На правах рукописи

Мальковский Николай Владимирович

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В АДАПТИВНЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

01.01.09 —
Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Граничин Олег Николаевич
Официальные оппоненты:	ХЛЕБНИКОВ Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор РАН, ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук», заведующий лабораторией адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина
	УСИК Егор Владимирович, кандидат физико-математических наук, ЗАО Проектно-конструкторское бюро «РИО», ведущий инженер-программист
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Защита состоится "____" ________ 2017 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9 и на сайте `https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/h7ytZqrhBk.pdf`

Автореферат разослан "____" ________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Сетевые технологии начали развиваться более полувека назад, а в последние десятилетия эта сфера подверглась значительному расширению. Развитие Интернета и логистики, замедление скорости роста вычислительных мощностей – эти и другие факторы повлияли на увеличение интереса к распределенным вычислениям, сетевым технологиям и смежным областям. В свою очередь мультиагентные технологии стали популярными только в последние 10-20 лет, но при этом заняли свою нишу в области распределенных вычислений. Основным направлением этой работы является изучение свойств нескольких моделей задач распределения ресурсов в мультиагентных сетях с упором на сетевые потоковые задачи. Основное теоретическое направление – исследование стохастических потоковых процессов, практическое — распределение загрузки в вычислительных сетях и передача данных в группах мобильных роботов.

Все рассматриваемые в работе модели подразумевают отыскание некоторого оптимального по времени процесса (выполнение группы заданий за наименьшее время, передача набора сообщений в группе мобильных роботов за наименьшее время). В теории управления, основная масса работ по построению оптимальных динамических процессов основана на принципе динамического программирования и принципе максимума Понтрягина. В случае отсутствия неопределенностей и изменений параметров системы во времени, рассматриваемые задачи вырождаются в задачи математической оптимизации. В общем виде такие задачи рассматривались Канторовичем (общая теория линейного программирования), Хачияном (метод эллипсоидов), Поляком (общая теория выпуклой оптимизации), Кармаркаром (полиномиальный метод внутренней точки для задач линейного программирования), Нестеровым и Немировским (полиномиальные методы для задач нелинейной выпуклой оптимизации), Бойдом и Ванденберге (современная теория оптимизации) и многими другими.

Для диссертационной работы особую роль играют свойства задач потокового типа, большое значение имеет задача о максимальном потоке и задача о потоке минимальной стоимости (Форд и Фалкерсон), задача о параметрическом потоке (Галло, Григориадис и Тарьян). Эти задачи являются базовыми статическими потоковыми задачами. Во многих случаях изучение протекающих во времени потоковых процессов может быть сведено к рассмотрению стационарных потоковых задач.

Так, например, в работах Теодоровича и Вукадиновича, Холла, Кассета, Гасникова рассмотрены статические методы моделирования транспортных потоков, в работах Форда и Фалкерсона, Скутеллы рассмотрены динамические потоковые процессы, задачи нахождения оптимального процесса со статическими пропускными способностями и временами перехода сведены к статическим потоковым задачам. Несмотря на более полувека с момента появления, постановки этих задач, допускающие неопределенности некоторых характеристик, появились относительно недавно в работах Глокнера и Немхаузера, Хана, Пенга и Ванга, Шенга и Гао. При этом, на данный момент отсутствуют работы, изучающие потоковые задачи в условиях динамически изменяющихся параметров и внешних неконтролируемых возмущений.

Задачи, рассматриваемые в диссертационной работе, мотивированны изменчивостью и стохастической природой реальных физических процессов. Задачи математической оптимизации в условиях различного рода неопределенностей изучались в работах работах Роббинса и Монро (общий метод стохастической аппроксимации), Кифера и Вольфовица (метод конечных разностей), Калмана и Бьюси (фильтр Калмана-Бьюси), Винера и Колмогорова (фильтр Винера-Колмогорова), Граничина (решение оптимизационных задач с нестатистическими помехами), Кампи и Калафиоре (сценарный подход), Хлебникова, Поляка и Кунцевича. В работах Бенвенисте, Метивье и Приоро, Бодсона и Дугласа, Антал, Граничина и Леви изучаются адаптивные алгоритмы, в работах Парфенова и Терехова, Копетца, Мельникова и Мельниковой изучаются смежные вопросы о системах реального времени.

