САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Лещенко Настасья Ивановна

Численное обращение интегрального преобразования Лапласа функций специального вида

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор РЯБОВ Виктор Михайлович

Официальные оппоненты: ШИЧКИНА Юлия Александровна, доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), профессор кафедры вычислительной техники

КАБАРДОВ Муаед Мусович, кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, доцент кафедры высшей математики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»

Защита состоится «___» ___________ 2017 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199004, Санкт-Петербург, 10-я линия, д. 33, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте: https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/9jbFcNv4H7.pdf

Автореферат разослан «___» ___________ 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Чурин Ю.В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы состоит в том, что интегральные преобразования, такие как преобразования Лапласа, Фурье, Абеля, Меллина и другие, помогают значительно упростить решение различных дифференциальных и интегральных уравнений, возникающих в прикладных задачах разных областей математики, математической физики, радиотехники, механики. Теоретические основы операционного исчисления содержатся в классических работах В. А. Диткина и А. П. Прудникова, D. V. Widder, Г. Дёч, М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата. Вопросам приложения операционного исчисления к решению прикладных задач, среди прочих, посвящены фундаментальные труды М. И. Конторовича, А. И. Лурье, Л. И. Слепяна и Ю. С. Яковлева.

Сложность в применении интегрального преобразования Лапласа заключается в том, что на последнем этапе возникает задача нахождения функции–оригинала по её изображению, которую, как правило, не удается решить аналитически, и потому необходима разработка и применение приближённых (численных) методов обращения.

Не существует универсального метода обращения, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$. Любой конкретный метод обращения должен учитывать специфику поведения изображения (или функции–оригинала), что прежде всего находит отражение в выборе подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых могут быть хорошо приближены заданные образы и оригиналы. Выбор метода обращения существенно зависит от способа задания информации об изображении искомого оригинала. Перечислим типичные ситуации:

1) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой фиксированной точке, отличной от бесконечности;

2) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки;

3) известны значения изображения $F(p)$ на вещественной полуоси $p \geq 0$;

4) известны значения изображения $F(p)$ во всей полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$.

Выбор подходящих методов обращения для указанных ситуаций, их описание либо отсылка к соответствующей литературе рассмотрены в работе [10].

Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в книге [1], в другой работе тех же авторов приведены необходимые формулы и численные таблицы для применения методов обращения преобразования Лапласа. Обзор других способов обращения приведен в статье [10]. В современных исследованиях можно выделить работы F. Mainardi, в которых показано, что дифференциальные интегралы Римана–Лиувилля удобно использовать для описания динамических свойств линейных вязкоупругих материалов, включая задачи распространения волн и диффузии.

Целью данной диссертационной работы является разработка и исследование приближенных методов обращения преобразования Лапласа к изображениям функций специального вида (типа дробно–экспоненциальных функций и их обобщений).

Задачи, которые решались в диссертационной работе:

1. Исследовать различные методы обращения преобразования Лапласа и разработать алгоритмы по применению методов обращения к вычислению функций специального вида.

2. Исследовать свойства ядер, которые могут быть выбраны в качестве ядер ползучести и релаксации в соотношении Больцмана–Вольтерра; изучить их свойства и рассмотреть их обобщение.

3. Исследовать методы обращения преобразования Лапласа в предположении, что заданное изображение $F(p)$ искомой функции–оригинала фактически зависит от $1/p^a$, где a — произвольное положительное число из интервала $(0, 1)$; получить формулы обращения, обладающие большей точностью по сравнению с известными для определенного класса изображений и имеющие большое прикладное значение.

4. Реализовать методы, рассматриваемые в работе, в виде программ с использованием математического пакета Maple.

5. Проанализировать результаты работы программ и на основании их дать рекомендации по использованию методов обращения преобразования Лапласа применительно к функциям специального вида.

Методы исследования: применяются результаты комплексного анализа, теории приближений, необходимые разделы методов вычислений, теория и практика параллельных алгоритмов и способы их реализации с целью получения конечного программного продукта.

