T]$. *Множество* $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ *является подмножеством множества дележей в игре* $\Gamma_V(x^*(t), T-t)$, *т.е.* $\overline{C}(x^*(t), T-t) \subseteq E(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$.

Также доказано, что $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ является подмножеством С-ядра:

Утверждение 1.3.2. *ПустьС-ядро игры* $\Gamma_V(x^*(t), T-t)$ *и множество* $B(t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$. *Тогда множество* $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ *является подмножеством С-ядра* $C(x^*(t), T-t)$ *в игре* $\Gamma_V(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$.

Раздел 1.4 посвящен свойству сильной динамической устойчивости, сформулирована конструктивная теорема, позволяющая построить сильно динамически устойчивое ПРД-ядро:

Утверждение 1.4.1. *Пусть* $B(t) \neq \emptyset, C(x^*(t), T - t) \neq \emptyset,\ \overline{C}(x^*(t), T - t) \neq \emptyset,\ \forall t \in [t_0, T]$. *Тогда ПРД-ядро* $\overline{C}(x^*(t), T - t) \subseteq C(x_0, T - t_0)$ *сильно динамически устойчиво в игре* $\Gamma_V(x_0, T - t_0)$.

В разделе 1.5 теоретические результаты продемонстрированы на примере дифференциальной игры управления вредными выбросами. Приводятся результаты численного построения множества $B(t)$ в среде Matlab и соответствующие графики для определенных параметров. Иллюстрируется свойство сильной динамической устойчивости решения $\overline{C}(x^*(t), T - t)$.

Вторая глава

Вторая глава посвящена описанию и изучению кооперативных дифференциальных игр с динамическим обновлением информации, как с предписанной, так и с бесконечной продолжительностью. Определено понятие усеченной подыгры, построена условно кооперативная траектория, построено решение в игре с динамическим обновлением информации, показано, что решение обладает свойством $\Delta\, t$-сильной динамической устойчивости. Введено понятие характеристической функции для всей игры. Также показана связь между решениями, выбранными игроками в усеченных подыграх и в игре с динамическим обновлением информации.

В разделе 2.1 приводится определение усеченной подыгры, объясняется каким образом на основе этого понятия можно смоделировать поведение игроков в игре с динамическим обновлением информации.

Определение 2.1.1. *Пусть* $j = 0, \dots, l$. *Усеченная подыгра* $\hat{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$ *определена на временном интервале* $[t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}]$ *следующим образом. На временном интервале* $[t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}]$ *уравнения движения, функция выигрыша в усеченной игре и исходной игре совпадают:*

$$\dot{x} = g(t, x, u), \qquad x(t_0 + j\Delta t) = x_{j,0}$$

$$K_i^j\big(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}; u\big) = \int\limits_{t_0 + j\Delta t}^{t_0 + j\Delta t + \overline{T}} h_i\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big) e^{-r(\tau - t_0)} d\tau. \quad (5)$$

Под исходной игрой в определении 1.3.1. будем понимать игру $\Gamma(x_0, T - t_0)$с предписанной продолжительностью, тогда дисконт фактор может принимать нулевое значение$r \geq 0$ и $l = \frac{T}{\Delta t} - 1$, где$T < \infty$, либо игру $\Gamma(x_0, t_0)$с бесконечной продолжительностью, тогда $l = +\infty$и дисконт фактор $r > 0$. Для игры с бесконечной продолжительностью предполагается также, что выигрыш в игре (в любой усеченной подыгре) рассчитывается от момента времени t_0; в формуле (5) дисконтирование выигрыша начинается с момента времени t_0.