Следующие работы рассматривают схожие с поставленными в диссертационной работе прикладными задачами: в работах Тантави и Таусли, Кима и Камеды, Чогууна и Камеды рассматриваются алгоритмы оптимального статического балансирования загрузки для типовых сетей (звезда, кольцо и т.п.) с достаточно общими предположениями о пропускной способности сети. В работе Гросу и Хронопулоса рассматриваются игровые модели задачи распределения нагрузки. Стохастические постановки задач распределения ресурсов появились относительно недавно и были предложены в работах Амелиной, Амелиной и Фрадкова, Граничиным и Амелиной и др.

Большинство из перечисленных работ составляют общий математический фундамент задачи распределения ресурсов, лишь небольшая часть работ изучает особенности реализации математических методов в мультиагентных системах. Основной сложностью такой реализации является децентрализованность. Традиционная парадигма параллельных вычислений подразумевает наличие центрального узла, имеющего информацию о всем вычислительном процессе. В мультиагентных системах такие узлы обычно отсутствуют, что значительно упрощает построение системы и её масштабируемость, однако во многих случаях затрудняет вычислительный процесс. Один из общих вопросов, изучению которого направлена эта работа, – *возможна ли эффективная реализация классических методов оптимального распределения ресурсов в мультиагентных системах?* В работе получен положительный ответ для нескольких конкретных задач распределения ресурсов, основанных на решении потоковых задач оптимизации. Алгоритмы такого рода обычно называются *распределенными* или *мультиагентными* и широко используются на практике: в работах Бойда и др., Шаха, Кемпе и др. изучаются применение распределенных алгоритмов, называемых "сплетнями", в работах Маггса и др., Хе и др. изучаются алгоритмы синхронизации времени в распределенных сетях, в работах Манфреди, Жу и др. изучаются алгоритмы согласования показаний сенсорных сетей, в работах Олфати-сабера и Мюррея, Факса и Мюррея, Рена и др., Рикоса и др., Амелиной, Амелиной и Фрадкова, Парсегова, Полякова и Щербакова изучаются протоколы консенсуса и их приложения, в работах Каляева, Гайдука и Капустяна, Факса и Мюррея рассматриваются задачи коллективного взаимодействия групп мобильных роботов.

Как уже было отмечено, общее преимущество мультиагентного подхода заключается в простоте организации и масштабируемости системы. Детально особенности таких систем были изучены в работах Виттиха и Скобелева, Скобелева, Соллогуба, Иващенко и др., Ржевского, Городецкого, Городецкого, Грушинского и Хабалова.

Целью диссертационной работы является разработка и обоснование алгоритмов эффективного управления ресурсами в мультиагентных сетях в условиях неопределенностей и изменяющихся со временем параметров сети и окружающей среды. Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Исследовать возможность применения методов оптимизации динамических процессов потокового типа для эффективного распределения ресурсов в мультиагентных сетях.

2. Разработать и обосновать новые алгоритмы эффективного распределения ресурсов в мультиагентных сетях.

3. Исследовать работоспособность разработанных новых алгоритмов эффектив-

ного распределения ресурсов в мультиагентных сетях в условиях неопределенностей и изменяющихся со временем параметров сети и окружающей среды, разработать и обосновать соответствующие адаптивные модификации, исследовать возможности рандомизации для ускорения процесса решения задач.

4. Реализовать исследованные методы и провести их апробацию для решения задач распределения ресурсов в мультиагентных сетях в условиях неопределенностей и изменяющихся со временем параметров сети и окружающей среды.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы математической оптимизации, теории вероятностей и математической статистики, теории графов, теории динамических систем, имитационного моделирования, мультиагентных технологий.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Предложена формулировка класса задач мультиагентного распределения ресурсов в виде задачи нахождения оптимального динамического процесса потокового типа.

2. Разработаны два метода нахождения оптимального динамического потокового процесса: неадаптивный на основе решения статической потоковой задачи оптимизации и адаптивный на основе применения рандомизированной стохастической аппроксимации. Предложены способы мультиагентной реализации этих методов.

3. Доказана асимптотическая оптимальность первого разработанного метода в случае усредняемых пропускных способностей (теоремы 1 и 2) и получены оценки скорости сходимости для второго метода (теорема 3).