Научная новизна исследования состоит в том, что разработаны новые методы обращения преобразования Лапласа функций специального вида и дан сравнительный анализ применения этих методов. Определены условия применимости методов, рассматриваемых в работе. Представлены явные алгоритмы, которые могут быть использованы для обращения преобразования Лапласа дробно–экспоненциальных функций и их обобщений.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что результаты, полученные в данной работе, позволяют упростить, в частности, решение задач линейной вязкоупругости. Предлагаемые методы обращения преобразования Лапласа представляют практический интерес, поскольку реализованы ввиде алгоритмов, которые могут быть использованы для нахождения напряжения ($\sigma(x,t)$) и деформации ($\varepsilon(x,t)$) вязкоупругих материалов.

Публикация результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [8, 9, 10, 13], а также представлены в виде докладов конференций [11, 12]. Из них работы [8-10] опубликованы в журналах, индексируемых в реферативной базе Scopus.

В работе [8] автору принадлежит реализация аддитивного метода выделения особенности и построение квадратурных формул наивысшей степени точности для функций, зависящих от дробных степеней аргумента. Соавтору принадлежит идея применения упомянутых методов.

В работе [9] соавтором предложена идея использовать деформацию контура интегрирования для вычисления интеграла Римана–Меллина. Автором рассмотрены два контура — параболический и гиперболический, сводящие исходную задачу к вычислению интеграла по вещественной оси от некоторой функции, зависящей от выбора контура интегрирования. Для них установлены асимптотические скорости сходимости, рассмотрен конкретный случай обращения и выбор контура интегрирования.

В работе [10] автором построены вещественные квадратурные формулы обращения, в качестве узлов которых берутся корни многочленов Лагерра. Указан способ построения предложенных квадратурных формул (КФ). Соавтору принадлежит идея построения упомянутых КФ. Совместные результаты работы

[10] использованы в книге соавтора В.М. Рябова.

В работе [13] соавтором была предложена идея для вычисления дробно–экспоненциальной функции и интеграла от неё, используя изображения по Лапласу этих функций. Автором реализована идея вычисления рассматриваемых функций с помощью деформации контура интегрирования в формуле обращения Римана–Меллина, приводящая к вещественным интегралам по полуоси. Для вычислений полученных в работе интегралов строятся специальные вещественные квадратурные формулы наивысшей степени точности. Также в статье [13] указаны обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ), точные для дробных степеней аргумента функции изображения и построены асимптотические формулы для дробно–экспоненциальной функции и интеграла от неё для больших значений аргумента.

Апробация результатов. Автором сделаны два доклада по теме диссертации на всероссийских научных конференциях по проблемам информатики "СПИСОК–2012" и "СПИСОК–2013" (Санкт-Петербург, 2012 и 2013), а также доклады на семинарах кафедры вычислительной математики математико-механического факультета СПбГУ (Санкт-Петербург, 2016).

Положения, выносимые на защиту:

1. Применение известных приближенных методов обращения к обращению изображений специального вида.

2. Сравнительные характеристики известных методов.

3. Разработка новых специальных методов обращения.

4. Программная реализация методов обращения.

5. Решение конкретных прикладных задач линейной вязкоупругости.

6. Практические рекомендации по выбору метода обращения в зависимости от свойств образа.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объём диссертации составляет 104 страницы. В тексте работы содержится 24 таблицы и 2 рисунка. Библиография работы состоит из 63 наименований. В приложении приведены 9 листингов программ.

Основное содержание

В **первой главе** приведён обзор методов обращения преобразования Лапласа — обращение преобразования Лапласа сведением к системе линейных уравнений, квадратурные формулы наивысшей степени точности, обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности, метод Виддера, метод деформирования контура интегрирования в интеграле Римана–Меллина.

Преобразование Лапласа для функции–оригинала $f(t)$

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

сходится в некоторой полуплоскости $\Re p > \gamma_0$, $F(p)$ будет регулярной функцией и для оригинала $f(t)$ верна формула обращения Римана–Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt}\, dp, \quad c > \gamma_0. \tag{1}$$

Заметим, что интеграл (1) понимается в смысле главного значения, он не зависит от c и в случае разрыва оригинала в точке t мы получаем полусумму предельных значений оригинала слева и справа от точки t.