В разделе 2.2 описывается решение усеченной подыгры, строится условно-кооперативная траектория. В соответствии с рассматриваемым подходом в каждый момент времени игрокам доступна ограниченная информация о структуре игры $\Gamma(x_0, T - t_0)(\Gamma(x_0, t_0))$. Этой информации недостаточно, чтобы определить кооперативное поведение для игроков во всей игре $\Gamma(x_0, T-t_0)(\Gamma(x_0,t_0))$. Вместо кооперативной траектории в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)(\Gamma(x_0,t_0))$ будем строить условно-кооперативную траекторию:

Определение 2.2.1. *Условно кооперативная траектория* $\{\hat{x}^*(t)\}_{t=t_0}^{T}(\{\hat{x}^*(t)\}_{t=t_0}^{+\infty})$ *– это комбинация кооперативных траекторий* $x_j^*(t)$ *в усеченных подыграх* $\hat{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0+j\Delta t, t_0+j\Delta t+\overline{T})$*:*

$$\{\hat{x}^*(t)\}_{t=t_0}^{l} = \begin{cases} x_0^*(t), t \in [t_0, t_0+\Delta t], \\ \dots \\ x_j^*(t), t \in [t_0+j\Delta t, t_0+(j+1)\Delta t], \\ \dots \\ x_l^*(t), t \in [t_0+l\Delta t, t_0+(l+1)\Delta t], \end{cases} \quad (6)$$

где для игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$*с предписанной продолжительностью* $t_0+(l+1)\Delta t = T$ *и* $T<\infty$*, а для игры* $\Gamma(x_0,t_0)$*с бесконечной продолжительностью* $l=+\infty$ *и соответственно*$t_0+(l+1)\Delta t = +\infty$.

В разделе 2.3 раскрывается концепция решения в исходной игре с динамическим обновлением информации, доказывается свойство сильной Δt-динамической устойчивости. В качестве решения в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)\big(\Gamma(x_0,t_0)\big)$ используется комбинация решений $W_j\big(x_{j,0}^*, t_0+j\Delta t, t_0+j\Delta t+\overline{T}\big)$ (соответствующих ПРД) в усеченных подыграх $\hat{\Gamma}_V^j\big(x_{j,0}^*, t_0+j\Delta t, t_0+j\Delta t+\overline{T}\big), j=0,\dots,l\ (j=0,\dots,+\infty)$. Пусть для каждого дележа $\xi_j(x_{j,0}^*, t_0+j\Delta t, t_0+j\Delta t+\overline{T}) \in W_j(x_{j,0}^*, t_0+j\Delta t, t_0+j\Delta t+\overline{T})$ существует ПРД$\beta_j(t, x_j^*)$. Определим результирующее ПРД для всей игры $\Gamma(x_0, T-t_0)(\Gamma(x_0,t_0))$:

Определение 2.3.1. *Результирующее ПРД* $\hat{\beta}(t,\hat{x}^*)$ *определяется для каждого набора* $\xi_j(x_{j,0}^*, t_0+j\Delta t, t_0+j\Delta t+\overline{T}) \in W_j(x_{j,0}^*, t_0+j\Delta t, t_0+j\Delta t+\overline{T})$ *с соответствующими ПРД* $\beta_j(t,x_j^*)$ *следующим образом:*

$$\hat{\beta}(t,\hat{x}^*) = \begin{cases} \beta_0(t,x_0^*), t \in [t_0, t_0+\Delta t], \\ \dots \\ \beta_j(t,x_j^*), t \in [t_0+j\Delta t, t_0+(j+1)\Delta t], \\ \dots \\ \beta_l(t,x_l^*), t \in [t_0+l\Delta t, t_0+(l+1)\Delta t], \end{cases} \quad (7)$$

где для игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$*с предписанной продолжительностью* $t_0+(l+1)\Delta t = T$ *и* $T<\infty$*, а для игры* $\Gamma(x_0,t_0)$*с бесконечной продолжительностью* $l=+\infty$ *и соответственно*$t_0+(l+1)\Delta t = +\infty$.