4. Разработана программная реализация предложенных методов.

Обоснованность полученных результатов обеспечивается математическими теоремами и экспериментальным сравнением методов, описанных в этой работе, с методами, применяемыми в схожих задачах.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Теоретическая ценность работы состоит в описании и решении общей задачи стохастического потокового процесса и постановку задач балансирования нагрузки в сети и сбора информации в группе мобильных роботов в виде задач нахождения оптимального потокового процесса. Предложены два метода построения оптимального процесса: метод на основе усредненной модели и адаптивный рандомизированный метод.

Аппробация работы. Материалы диссертации докладывались на семинарах кафедры системного программирования, кафедры теоретической кибернетики СПбГУ, на российских и международных конференциях по программированию, информатике, оптимизации и теории управления: всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, VI, VII, VIII традиционных всероссийских молодежных летних школах "Управление, информация и оптимизация" (2014, 2015, 2016), 1st Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON, 2015), 12th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP, 2016). По результатам работы была зарегистрирована программа для разработки и тестирования алгоритмов распределения загрузки вычислительной сети №2016661548 [10].

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в [1-9] из них две публикации в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых дожны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук [1,2], три публикации в периодических изданиях, входящих в базу SCOPUS [3, 4, 5]. Работы [3, 6, 9] написаны в соавторстве. В [3] автору принадлежит описание связи "сплетен", задачи консенсуса и *Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation* (*SPSA*) метода. В [6,9] автору принадлежит общее математическое описание задач распределения ресурсов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 105 источников. Текст занимает 103 страницы, содержит 12 рисунков и одну таблицу.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках этой диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, научная новизна и практическая значимость представляемой работы, ставятся задачи работы.

В **первой главе** приводятся общие сведения о потоковых задачах линейного программирования: задаче о максимальном потоке, задаче о параметрическом потоке; сформулирована общая задача оптимального потокового динамического процесса, подробно описаны используемые алгоритмы.

В пункте 1.1 представлена общая специфика потоковых процессов, описано, как эта специфика интерпретируется в различных практических ситуациях, перечислены основные математические модели и задачи, схожие с теми, которые рассматриваются в диссертационной работе. В пункте 1.1.1 описана общая задача нахождения оптимального процесса (задача быстродействия). Основная статическая задача, рассматриваемая в работе имеет вид

$$\begin{array}{ll} \text{минимизировать} & \tau, \\ \text{при условии} & \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{u}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^-;\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}^+, \\ \mathbf{x}(t) \in X, \\ \mathbf{u}(t) \in U, \end{cases} \end{array} \tag{1}$$

где X, U – некоторые выпуклые множества, B – линейный оператор (матрица). Эту задачу можно сформулировать словами следующим образом: за какое минимальное время можно перевести состояние системы из $\mathbf{x}^-$ в $\mathbf{x}^+$ под воздействием управления $B\mathbf{u}$ при этом оставаясь в множестве X? В кратком виде представлены принцип максимума и принцип динамического программирования, обычно применяемые для анализа и нахождения оптимальных процессов. Из нескольких простых соображений видно, что оба принципа не дают полезной информации о задаче, так как она имеет вырожденный вид. Вместо этого предлагается использовать более простое соображение: всегда можно искать оптимальный процесс в виде прямой траектории, т. е. с постоянным управлением $\mathbf{u}(t) \equiv \bar{\mathbf{u}}$, в результате чего (1) сводится к решению обычной задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \text{минимизировать} & \tau, \\ \text{при условии} & \begin{cases} \tau B\mathbf{u} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-, \\ \mathbf{u} \in U, \end{cases} \end{array} \tag{2}$$

или к решению эквивалентной ей задачи линейного программирования

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & \lambda, \\ \text{при условии} & \begin{cases} B\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-), \\ \mathbf{u} \in U. \end{cases} \end{array}$$

В пункте 1.1.2 описана специфика задач нахождения оптимальных потоковых процессов: Множество X является положительным ортантом ($X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$), множество U представляет ограничения на пропускные способности и имеет вид $U = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq u_i \leq c_i\}$, а B – матрица инцидентности графа, т.е. если $G = \langle V, E\rangle$, $|V| = n$, $|E| = m$, то B – матрица размера $n \times m$ такая, что

$$B_{ie} = \begin{cases} 1, & e \text{ выходит из } i, \\ -1, & e \text{ входит в } i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