Положим $p = c + i\tau$, тогда $\exp(pt) = \exp(ct)\exp(i\tau t)$. При фиксированном t первый сомножитель постоянен, а второй пробегает единичную окружность на комплексной плоскости бесконечное число раз. С ростом t первый сомножитель и скорость пробегания окружности вторым сомножителем неограниченно возрастают, поэтому попытка приблизить интеграл римановыми суммами вряд ли приведет к цели.

Будем считать, не умаляя общности, что функция $F(p)$ регулярная в полуплоскости $\Re p > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi_s(p) = p^s F(p),\ s > 0$. Предположим, что она регулярна в полуплоскости $\Re p > 0$ и имеет конечное предельное значение при $p \to \infty$. Запишем интеграл (1) иначе:

$$I_{s,t} = \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s(p/t) dp.$$

Для его вычисления строится квадратурная формула наивысшей степени точности (КФНСТ) следующего вида:

$$I_{s,t} \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_s(p_k/t). \tag{2}$$

Коэффициенты A_k и узлы p_k выбираются так, чтобы формула (2) была точной для любого многочлена φ_s степени $2n-1$ от переменной $1/p$. В работе [1] показано, что узлы квадратурной формулы являются корнями многочлена

$$P_n^s(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k x^k, \, (a)_k = \begin{cases} 1, & k=0; \\ a(a+1)\cdots(a+k-1), & k \geqslant 1. \end{cases}$$

Корни многочлена $P_n^s(x)$ попарно различны и лежат в полуплоскости $\Re x > 0$. Коэффициенты КФНСТ можно вычислить по формуле

$$A_{kn} = \frac{(-1)^{n+1} n! \, (2n+s-2)^2}{n^2 \, \Gamma(n+s-1) p_{kn}^2 \left(P_{n-1}^s(1/p_{kn})\right)^2}.$$

Устойчивость формулы (2) по отношению к ошибкам вычисления функции $\varphi_s(p)$ определяется суммой модулей коэффициентов КФНСТ $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |A_k|$; доказано неравенство $M_n \leqslant C n^{1-s} 3.764^n$, где C — постоянная величина, не зависящая от n. Как видно из приведённой выше формулы, сумма модулей коэффициентов КФНСТ быстро возрастает при увеличении числа узлов n, т. е. с ростом n возрастает ошибка в приближенных решениях. Поэтому увеличение количества узлов в КФНСТ не всегда является оправданным, следует брать меньшее число узлов с тем, чтобы характеристика неустойчивости не превзошла теоретическую оценку погрешности КФНСТ.

В случае если ошибки в вычислениях изображения по Лапласу сведены к минимальным, увеличение числа узлов в КФНСТ будет приводить к хорошим результатам. Однако, при увеличении числа узлов описанный способ построения КФНСТ неэффективен и трудоёмок.

Узлы КФНСТ удовлетворяют неравенству $n+s-1 \leqslant |p_{kn}| < 2n+s-2/3$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и расположены в правом полукольце. Положим $z_{kn} = -(2n+s-2)/p_{kn}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Эти числа равномерно ограничены при всех значениях n. В работе [2] показано, что при $n \to \infty$ точки z_{kn} стремятся к точкам кривой $\gamma = \{z : |\Omega(z)| = 1,\ \Re z < 0\}$, где

$$\Omega(z) = \exp\left(\sqrt{1+z^{-2}}\right) \Big/ \left[z\left(1+\sqrt{1+z^{-2}}\right)\right].$$

Предлагается следующий алгоритм нахождения узлов КФНСТ при больших значениях n:

1) для некоторого угла α из интервала $(\pi/2, 3\pi/2)$ находим точку $z_0 \in \gamma$ такую, что $\arg(z_0) = \alpha$;

2) полагаем $x_0^\alpha = -z_0$ и используем метод Ньютона для нахождения корня уравнения $P_n^s(x) = 0$:

$$x_{m+1}^\alpha = x_m^\alpha - \frac{P_n^s(x_m^\alpha)}{P_n^{s'}(x_m^\alpha)},\ m = 0, 1, \ldots$$

3) пусть $x^\alpha = \lim\limits_{m\to\infty} x_m^\alpha$, тогда искомый узел КФНСТ равен $(2n+s-2)x^\alpha$; соответствующий ему коэффициент КФНСТ вычисляем по указанной выше формуле;

4) остальные узлы КФНСТ находятся аналогично, перебирая значения угла α из интервала $(\pi/2, 3\pi/2)$ с достаточно малым шагом, зависящим от n.

