На правах рукописи

Громова Екатерина Викторовна

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Петросян Леон Аганесович
Официальные оппоненты:	Жуковский Владислав Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, профессор кафедры оптимального управления
	Клейменов Анатолий Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, ведущий научный сотрудник
	Петров Николай Никандрович, доктор физико-математических наук, профессор, Удмуртский государственный университет, директор Института математики, информационных технологий и физики
Ведущая организация:	Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Защита состоится «____» ____________ 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199304, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/tzbWk522Tj.pdf.

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Основными задачами современной теории игр являются конструирование и анализ принципов оптимального поведения участников в различных задачах конфликтного управления. Реально происходящие конфликты развиваются во времени, поэтому особую актуальность приобретают динамические модели. Дифференциальные игры являются удобными математическими моделями для описания конфликтно- управляемых процессов, происходящих в экономике, экологии, менеджменте и других сферах человеческой деятельности.

Теория дифференциальных игр выделилась в отдельный раздел математики в пятидесятых годах XX в. Одной из первых работ в области дифференциальных игр принято считать работу Р. Айзекса, в которой в терминах состояний и управлений была сформулирована задача перехвата самолета управляемой ракетой, а также выведено основополагающее уравнение для нахождения решения. Вклад Р. Айзекса вместе с классическим исследованием Р. Беллмана создали основу для использования результатов теории оптимального управления в задачах конфликтного управления с несколькими участниками. Первые интересные результаты в теории дифференциальных игр были получены Л. Берковицем, Г. Лейтманом, В. Флемингом, А. Фридманом и др.

Значительный вклад в дальнейшее развитие дифференциальных игр внесли отечественные ученые Л.С. Понтрягин, Л.А. Петросян, Н.Н. Красовский, Б.Н. Пшеничный, работы которых в основном были связаны с дифференциальными играми преследования. Важнейшие результаты в области обоснования и методов нахождения решений антагонистических дифференциальных игр были получены в работах Красовского Н. Н. и А.И. Субботина. Параллельно начала развиваться теория неантагонистических дифференциальных игр, в которых в качестве принципа оптимальности использовалось равновесие по Нэшу. Особо следует отметить работы отечественных ученых, внесших большой вклад в развитие неантагонистических дифференциальных игр: Э. М. Вайсборда, Р.В. Гамкрелидзе, Н. Л. Григоренко, В.И. Жуковского, А. Ф. Клейменова, А. Ф. Кононенко, А.В. Кряжимского, А. Б. Куржанского, В.Н. Лагунова, Н.Ю. Лукоянова, С.С. Кумкова, О. А. Малафеева, Мищенко Е.Ф., В.С. Пацко, Н. Н. Петрова, Н. Никандр. Петрова, Субботиной Н.Н., Тарасьева А.М., Тынянского Н.Т., Ушакова В.Н., Чикрия А.А., Чистякова С. В., Ченцова А. Г. и многих других.

Позднее работы, использующие методы дифференциальных игр, появились и в области моделирования конфликтно– управляемых экономических процессов, в том числе в задачах природоохранной политики, оптимальной эксплуатации природных ресурсов и пр. Особо отметим работы Л.А. Петросяна, В.В. Захарова, Н.А. Зенкевича, В.В. Мазалова, А.Н. Реттиевой, С. Йоргенсена, Е. Докнера, Н. Лонга, Г. Соргера, Дж. Заккура, Я. Кравчика, Дж. Филара и др., посвященные использованию теоретико- игрового подхода для решения проблемы охраны окружающей среды.

Во многих указанных выше работах рассматриваются кооперативные дифференциальные и динамические игры. Использование кооперативного подхода обосновано «неагрессивным» характером поведения игроков во многих экономических приложениях теории игр. Теория кооперативных «однократных» игр была введена в работе Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна, которая получила развитие в отечественных научных школах, возглавляемых Н. Н. Воробьевым и Ю.Б. Гермейером. Особенно следует отметить успехи, полученные в работах по кооперативным играм представителями Ленинградской школы О. Н. Бондаревой, Е. Б. Яновской и др.