С этими предположениями задача (1) переписывается в виде

$$\begin{array}{ll} \text{минимизировать} & \tau, \\ \text{при условии} & \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{u}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^-;\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}^+, \\ \mathbf{x}(t) \geq 0, \\ 0 \leq u_e(t) \leq c_e, \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

а задача (2) – в виде

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & \lambda, \\ \text{при условии} & \begin{cases} B\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-), \\ 0 \leq u_e \leq c_e. \end{cases} \end{array} \tag{4}$$

В пункте 1.2 подробно описаны задача о максимальном потоке, задача о параметрическом потоке и эффективные алгоритмы решения этих задач.

В пункте 1.3 описаны две практические задачи мультиагентного распределения ресурсов: распределение загрузки в мультиагентных системах и сбор информации в группах беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Сведение этих задач к (3) и (6) прямолинейно. Задача распределения загрузки ставится в следующем ви-

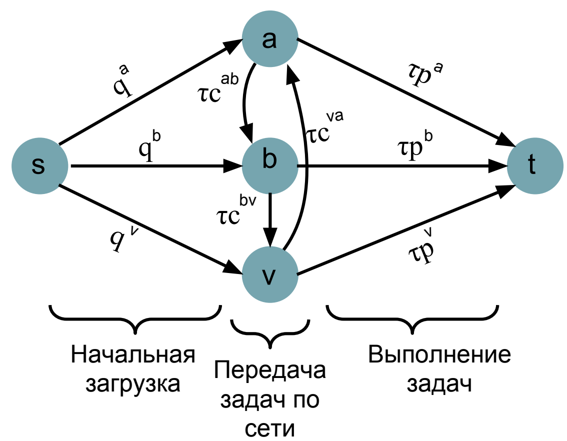

Рис. 1: Граф для задачи балансирования нагрузки

де: изначально в сети есть некоторый набор задач, который как-то распределен по узлам сети. За какое минимально время возможно выполнить все задачи (и как добиться этого времени)? В задаче предполагается только то, что заранее известны лишь средние значения сложности задачи (объем вычислений, необходимый для выполнение задачи) и её контекста (информация, необходимая для передачи задачи другому узлу сети). В этих предположениях можно считать, что все задачи одинаковы (в том смысле, что реальные значения указанных величин – это реализация одного и того же распределения), что позволяет трактовать "выполнение" задачи как передачу по каналу связи на некоторый фиктивный узел. В итоге задача распределения загрузки формулируется наподобие (3)

$$
\begin{aligned}
&\text{минимизировать} \quad \tau, \\
&\text{при условии} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{p}}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q};\ \mathbf{x}(\tau) = 0_n, \\ \mathbf{x}(t) \geq 0, \\ 0 \leq \tilde{p}_i(t) \leq p_i, \\ 0 \leq u_{ij}(t) \leq c_{ij}(t), \end{cases}
\end{aligned} \tag{5}
$$

где $\mathbf{q}$ – вектор начальной загрузки, $\tilde{p}_i(t)$ производительность узла i в момент времени t, p_i – максимальная производительность узла i. Сведение к (3) представляет собой несложную техническую работу. Граф, на котором нужно найти оптимальный потоковый процесс показан на рисунке 1. Задача о сборе информации в группе

БПЛА также ставится довольно просто: изначально в группе на каждом БПЛА хранится некоторая информация, необходимо за минимальное время собрать всю информацию на одном из них (или же на базовой станции). Эта задача также без особых усилий сводится к (6), основной динамической составляющей этой задачи является движение БПЛА в пространстве, из-за чего они могут передавать информацию только в определенные промежутки времени.