Также в первой главе рассмотрены ОКФНСТ, которые являются обобщением КФНСТ и точны для отрицательных степеней p^a. В работе приведён алгоритм их построения, который был реализован в математическом пакете Maple.

Наряду со специальными методами обращения в первой главе рассмотрен метод, основанный на одной теореме из книги [3]. В ней утверждается, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x_n^{n+1} F^{(n)}(x_n) = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)],$$

где $x_n = (n+\theta_n)/t$, $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$.

Введем операторы Виддера W_n:

$$W_n(f,t) = (-1)^n \frac{n^{n+1}}{n!\, t^{n+1}} F^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = t$, то при $n \to \infty$ приближение $W_n(f,t)$ сходится к $f(t)$. Однако скорость сходимости будет зависеть от степени гладкости функции, а метод Виддера быстро насыщаем, поэтому в работе рассматривается алгоритм нахождения значений функции–оригинала, используя ускорение сходимости метода Виддера.

Для этого строятся линейные комбинации операторов Виддера

$$W(n,k,f,t) = \sum_{j=1}^{k} c_{jk} W_{n_j}(f,t).$$

В работе [4] показано, что коэффициенты c_{jk} можно выбрать так, что для достаточно гладких оригиналов при $n \to \infty$ имеет место равенство

$$n^k (W(n,k,f,t) - f(t)) = \sum_{m=k}^{2k} M_m t^m f^{(m)}(t) + o(1),$$

где M_m — константы, не зависящие от t и f.

В работе приведен алгоритм построения линейных комбинаций операторов Виддера, даны оценки погрешности и приведены результаты численных экспериментов применительно к вычислению дробно–экспоненциальных функций.

Метод деформирования контура, рассматриваемый в первой главе, заключается в том, что в интеграле Римана–Меллина делается замена линии интегрирования эквивалентным контуром $L = \{z \mid z = l(u),\ u \in (-\infty, +\infty)\}$, который начинается и заканчивается в левой полуплоскости так, что $\Re(z) \to -\infty$ на обоих его концах. Такая замена возможна при выполнении условий:

1) внутри контура L содержатся все особенности изображения $F(z)$;

2) $|F(z)| \to 0$ равномерно в полуплоскости $\Re(z) \leqslant \gamma_0$ при $|z| \to \infty$. Далее всюду предполагается, что эти условия выполняются.

В результате замены контура интегрирования формула обращения Римана–

Меллина перепишется в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(u)\,du, \quad G_t(u) = \frac{1}{2\pi i} e^{tl(u)} l'(u) F(l(u)). \tag{3}$$

Подынтегральная функция не имеет особенностей как на линии интегрирования, так и в некоторой “полосе”, содержащей внутри себя линию интегрирования. Для вычисления интеграла (3) воспользуемся формулой трапеций с бесконечным числом узлов (см. [5]). В работе предложены оценки погрешности применения формулы трапеций и рассмотрены два контура интегрирования:

1) параболический контур $z(u) = \mu(1-u^2) + 2i\mu u,$ где $\mu > 0$;

2) кусочно–прямолинейный контур, состоящий из трёх участков. Обозначим их L_1, L_2, L_3. На участке L_2 параметр z для обоих контуров изменяется по закону $z = xbi,\ x \in [-1, 1],\ b > 0$. На участке L_1 имеем $z = x - bi,\ x \in (-\infty, 0]$, а на участке L_3 $z = -x + bi,\ x \in [0, \infty)$.

Для параболического контура указана скорость убывания погрешности в зависимости от ширины полосы регулярности и числа узлов квадратуры, а для второго контура приведены более детальные оценки погрешности на участках L_1, L_2, L_3.

В работе приведены результаты применения метода деформирования контура в случае обращения изображения дробно–экспоненциальной функции. Заметим, что подбор параметров контуров зависит от значения аргумента вычисляемой функции.