С помощью результирующего ПРД $\hat{\beta}(t,\hat{x}^*)$ определим следующий вектор:

Определение 2.3.2. *Результирующий вектор* $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T-t)$*– это вектор определенный с помощью результирующего ПРД* $\hat{\beta}\big(t,\hat{x}^*(t)\big)$ *следующим образом, пусть* $t \in [t_0+j\Delta t, t_0+(j+1)\Delta t]$*:*

$$\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T-t) = \int_t^T \hat{\beta}\big(\tau,\hat{x}^*(\tau)\big)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau =$$

$$= \sum_{m=j+1}^{l}\left[\int\limits_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \beta_m\big(\tau, x_m^*(\tau)\big)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau\right] + \left[\int\limits_{t}^{j\Delta t} \beta_j\big(\tau, x_m^*(\tau)\big)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau\right], (8)$$

в частности:

$$\hat{\xi}(x_0, T-t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} \hat{\beta}\big(\tau, \hat{x}^*(\tau)\big)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau,$$

где для игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$с предписанной продолжительностью $l = \frac{T}{\Delta t} - 1$, где $T < \infty$, а для игры $\Gamma(x_0, t_0)$ с бесконечной продолжительностью $T = +\infty$, и соответственно $l = +\infty$. Для игры $\Gamma(x_0, t_0)$вектор, определенный с помощью формулы (8) будем обозначать через $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), t)$.

Введем понятие результирующего решения в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ ($\Gamma(x_0, t_0)$) с динамическим обновлением информации:

Определение 2.3.3. *Результирующее решение $\widehat{W}(\hat{x}^*(t), T-t)(\widehat{W}(\hat{x}^*(t), t))$ - это множество векторов $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T-t)(\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), t))$, построенных с помощью (7),(8) для всевозможных результирующих ПРД $\hat{\beta}(t, \hat{x}^*)$.*

Утверждение 2.3.1. *Любой результирующий вектор $\hat{\xi}(x_0, T-t_0) \in \widehat{\mathrm{W}}(x_0, T-t_0)$ ($\hat{\xi}(x_0, t_0) \in \widehat{\mathrm{W}}(x_0, t_0)$) и соответствующее результирующее ПРД $\hat{\beta}(t, \hat{x}^*)$ распределяет суммарный выигрыш игроков вдоль условно кооперативной траектории $\hat{x}^*(t)$ в игре с предписанной продолжительностью $\Gamma(x_0, T-t_0)$ (с бесконечной продолжительностью $\Gamma(x_0, T-t_0)$, где $\forall t \in [t_0, T]$ ($\forall t \in [t_0, +\infty]$):*

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_{t_0}^{t} \hat{\beta}_i\big(\tau, \hat{x}^*(\tau)\big)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_{t_0}^{t} \hat{h}_i\big(\hat{x}^*(\tau), \hat{u}^*(\tau)\big)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau\right].$$

Теорема 2.3.1. *Результирующее решение $\widehat{\mathrm{W}}(x_0, T-t_0)$ ($\widehat{\mathrm{W}}(x_0, t_0)$) является сильно Δt-динамически устойчивым в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ с предписанной продолжительностью ($\Gamma(x_0, t_0)$ с бесконечной продолжительностью).*

Раздел 2.4 посвящен построению характеристической функции в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ с динамическим обновлением информации и предписанной продолжительностью. В качестве характеристической функции в этой игре будем использовать понятие результирующей характеристической функции $\overline{\mathrm{V}}(S; x_0, T-t_0)$:

Определение 2.4.3. *Результирующей характеристической функцией $\overline{V}(S; \hat{x}^*(t), T-t)$ в игре $\Gamma(\hat{x}^*(t), T-t)$ с динамическим обновлением информации будем называть функцию, которая вычисляется с помощью значений характеристических функций $V_j\big(S; x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}\big)$ в каждой усеченной подыгре $\bar{\Gamma}_V^j\big(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}\big)$ вдоль условно кооперативной траектории $\hat{x}^*(t)$. Пустьt $\in [t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t]$, тогда:*

$$\overline{V}(S;\hat{x}^*(t),T-t) = \sum_{m=j+1}^{l}[V_m(S;x^*_{m,0},t_0+m\Delta t,t_0+m\Delta t+\overline{T}) -$$

$$-V_m(S;x^*_{m,1},t_0+(m+1)\Delta t,t_0+m\Delta t+\overline{T})] +$$

$$+[V_j(S;x^*_j(t),t,t_0+j\Delta t+\overline{T}) - V_j(S;x^*_{j,1},t_0+(j+1)\Delta t,t_0+j\Delta t+\overline{T})], \qquad (10)$$