Во **второй главе** описаны два метода построения потоковых процессов. В пункте 2.1 описан общий метод усреднения: вместо сложной динамической задачи рассматривается простая статическая, после чего решение адаптируется под динамический случай. Сформулирована и доказана основная теорема об асимптотической эквивалентности исходной задачи и её “усредненного” варианта. Если предположить, что в задаче (6) множество U изменяется во времени, то задача становится на порядок сложнее, не получается свести задачу нахождения оптимального процесса к задаче математической оптимизации. Рассматривается обобщение задачи (3), учитывающее запаздывание и изменение параметров системы со временем:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать} \quad \tau, \\ &\text{при условии} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = B(\sigma)\mathbf{u}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^-;\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}^+, \\ \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}_n, \\ 0 \leq u_{ij}(t) \leq c_{ij}(t). \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

где $c_e \in L^1_{loc}([0;+\infty))$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T$, σ_i – запаздывание или время перехода по дуге i, $B(\sigma)$ обозначает следующий оператор:

$$[B(\sigma)\mathbf{u}]_i\,(t) = \sum_{e \in in(i)} u_e(t - \sigma_e) - \sum_{e \in out(i)} u_e(t). \tag{7}$$

В разделе 2.1.1 рассматривается класс следующий класс функций

О п р е д е л е н и е 1. *Локально интегрируемая по Лебегу функция $f \in L^1_{loc}([0;+\infty))$ называется усредняемой, если существует следующий предел*

$$avg(f) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f d\mu < +\infty.$$

Основная идея всей главы заключается в том, что если пропускные способности в сети изменяются во времени как усредняемые функции, то можно построить близкий к оптимальному процесс и показать его асимптотическую оптимальность. Доказаны две теоремы о задаче (6) с усредняемыми пропускными способностями. Обозначим через $\tau^*(\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+, \sigma, \mathbf{c})$ оптимальное время (6) с входными параметрами $\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+, \sigma, \mathbf{c}$.

Теорема 1. *Рассмотрим (6) с фиксированными усредняемыми неотрицательными функциями пропускных способностей $c_e(t)$ и некоторым неотрицательным вектором σ. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует $\overline{T(\epsilon)} > 0$ такое, что для любых $\mathbf{x}^-$, $\mathbf{x}^+$ выполняется*

$$\tau^*(\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+, \sigma, \mathbf{c}) \leq \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{n-1} \tau^*(\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+, \mathbf{0}_m, avg(\mathbf{c})) + \overline{T(\epsilon)}.$$

Теорема 2. *Рассмотрим (6) с фиксированными усредняемыми неотрицательными функциями пропускных способностей $c_e(t)$, некоторым неотрицательным вектором σ и последовательностями $\{\mathbf{x}_k^-\}_{k=1}^\infty$, $\{\mathbf{x}_k^+\}_{k=1}^\infty$, для которых выполняется*

$$\lim_{k\to\infty} \tau^*(\mathbf{x}_k^-, \mathbf{x}_k^+, \sigma, \mathbf{c}) = +\infty,$$

тогда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tau^*(\mathbf{x}_k^-, \mathbf{x}_k^+, \sigma, \mathbf{c})}{\tau^*(\mathbf{x}_k^-, \mathbf{x}_k^+, \mathbf{0}_m, avg(\mathbf{c}))} = 1.$$

Теорема 2.1 дает способ построение субоптимального процесса в динамическом случае. Теорема 2.2 показывает асимптотическую оптимальность процесса, построенного на основе теоремы 2.1. Результаты теорем 2.1 и 2.2 можно интерпретировать следующим образом: если теорема 1 выполняется и при $\epsilon = 0$, то это означает, что для любого начального состояния $\mathbf{x}^-$ и конечного состояния $\mathbf{x}^+$ можно построить процесс, отличающийся по времени от оптимального на некоторую независимую от $\mathbf{x}^-$ и $\mathbf{x}^+$ константу $\overline{T(0)}$. Чем больше разница между $\mathbf{x}^-$ и $\mathbf{x}^+$, тем меньше эта задержка $\overline{T(0)}$ влияет на общее время работы системы. Предположение о том, что теорема 1 выполняется при $\epsilon = 0$ не верно в общем случае для усредняемых функций, однако для теоремы 2 этого и не нужно.

В пункте 2.1.3 приведен пример построения оценок задержки для случайных процессов.