Во **второй главе** в качестве основной модельной задачи рассматривается задача линейной вязкоупругости, в которой отыскиваются напряжение и деформация вязкоупругого тела. Также рассмотрена задача о распространении полубесконечного импульса нагрузки в полубесконечном вязкоупругом стержне:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} &= \rho\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad x, t > 0,\\
u(x,0) &= \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad x \geqslant 0,\\
\sigma(0,t) &= \sigma_0 \eta(t), \quad t \geqslant 0,
\end{aligned}$$

где $u(x,t)$ — абсолютное перемещение ($\varepsilon(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$), ρ — линейная плотность материала стержня, $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда, возникающая из условия, что к концу одномерного вязкоупругого стержня в момент времени $t = 0$ прилагается нагрузка $P(t) = \sigma_0 \eta(t)$.

В качестве ядра релаксации возьмём ядро Ржаницына

$$R(t) = \frac{a^\beta}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \exp(-at), \quad a > 0, \;\; 0 < \beta < 1.$$

Заметим, что при $\beta = 1$ ядро Ржаницына переходит в экспоненциальное ядро.

Показано, как исходная задача о распространении полубесконечного импульса нагрузки в полубесконечном вязкоупругом стержне сводится к задаче в образах по Лапласу. Исследована возможность применения КФНСТ для нахождения функции–оригинала напряжения по её образу.

Приведены различные ядра ползучести, их свойства и применение. Слабосингулярные ядра ползучести должны удовлетворять условиям:

1) $K(0) = \infty$;

2) $\int\limits_0^t K(\tau)\, d\tau < \infty$, $t > 0$.

Рассмотрено ядро Абеля:

$$K(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \;\; -1 < \alpha \leqslant 0,$$

которое имеет интегрируемую особенность в нуле, но оно не удовлетворяет условию конечности интеграла на бесконечности.

Введём другой класс ядер, которые обладают необходимыми свойствами — класс резольвентных ядер, порождаемых ядром Абеля. Таковыми являются $Э_\alpha(\beta, t)$ — дробно–экспоненциальные функции, введённые Ю. Н. Работновым:

$$Э_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^k}{\Gamma((1+\alpha)(1+k))}, \qquad -1 < \alpha \leqslant 0.$$

Они удовлетворяет обоим свойствам — имеют интегрируемую особенность в нуле и удовлетворяют ограничению $\int\limits_0^t K(\tau)\, d\tau < \infty$ при $\beta < 0$.

Приведены и другие ядра ползучести, их свойства и применение.

В **третьей главе** предлагаются методы обращения преобразования Лапласа с точки зрения применимости к случаю длительно меняющихся во времени процессов, которые описываются функциями, зависящими от t^a или хорошо приближаемыми функциями, зависящими от t^a. Таковыми являются дробно–экспоненциальные функции Ю. Н. Работнова. Их изображения зависят от $1/p^a$.

Рассмотрен метод деформирования контура, основанный на лемме из работы [6], с помощью которого задачи вычисления дробно-экспоненциальной функции и интеграла от нее сводятся к вычислению интегралов

$$x^{a-1}\frac{\sin \pi a}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^a e^{-z}\,dz}{z^{2a}+2z^a x^a\cos\pi a + x^{2a}},$$

$$x^{a}\frac{\sin \pi a}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^{a-1} e^{-z}\,dz}{z^{2a}+2z^a x^a\cos\pi a + x^{2a}}.$$

Для их вычисления строятся специальные КФНСТ с вещественными узлами и коэффициентами.

Также построена одна вещественная КФНСТ обращения преобразования Лапласа, использующая значения изображения в вещественных точках.

Далее рассматривается аддитивный метод выделения особенности при вычислении дробно–экспоненциальной функции, для чего изображение функции $Э_\alpha(-1,t)$ представим в виде ряда

$$\frac{1}{p^a+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}=\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}+\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}, \tag{4}$$

где $k_0\in\mathbb{N}$. Второе слагаемое в этой сумме представимо в виде

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}=(-1)^{k_0}\frac{1}{(p^a+1)p^{ak_0}}.$$

Соответствующий ему оригинал вычисляется по ОКФНСТ для $s=ak_0$ и приближенно равен $t^{ak_0-1}\sum_{k=1}^{n}A_k\varphi(p_k/t)$, где $\varphi(p)=(-1)^{k_0}/(p^a+1)$. Первому слагаемому в (4) соответствует оригинал

$$\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{(-1)^k\cdot t^{ak+a-1}}{\Gamma(ak+a)}.$$

Это слагаемое содержит главные члены разложения искомого оригинала при малых t. Их число определяется выбором значения параметра k_0.