где $x^*_{j,0}(t) = \hat{x}^*(t_0+j\Delta t), x^*_{j,1}(t) = \hat{x}^*(t_0+(j+1)\Delta t)$.

Покажем, что в этом случае результирующий вектор $\hat{\xi}(x_0,T-t_0)$, который используется, чтобы распределить выигрыш между игроками, можно считать дележом в игре $\Gamma(x_0,T-t_0)$с характеристической функцией $\overline{\mathrm{V}}(S;x_0,T-t_0)$.

Теорема 2.4.2. *Результирующий вектор* $\hat{\xi}(x_0,T-t_0)$ *является дележом в игре* $\Gamma(x_0,T-t_0)$ *с динамическим обновлением информации, если для* $\forall t \in [t_0+j\Delta t, t_0+(j+1)\Delta t], j = 0,\ldots,l$*выполняется следующее условие:*

$$\xi^j_i(x^*_j(t),t,t_0+j\Delta t+\overline{T}) - V_j(\{i\};x^*_j(t),t,t_0+j\Delta t+\overline{T}) \geq$$

$$\xi^j_i(x^*_{j,1},t_0+(j+1)\Delta t,t_0+j\Delta t+\overline{T}) - V_j(\{i\};x^*_{j,1},t_0+(j+1)\Delta t,t_0+j\Delta t+\overline{T}). (11)$$

В разделе 2.5 описывается и формализуется математически связь решений $W_j(x^*_j(t),t)$, выбранных игроками в усеченных подыграх с результирующим решением $\widehat{W}(\hat{x}^*(t),T-t)$ в игре с динамическим обновлением информации. На основе введенного понятия характеристической функции$\overline{\mathrm{V}}(S;\hat{x}^*(t),T-t)$ определяются такие принципы оптимальности, как пропорциональное решение, вектор Шепли, С-ядро и сильно динамически устойчивое ПРД-ядро.

Определение 2.5.1. *Пропорциональным решением в* $\Gamma(x_0,T-t_0)$ *с динамическим обновлением информации, с характеристической функцией* $\overline{\mathrm{V}}(S;\hat{x}^*(t),T-t)$ *будем называть такой дележ* $\widehat{\mathrm{Prop}}(\hat{x}^*(t),T-t)$,*ПРД которого рассчитывается следующим образом:*

$$\hat{\beta}^{Prop}_t(t) = \frac{\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{V}}(\{i\};\hat{x}^*(t),T-t)}{\sum_{i\in N}\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{V}}(\{i\};\hat{x}^*(t),T-t)}\left(-\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{V}}(N;\hat{x}^*(t),T-t)\right), t\in[t_0,T]. (12)$$

Теорема 2.5.2. *Пусть в каждой усеченной подыгре*$\widehat{\Gamma}_j(x^*_j(t),t,t_0+j\Delta t+\overline{T})$*:*

$$\xi_j(x^*_j(t),t,t_0+j\Delta t+\overline{T}) = Prop_j(x^*_j(t),t,t_0+j\Delta t+\overline{T}), (16)$$

где $t \in [t_0+j\Delta t, t_0+(j+1)\Delta t+\overline{T}], j = 0,\ldots,l$, *тогда*

$$\hat{\xi}(\hat{x}^*(t),T-t) = Prop(\hat{x}^*(t),T-t), \forall t \in [t,T], (17)$$