В кооперативных играх под принципом оптимальности, как правило, понимается способ распределения заработанного совместными усилиями игроков суммарного выигрыша. Наиболее часто в работах в прикладных задачах используются такие принципы оптимальности, как вектор Л.С. Шепли, C–ядро, N– ядро и др.

Непосредственный перенос результатов теории кооперативных «однократных» игр на динамические модели привносит дополнительные проблемы для исследования. Предварительно следует пояснить различие в специфике решаемых задач в кооперативных и некооперативных играх. При изучении оптимального поведения игроков в некооперативных играх последние, как правило, рассматриваются в нормальной форме, т. е. задается система $\Gamma =< N, \{X_i\}_{i\in N}$, $\{K_i\}_{i\in N} >$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, K_i – функция выигрыша игрока i, определенная на $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Конфликт интересов игроков состоит в том, что перед каждым игроком i, $i \in N$, стоит задача выбора одной из стратегий $u_i \in X_i$, максимизирующей выигрыш K_i этого игрока, зависящий, в том числе, и от выбранных стратегий других игроков. В этом смысле подход к решению круга задач в некооперативной постановке игры может быть назван «стратегическим».

В кооперативной постановке все игроки перед началом игры договариваются действовать совместно оптимально (кооперируются), т.е. договариваются использовать стратегии $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$, максимизирующие суммарный выигрыш $V(N) = \max_{u\in X} \sum_{i=1}^{n} K_i(u)$. Главной задачей, носящей конфликтный характер, становится проблема справедливого раздела $V(N)$ между игроками. В связи с этим подход к решению задач в кооперативных играх может быть назван «нестратегическим», подчеркивая то, что задача нахождения оптимальных стратегий не носит конфликтный характер и не является основной.

При изучении кооперативных игр выделяют так называемые кооперативные игры с трансферабельной и нетрансферабельной полезностью. Свойство трансферабельности означает, что игроки имеют возможность складывать и делить выигрыши. В трансферабельных кооперативных играх под принципом оптимальности понимают способ раздела суммарного максимального выигрыша, совместно заработанного игроками. Отметим, что в англоязычной литературе вместо словосочетания «принцип оптимальности» используется понятие «кооперативного решения», однако мы в основном будем придерживаться терминологии, введенной Н.Н. Воробьевым.

Теория кооперативных дифференциальных игр получила бурное развитие после выхода монографии Л.А. Петросяна, Н. Н. Данилова, в которой, в том числе, обсуждалась проблема динамической неустойчивости классических принципов оптимальности, перенесенных из теории статических кооперативных игр на динамическую постановку. Это обстоятельство впервые было замечено Л.А. Петросяном в 1977 году. Позднее введенные им термины динамической и сильно динамической устойчивости в англоязычной литературе трансформировались в «состоятельность во времени» и «сильную состоятельность во времени» соответственно. В работах по кооперативным дифференциальным играм с предписанной продолжительностью Л. А. Петросяном был разработан математический аппарат, названный процедурой распределения дележа, позволяющий добиться динамической устойчивости (или реализуемости во времени) выбранного игроками перед началом игры принципа оптимальности. На основе предложенного Л.А. Петросяном подхода, была изучена проблема динамической и сильно динамической устойчивости в кооперативных дифференциальных и многошаговых играх (Д.В. Кузютин, Л.А. Петросян), в том числе в стохастической постановке (см. А.В. Белицкая, Л.В. Грауэр, М. Дементьева, В.В. Захаров, Н.А. Зенкевич, А.В. Зятчин, Н.В. Козловская, Н.В. Колабутин, В. В. Мазалов, М.В. Марковкин, Е.М. Парилина, А. Н. Реттиева, Я. Б. Панкратова, О. Л. Петросян, А.Н. Реттиева, С.И. Тарашнина, А.В. Тур и др.), в сетевых играх (А.А. Седаков, М.В. Булгакова), играх с нетрансферабельной полезностью (Д. Янг).