Также в третьей главе показано, что для больших значений аргумента целесообразно использовать метод, который основан на теореме из работы [7], в которой доказано, что функция–оригинал преставима в виде асимптотического ряда:

$$f(t) \approx \sum_{p_0} e^{p_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(p_0)}{\Gamma(-\lambda_\nu)} t^{-\lambda_\nu - 1},$$

где $\sum_{p_0}$ означает суммирование по всем особым точкам p_0.

Заметим, что если λ_ν — целое неотрицательное число, то $1/\Gamma(-\lambda_\nu) = 0$.

Применив эту теорему к изображениям дробно–экспоненциальной функции и интеграла от нее, для больших значений аргумента x получим выражения

$$F_1(\alpha, x) = \frac{1}{t^\alpha} Э_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{-n-1}}{\Gamma(-an)},$$

$$F_2(\alpha, x) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \int\limits_0^t Э_\alpha(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-n}}{\Gamma(1 - a - an)},$$

где $x = t^a$.

Аналогичные асимптотические разложения получены для ядер Гаврильяка-Негами и им подобных, являющихся обобщением ядер Работнова.

Также в третьей главе приводится анализ и сравнение значений, полученных с помощью этих методов, с табличными значениями, даны результаты численных экспериментов.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложении** представлены тексты программ для вычислений значений дробно–экспоненциальной функции и функции ползучести с использованием методов, предлагаемых в данной работе.

Список литературы

1. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения пробразования Лапласа. М., 1974. 224 с.

2. *Bruin M. G., Saff E. B., Varga R. S.* On the zeros of generalised Bessel polynomials. I, II // Indagat. math. 1981. Vol. 43. No 1. P. 1–25.

3. *Widder D. V.* The Laplace transform. Princeton, 1946. 406 p.

4. *May C. P.* Saturation and inverse theorems for combinations of a class of exponential-type operators // Canad. J. Math. 1976. Vol. 28. No 6. P. 1224–1250.

5. *Самокиш Б. А.* Замечание о вычислении определенных интегралов // Методы вычислений. Вып. 2. Л., 1963. С. 45–49.

6. *Bobylev A. V., Cercignani C.* The inverse Laplace transform of some analytic functions with an application to the eternal solutions of the Boltzmann equation // Applied Mathematics Letters. 2002. Vol. 15. P. 807–813.

7. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961. 524 с.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК:

8. ***Порошина Н. И., Рябов В. М.*** **Об обращении преобразования Лапласа некоторых специальных функций // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2009. Вып. 3. С. 50–60.**

9. ***Порошина Н. И., Рябов В. М.*** **О вычислении интеграла Римана–Меллина // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2009. Вып. 4. С. 55–61.**

10. ***Порошина Н. И., Рябов В. М.*** **О методах обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2011. Вып. 3. С. 55–64.**

Другие публикации:

11. *Лещенко Н. И.* О распараллеливании решения интегральных уравнений линейной вязкоупругости // “СПИСОК-2013: Материалы всероссийской научной конференции по проблемам информатики. 23-26 апр. 2013 г.”, СПб.: изд-во ВВМ. 2013. С. 318-325.

12. *Порошина Н. И.* Специальный квадратурные формулы обращения интегрального преобразования Лапласа // “СПИСОК-2012: Материалы всероссийской научной конференции по проблемам информатики. 25-27 апр. 2012 г.”, СПб.: изд-во ВВМ. 2012. С. 259-266.

13. *Рябов В. М, Порошина Н. И.* О вычислении дробно-экспоненциальной функции и интеграла от нее // Методы вычислений. Вып. 22. СПб. 2008. Изд-во СПбГУ. С. 132-146.

Подписано в печать 28.03.2017. Формат 60 × 84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,00. Тираж 100 экз. Заказ № .

Отпечатано в издательстве ВВМ.
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.