где $\widehat{Prop}(\hat{x}^*(t),T-t)$ *- это пропорциональное решение, рассчитанное на основе характеристической функции* $\overline{\mathrm{V}}(S;\hat{x}^*(t),T-t)$ *(10).*

Определение 2.5.2. *Вектором Шепли в* $\Gamma(x_0,T-t_0)$ *с динамическим обновлением информации, с характеристической функцией* $\overline{V}(S;\hat{x}^*(t),T-t)$ *будем называть следующий дележ:*

$$\widehat{Sh}(\hat{x}^*(t),t,t_0+j\Delta t+\overline{T}) =$$

$$= \sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}} \frac{(|N|-|S|)!\,(|S|-1)!}{|N|!}(\overline{V}(S;\hat{x}^*(t),T-t) - \overline{V}(S\backslash\{i\};\hat{x}^*(t),T-t). (15)$$

Теорема 2.5.1. *Пусть в каждой усеченной подыгре* $\widehat{\Gamma}_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$:

$$\xi_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) = Sh_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}), (13)$$

где $t \in \left[t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t + \overline{T}\right], j = 0, \dots, l,$ *тогда*

$$\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T - t) = \widehat{Sh}(\hat{x}^*(t), T - t), \forall t \in [t, T], (14)$$

где $\widehat{Sh}(\hat{x}^*(t), T - t)$ *- это вектор Шепли, рассчитанный на основе характеристической функции* $\overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t)$ (10).

Определение 2.5.3. *С-ядром в* $\Gamma(x_0, T - t_0)$ *с динамическим обновлением информации с характеристической функцией* $\overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t)$*будем называть множество* $\hat{C}(\hat{x}^*(t), T - t)$*дележей* $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T - t)$, *каждый из которого удовлетворяет следующем условию:*

$$\sum_{i \in S} \hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T - t) \geq \overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t), \forall S \subseteq N. (18)$$

Теорема 2.5.3. *Пусть в каждой усеченной подыгре* $\widehat{\Gamma}_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$:

$$W_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) = C_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}), (19)$$

где $\forall t \in [t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t], j = 0, \dots, l,$ *тогда для всех* $\xi_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) \in C_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$ *для которых выполняется условие:*

$$\sum_{i \in S} \xi_i^j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) - V_j(S; x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) \geq$$

$$\geq \sum_{i \in S} \xi_i^j(x_{j,1}^*, t_0 + (j+1)\Delta t + \overline{T}, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) - V_j(S; x_{j,1}^*, t_0 + (j+1)\Delta t + \overline{T}, t_0 + j\Delta t + \overline{T}), (20)$$

верно, что

$$\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T - t) \in \hat{C}(\hat{x}^*(t), T - t), \forall t \in [t, T], \ (21)$$

где $\hat{C}(\hat{x}^*(t), T - t)$ *- это С-ядро, рассчитанное на основе результирующей характеристической функции* $\overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t)$.

Определение 2.5.4. *ПРД-ядром в* $\Gamma(x_0, T - t_0)$*с динамическим обновлением информации с характеристической функцией* $\overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t)$ *будем называть множество* $\overline{\hat{C}}(\hat{x}^*(t), T - t)$ *дележей* $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T - t)$ *ПРД* $\hat{\beta}(t, \hat{x}^*)$, *каждого из которых удовлетворяет следующем условию:*

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t) - \overline{\mathrm{V}}(N \backslash S; \hat{x}^*(t), T - t)\right] \geq \sum_{i \in S} \hat{\beta}_i(t, \hat{x}^*) \geq \frac{d}{dt}\left[\overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t)\right],$$
$$\forall S \subset N. (22)$$

Теорема 2.5.4. *Пусть в каждой усеченной подыгре* $\widehat{\Gamma}_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$

$$W_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) = \overline{C}_j(x_j^*(t), t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}) \neq \emptyset, (23)$$