Попытка применения классических для «однократных» кооперативных игр принципов оптимальности в динамических моделях приводит к тому, что они оказываются нереализуемыми во времени (динамически неустойчивыми). Данный факт был замечен в различных формулировках: Ф. Кидланд, Е. Прескотт обнаружили динамическую неустойчивость решений в некоторых экономических задачах, А. Ори заметил динамическую неустойчивость вектора Шепли в задаче о переговорах, также проблема динамической неустойчивости в повторяющихся играх была обозначена в работе И. Куриель, однако только в концепции, предложенной Л.А. Петросяном, предлагался способ решения данной проблемы.

Отдельным актуальным направлением в теории игр является использование элементов случайности (или неопределенности) при моделировании конфликтных процессов. Развитие данной области непосредственно связано с развитием теории стохастических игр, введенных Шепли в 1953 году, а также дифференциальных игр при наличии неопределенности (см. Жуковский В.И., Кононенко А.Ф., Петросян Л.А. и Янг Д.В. К.), поскольку использование при моделировании фактора той или иной неопределенности позволяет наиболее адекватно описывать самые разнообразные процессы, происходящие в экономике, экологии, менеджменте, торговле, при принятии решений в области международных отношений, систем безопасности и пр. Важные результаты в области теории оптимального управления при наличии неопределенностей получены А.Б. Куржанским.

В данной работе рассматривается новый класс дифференциальных игр — кооперативные дифференциальные игры n лиц со случайной продолжительностью. Случайность времени существования любого организма, системы, процесса заложена в окружающую человека реальность, поэтому спектр приложений кооперативных дифференциальных игр со случайной продолжительностью может быть велик. Отметим, что в работе Л.А. Петросяна и Н.В. Мурзова "Теоретико-игровые задачи механики"в 1966 г. впервые были исследованы дифференциальные игры преследования двух лиц со случайной продолжительностью. В рассматриваемой авторами задаче игроки получали терминальный выигрыш в случайный момент времени T. В этой же работе впервые было выведено уравнение типа Айзекса-Беллмана для заданной таким образом антагонистической дифференциальной игры.

Стоит отметить, что управляемые процессы со случайным моментом окончания для задач с одним агентом (игроком) также были независимо рассмотрены в области оптимального управления, начиная с работы М. Яари, в которой формулировалась задача оптимального страхования жизни потребителя при условии, что момент окончания жизни являлся случайной величиной. Е.К. Букасом задача оптимального управления со случайным моментом остановки была сформулирована в общем виде.

Продолжительность игры является важным параметром, влияющим на оптимальное поведение игроков. Отдельной областью теории игр, в которых объектом исследования также является момент окончания игры, являются так называемые игры с оптимальной остановкой. В этой области следует выделить работы В.В. Мазалова, Сакагучи, К. Шайовски, В. К. Доманского, Э. Пресмана и др., см. также многочисленные работы А.Н. Ширяева и библиографию к ним.

В диссертационной работе Громовой Е.В. изучаются кооперативные дифференциальные и многошаговые игры, в которых динамика является детерминированной, а выигрыш рассматривается в смысле его математического ожидания на случайном интервале $[t_0, T]$. Некоторые вспомогательные сведения и результаты из области теории оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории вероятностей и математического моделирования, которые были использованы в исследовании, также сформулированы в § 1.1 — § 1.5.