В разделе 2.2 описаны разработанные адаптивные мультиагентные алгоритмы решения задачи о максимальном потоке. На основе этих методов строится адаптивный метод решения (6). Основная идея этих методов состоит в том, что задача о максимальном потоке сводится к следующей задаче (подробнее в пункте 2.2.5)

$$\begin{array}{ll} \text{минимизировать} & f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T B'^T B'\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B'^T \mathbf{b}, \\ \text{при условии} & 0 \le x_e \le c_e, \quad e \in E', \end{array} \tag{8}$$

где E' – множество дуг, не инцидентных вершинам истока и стока s, t, B' – матрица инцидентности графа $G' = \langle V, E' \rangle$, вектор $\mathbf{b} = B\mathbf{c}''$, где $\mathbf{c}''$ – пропускные способности, относящиеся только к дугам, инцидентным s или t. Для этой задачи строится два адаптивных мультиагентный алгоритма: на основе проективного градиентного спуска и рандомизированной версии стохастической аппроксимации. Рандомизированный алгоритм оказывается лучше за счет более простой реализации и устойчивости к помехам в наблюдении. Алгоритм на каждом шаге производит измерения пропускных способностей, на основании которых строится улучшенная оценка решения задачи (8). В статическом случае пропускные способности не изменяются, а значит не меняется вектор $\mathbf{b}$, в этом случае алгоритм получает последовательность оценок, экспоненциально сходящихся к решению (8). В динамическом случае вектор $\mathbf{b}$ и вместе с ним функция f изменяются, алгоритм адаптируется к этим изменениям, но при этом сходится только в некоторую окрестность решения (8). Если обозначить $f_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T B'^T B'\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B'^T \mathbf{b}^k$, Δ_k – рандомизированное пробное возмущение на итерации k, определяемое по правилу

$$\Delta_k = \pm e_m^i \quad \text{с. в. } \frac{p_i}{2}, \tag{9}$$

где e_m^i – m-мерный i-ый орт. Далее, $A^k = \Delta_k \Delta_k^T B'^T B'$, $A = EA^i$, $\mathbf{w}^{ik} = e_m^i e_m^{iT} B'^T \mathbf{b}^k$, $\mathbf{w}^k = E\mathbf{w}^{ik}$, $y_k^+ = f_k(\mathbf{x}^k + \alpha\Delta_k) + \xi_{2k}$ и $y_k^- = f_k(\mathbf{x}^k - \alpha\Delta_k) + \xi_{2k+1}$ – зашумленные измерения на итерации k, при этом ξ_{2k}, ξ_{2k+1} – погрешности, возникающие при измерении $\mathbf{b}^k$ (который в свою очередь зависит от пропускных способностей), ξ_k – случайная величина, распределение которой неизвесто, $Q_k = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid 0 \le x_e \le c_e^k\}$. В этих обозначениях *RandomizedArcBalancing* генерирует последовательность оценок по правилу

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_{Q_k}\left(\mathbf{x}^k - \Delta_k \frac{y_k^+ - y_k^-}{4\alpha}\right). \tag{10}$$

Основной результат о сходимости алгоритма сформулирован в следующей теореме:

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\mathbf{x}^k$ *– последовательность, генерируемая по правилу* (10) *с* *любым начальным приближением* $\mathbf{x}^0 \in Q_0$, $E\xi_k^2 \le \sigma^2$, *выбор* Δ_k *не зависит от* ξ_{2k} *и* ξ_{2k+1}, *множество* $\cup_k Q_k$ *ограничено и* $\gamma = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{Q},k} ||A\mathbf{x}+\mathbf{w}^k||$, $||\mathbf{c}^k - \mathbf{c}^{k+1}|| \le \beta$, $\lambda_2(A)$ *– минимальное отличное от нуля собственное число матрицы* A, $q = \left(1 - \frac{\lambda_2(A)}{2}\right)$, $\alpha > 0$, $\nu = \beta(1 + \frac{||B'^T B''||}{\lambda_2(B'^T B')})$, $R = \nu + \frac{\sigma}{2\sqrt{\alpha}}$, *тогда*

1. *Если* $\mathbf{x}^{*k}$ *– любая точка минимума* f_k *на* Q_k, *то*

$$E\,\mathrm{dist}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{*k}, \Omega) \le q^{k/2}(||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{*0}|| - R) + R.$$

2. *Если* $\mathbf{x}^{*k}$ *– любая точка минимума* f_k *на* Q_k, *то*

$$E\{f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{*k})\} \le \gamma(q^{k/2}(||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{*0}|| - R) + R).$$

3. *Если помехи в измерениях отсутствуют, а пропускные способности не изменяются (т.е.* $R = 0$, $Q_k = Q_{k+1}$, $f_k \equiv f_{k+1}$*) и* $\mathbf{x}^k$ *сходится к* $\mathbf{x}^*$, *то*

$$E||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*|| \le \frac{q^{k/4}}{1 - \sqrt[4]{q}} \sqrt{\gamma ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*||}$$

В разделе 2.2.6 описаны реализации методов в мультиагентных системах.