где $\forall t \in [t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t], j = 0, \dots, l,$ *тогда верно, что*

$$\widehat{W}(\hat{x}^*(t), T - t) = \overline{\hat{C}}(\hat{x}^*(t), T - t), \forall t \in [t, T], (24)$$

где $\overline{\hat{C}}(\hat{x}^*(t), T - t)$ *- это ПРД-ядро, рассчитанное на основе характеристической функции* $\overline{\mathrm{V}}(S; \hat{x}^*(t), T - t)$

В разделе 2.6 теоретические результаты апробируются на кооперативной игре добычи ограниченного ресурса с предписанной продолжительностью и динамическим обновлением информации, в качестве принципа оптимальности используется С-ядро. Приводятся результаты численного моделирования в среде Matlab. Построение С-ядра происходит на основе результата полученного в теореме 2.5.3, а именно на основе формулы (18).

Третья глава.

Третья глава посвящена описанию и изучению кооперативных дифференциальных игр с предписанной продолжительностью, динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом. Для кооперативной дифференциальной игры с предписанной продолжительностью предложен подход, когда игроки используют стохастический прогноз для предсказания изменения информации об игре в будущем. Определено понятие комбинированной усеченной подыгры, которое позволяет моделировать использование игроками прогноза. Доказано свойство сильной Δt −динамической устойчивости. На примере продемонстрировано несколько подходов, использующих прогнозы, проведено сравнение и сделаны выводы.

В разделе 3.1 приводится определение комбинированной усеченной подыгры, объясняется, каким образом на основе этого понятия можно смоделировать поведения игроков, которые используют прогноз для принятия решения.

Определение 3.1.1. *Пусть* $j = 0, \dots, l$. *Комбинированная усеченная подыгра* $\hat{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, T)$ *определена на временном интервале* $[t_0 + j\Delta t, T]$ *следующим образом. На временном интервале* $[t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t]$ *уравнения движения, функция выигрыша в усеченной подыгре игре и исходной игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$ *совпадают. Но на интервале* $(t_0 + (j+1)\Delta t, T]$ *усеченная подыгра* $\hat{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, T)$ *является стохастической игрой. Уравнения движения и функция выигрыша в комбинированной усеченной подыгре имеют следующий вид:*

$$dx = f_j(x, u_{1,\dots,}u_n)dt + I(j,t) \cdot \sigma(t,x)dz(t), x(t_0 + j\Delta t) = x_{j,0}, (25)$$

где

$$I(j,t) = \begin{cases} 0, t \in [t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t], \\ 1, t \in (t_0 + (j+1)\Delta t, T], \end{cases} \quad (26)$$

а выигрыш игрока $i \in N$ *определяется математическим ожиданием*

$$K_i^j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, T; u) = E\left\{ \int_{t_0 + j\Delta t}^{T} h_i\left(x(\tau), u(\tau)\right)d\tau + q_i\left(x(T)\right) \right\}. (27)$$

В разделе 3.2 описывается решение комбинированной усеченной подыгры.

В разделе 3.3для этого класса игр введем понятие условной кооперативной траектории$\{\hat{x}^*(t)\}_{t=t_0}^{T}(\{\hat{x}^*(t)\}_{t=t_0}^{+\infty})$, результирующего ПРД $\hat{\beta}(t, \hat{x}^*)$, результирующего вектора $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T - t)$, результирующего решения $\widehat{W}(\hat{x}^*(t), T - t)(\widehat{W}(\hat{x}^*(t), t))$ так же, как и в главе 2 в определениях 2.2.1., 2.3.1., 2.3.2., 2.3.3.

Теорема 3.3.1. *Решение* $\widehat{W}(x_0, T - t_0)$ *является сильно* Δt*-динамически устойчивым в игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$ *с динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом.*

В разделе 3.4 теоретические результаты апробируются на кооперативной игре добычи ограниченного ресурса с динамическим обновлением информации и стохастическим прогнозом, приводится сравнение нескольких вариантов прогнозов, и делаются выводы.

Четвертая глава.

Четвертая глава посвящена описанию и изучению кооперативных дифференциальных игр с предписанной продолжительностью и случайным обновлением информации. В этом случае, игроки, получая обновленную информацию о структуре игры, не имеют точной информации в течение, которого информация будет верна. Единственное, что им известно, это то, что величина информационного горизонта является случайной величиной, распределение которой известно. Понятие усеченной подыгры здесь основано на понятии дифференциальной игры со случайной продолжительностью и названо случайной подыгрой. В качестве кооперативного решения используется сильно динамически устойчивое ПРД-ядро.

В разделе 4.1 приводится определение случайной усеченной подыгры, объясняется, каким образом на основе этого понятия можно смоделировать поведения игроков, которые получают точную информацию о структуре игры, но уверены только в вероятностных характеристиках ее продолжительности.

Определение 4.1.1. *Пусть* $j = 0, \dots, l$. *Случайная усеченная подыгра* $\hat{\Gamma}_j\big(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t\big)$ *определена на интервале* $\big[t_0 + j\Delta t, \overline{T}_j\big]$, *где* $\overline{T}_j$, *- это случайная величина, которая принимает значения из* $\big[\max\big(t_0 + (j+1)\Delta t, \overline{T}_{j-1}\big), T\big]$, *где* $\overline{T}_{j-1}$ *- это реализация случайного информационного горизонта в случайной усеченной подыгре* $\hat{\Gamma}_{j-1}\big(x_{j-1,0}, t_0 + (j-1)\Delta t\big)$. *Уравнения движения и функция выигрыша в усеченной игре и исходной игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$ *на временном интервале* $[t_0 + j\Delta t, \overline{T}_j]$ *совпадают:*

$$\dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_n), \qquad x(t_0 + j\Delta t) = x_{j,0}. \quad (33)$$

Функция выигрыша игрока $i \in N$ *имеет следующий вид:*

$$K_i^j\big(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t; u\big) = \int\limits_{t_0+j\Delta t}^{T} \int\limits_{t_0+j\Delta t}^{t} h_i\big(x(\tau), u(\tau)\big) d\tau dF_j(t), \quad (34)$$

где $F_j(t)$ *- это функция распределения случайной величины* $\overline{T}_j$*:*

$$\int\limits_{t_0+j\Delta t}^{T} dF_j(t) = \int\limits_{\max(t_0+(j+1)\Delta t, \overline{T}_{j-1})}^{t} dF_j(t) = 1. \quad (35)$$

Формула для выигрыша игрока $i \in N$ (34) для каждой случайной усеченной подыгры $\hat{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t)$ была записана в следующем виде:

$$\int\limits_{t_0+j\Delta t}^{T} \int\limits_{t_0+j\Delta t}^{t} h_i\big(x(\tau), u(\tau)\big) d\tau dF_j(t) = \int\limits_{t_0+j\Delta t}^{T} (1 - F_j(\tau)) h_i\big(x(\tau), u(\tau)\big) d\tau, \quad (36)$$

где $F_j(t) = 0$ для $t \in [t_0 + j\Delta t, \overline{T}_{j-1}]$.

В разделе 4.2 описывается сильно динамически устойчивое ПРД-ядро, как решение случайной усеченной подыгры, строится условно кооперативная траектория $\{\hat{x}^*(t)\}_{t=t_0}^{T}$ также, как в определении 2.2.1.