В **третьей главе** описаны результаты экспериментов, проведенных для разработанных алгоритмов.

В разделе 3.1 приведено описание пакета прикладных программ, разработанного для симуляции процесса распределения загрузки в сети [10]. Пакет содержит следующие основные компоненты

- Симулятор мультиагентной (распределенной) вычислительной сети.
- Эффективная реализация решения задачи о параметрическом потоке и основанный на ней протокол распределения загрузки в сети.
- Реализация адаптивных протоколов распределения загрузки.
- Реализация протокола распределения загрузки на основе протокола локального голосования.

Особенности реализации решения задачи о параметрическом потоке и её сравнение с библиотекой paraF (`https://www.microsoft.com/en-us/download/details.`

`aspx?id=52400`) описаны в разделе 3.2. По результатам экспериментального сравнения было выявлено, что собственная реализация по эффективности не уступает этой библиотеке, более того удалось немного улучшить библиотеку paraF, в результате чего эффективность исходного алгоритма на всех тестах уступала либо модифицированной версии, либо собственной реализации.

В разделе 3.3 приведены результаты симулирования процессов распределения загрузки с использованием разработанных методов и метода, основанного на протоколе локального голосования. Приводятся результаты экспериментов на двух топологиях сети: кольцо со случайными связями и звезда. В результате экспериментов можно заключить, что балансирование загрузки, основанное на адаптивном рандомизированном алгоритме, обладает положительными качествами протоколов балансирования загрузки, основанных на усреднении (время работы системы близко к оптимальному) и протоколе локального голосования (адаптивность и простая мультиагентная реализация).

В **заключении** диссертации подведены итоги проведенного и завершенного в рамках поставленных задач исследования.

Публикации автора по теме диссертации

В журналах из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, сформированный Минобрнауки России

[1] ***Мальковский Н. В.*** **Актуальность задачи максимального потока в применении к современным вычислительным сетям** // Компьютерные инструменты в образовании. – 2014. – № 4. – С. 3-9.

[2] ***Мальковский Н. В.*** **Рандомизированный распределенный адаптивный алгоритм решения задачи о максимальном потоке** // Компьютерные инструменты образования. – 2016. – № 5. – С. 46-61.

В изданиях, индексируемых в реферативных базах Scopus и Web Of Science

[3] ***Amelina N., Erofeeva V., Granichin O., Malkovskii N.*** **Simultaneous perturbation stochastic approximation in decentralized load balancing problem** // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Vol. 48, № 11, P. 936-941.

[4] ***Malkovskii N.*** **Asymptotically Optimal Solution for Transportation Problem with Almost Arbitrary Capacities** // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 48. – № 11. – P. 936-941.

[5] ***Malkovskii N.*** **Optimal static network load balancing using parametric flow approach** // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Vol. 48. – № 11, P. 668-673.

В других изданиях

[6] *Граничин О. Н., Мальковский Н. В.* Задача распределения ресурсов в контексте мультиагентных систем // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2013. – Т. 9. – № 2. – С. 41-53.

[7] *Мальковский Н. В.* О числе Фидлера и асимптотической скорости сходимости лапласиановых систем // Стохастическая оптимизация в информатике – 2015. – Т. 11. – № 2. – С. 30-35.

[8] *Мальковский Н. В.* Модель балансировки загрузки в вычислительной сети с использованием задачи параметрического потока // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2014. – Т. 10. – № 1. – С. 39-62.

[9] *Амелин К. С., Граничин О. Н., Мальковский Н. В.* Распределение ресурсов в контексте мультиагентных систем // Сборник трудов 12 всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. – 2014. – С. 9003-9013.

[10] Система моделирования потоквых процессов в вычислительной сети [Электронный ресурс], URL: https://github.com/Malkovsky/load-balancing