В качестве принципа оптимальности

$$W_j\left(x_{j,0}^*, t_0 + j\Delta t, T\right) \subset E_j\left(x_{j,0}^*, t_0 + j\Delta t, T\right) \ (37)$$

в каждой случайной усеченной подыгре $\hat{\Gamma}_j^c\left(x_{j,0}^*, t_0 + j\Delta t\right)$ используется сильно динамически устойчивое ПРД-ядро $\overline{C}_j\left(x_j^*(t), t\right)$, определенное в главе 1 для случая конечной игры [2].Предполагается, что функция $V_j(S; x_j^*(t), t)$ является непрерывно дифференцируемой по $t, t \in [t_0 + j\Delta t, T]$. Определяется множество векторов $B_j(t, x_j^*)$:

$$B_j\left(t, x_j^*\right) = \Big\{\beta_j(t) = \left(\beta_1^j(t), \dots, \beta_n^j(t)\right) : -\frac{d}{dt}\left[V_j\left(S; x_j^*(t), t\right) - V_j\left(N \backslash S; x_j^*(t), t\right)\right] \geq$$

$$\geq \sum_{i \in S} (1 - F_j(t)\beta_i^j(t, x_j^*(t)) \geq -\frac{d}{dt}\left[V_j\left(S; x_j^*(t), t\right),\right.$$

$$\left.\sum_{i \in S} (1 - F_j(t)\beta_i^j\left(t, x_j^*(t)\right) = -\frac{d}{dt}\left[V_j\left(N; x_j^*(t), t\right)\right], \forall S \subset N\right\}. \ (38)$$

Предполагается, что $B_j\left(t, x_j^*\right) \neq \emptyset, j = 0, \dots, l$, тогда с помощью множества $B_j\left(t, x_j^*\right)$ можно определить следующее множество векторов $\overline{C}_j\left(x_j^*(t), t\right)$, ПРД $\beta_j\left(t, x_j^*(t)\right)$ каждого из которых принадлежит множеству $B_j\left(t, x_j^*\right)$.

В разделе 4.3 описывается решение в исходной игре с динамическим обновлением информации, доказывается свойство сильной динамической устойчивости. Для того, чтобы построить решение в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ со случайным обновлением информации используется семейство множеств $B_j\left(t, x_j^*\right), j = 0, \dots, l$. Сначала строится множество ПРД для всей игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ следующим образом: для каждого набора $\beta_j\left(t, x_j^*\right) \in B_j\left(t, x_j^*\right), j = 0, \dots, l$ определяются результирующее ПРД $\hat{\beta}(t, \hat{x}^*)$, результирующий вектор $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T - t)$ и результирующее решение $\widehat{\mathrm{W}}(\hat{x}^*(t), T - t)$ также, как это сделано в определениях 2.3.1., 2.3.2, 2.3.3.

Теорема 4.3.1. *Пусть* $\widehat{W}(\hat{x}^*(t), T - t) \neq \emptyset$*, тогда решение* $\widehat{W}(x_0, T - t_0)$ *является сильно динамически устойчивым в игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$ *со случайным обновлением информации.*

В разделе 4.4 теоретические результаты апробируются на кооперативной игре добычи ограниченного ресурса трех лиц, демонстрируется свойство сильной динамической устойчивости выбранного решения. В качестве решения используется сильно динамически устойчивое ПРД-ядро, приведены результаты численного моделирования в среде Matlab.

В заключении приведены основные результаты работы.

Публикации по теме диссертации.

1. Петросян О. Л. Решение с информационной дискриминацией в кооперативных дифференциальных играх с бесконечной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского Государственного Университета — 2016. — Вып.4. — С. 18–30.

2. Петросян О. Л., Громова Е. В., Погожев С. В. О сильно динамически устойчивом подмножестве С-ядра в кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью // Математическая Теория Игр и ее Приложения.— 2016. — Т. 8. — Вып. 4. — С. 79–106.

3. Gromova E. V., Petrosian O. L. Control of information horizon for cooperative differential game of pollution control // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — 2016. DOI:10.1109/STAB.2016.7541187.

4. Petrosian O. L. Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games // International Game Theory Review. — 2016. — Vol. 18. — № 2. — P. 1–14.

5. Petrosian O. L., Barabanov A.E. Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games with Uncertain Stochastic Dynamics // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. — Vol. — 172. — № 1. — P. 328–347.