Целью диссертационной работы является построение конструктивной теории кооперативных дифференциальных игр со случайной продолжительностью и разработка подходов к определению динамически устойчивых принципов оптимальности для указанного класса кооперативных игр. В связи с поставленной целью, можно выделить следующие основные задачи диссертационной работы:

— формально описать и исследовать широкий класс теоретико-игровых динамических задач со случайной продолжительностью в форме дифференциальных игр со случайной продолжительностью;

— разработать математический аппарат для построения принципов оптимальности в кооперативной постановке дифференциальных игр со случайной продолжительностью;

— сформулировать алгоритм построения динамически и сильно динамически устойчивых принципов оптимальности для указанного класса игр;

— адаптировать полученные результаты для дискретной постановки игры.

Методика исследования. Результаты диссертации получены с использованием строгого математического аппарата теории оптимального управления, динамических игр, кооперативных игр, теории вероятностей и теории надежности.

Научная новизна диссертационной работы. В работе впервые рассмотрена общая постановка дифференциальных игр со случайной продолжительностью; предложен математический аппарат для построения кооперативной теории для указанного класса игр; описаны и решены новые проблемы, возникающие при непосредственном переносе результатов классической теории кооперативных игр для данного широкого класса динамических игр.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит в основном теоретический характер. Построена кооперативная теория дифференциальных игр со случайной продолжительностью, получены достаточные, а в ряде случаев и необходимые условия существования динамически и сильно динамически устойчивых принципов оптимальности для указанного класса игр. Однако круг практических приложений разработанных алгоритмов может быть достаточно велик, в том числе в изученных в диссертации математических моделях управления объемами вредных выбросов, разработки месторождения несколькими фирмами, управления капиталовложениями во время рекламной кампании и пр., в которых присутствует конфликт интересов, основа для кооперации и наличие неопределенности.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- Формализован класс кооперативных дифференциальных игр n лиц $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$ со случайным моментом окончания T, где T является абсолютно непрерывной случайной величиной с функцией распределения $F(t),\ t \in [t_0, T_f]$.

- Предложены и исследованы следующие модификации игры n лиц $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$: дифференциальная игра n лиц $\Gamma^{T,\rho}(x_0, t_0, T_f)$ со случайным моментом окончания T и дисконтированием подынтегральных функций полезности игроков; дифференциальная игра n лиц $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0, T_f)$, со случайным моментом окончания $T_{min} = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, где $\{T_i\}_{i=1}^n$ — независимые случайные величины, описывающие момент окончания игрового процесса для игроков $\{i\} \in N$.

- Введена и изучена дифференциальная игра n лиц $\Gamma^{T_\sigma}(x_0, t_0)$, в которой функция распределения случайной величины T может меняться при развитии игры во времени $t \in [t_0, \infty)$, предложен способ задания составной функции распределения $F_\sigma(t), \quad t \in [t_0, \infty)$, доказана теорема о том, что $F_\sigma(t)$ принадлежит к классу допустимых функций.

- Определена дифференциальная игра n лиц $\Gamma^{T_0}(x_0, t_0, T_f)$ со случайным моментом начала игры T_0, где T_0 — случайная величина.

- Доказаны теоремы об упрощении математического ожидания интегрального выигрыша игрока для игр $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T,\rho}(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T_{min}}(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T_0}(x_0,t_0,T_f)$.

- Для кооперативной формулировки игры $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$ выведено уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана и доказана теорема о достаточных условиях существования оптимальных управлений в классе позиционных стратегий.

- Доказана теорема о достаточных условиях существования оптимальных управлений в классе позиционных стратегий для частного случая игры $\Gamma^{T,\rho}(x_0,t_0,T_f)$, в которой дисконтирование осуществляется с интегральной ставкой дисконтирования $\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau$.

- Для класса кооперативных дифференциальных игр с предписанной продолжительностью $\Gamma(x_0,t_0,T_f)$ предложен новый способ построения характеристической функции $V^\zeta(x_0,t_0,T_f;S), S\subseteq N$, доказана теорема о супераддитивности $V^\zeta(x_0,t_0,T_f;S)$.

- Для игр с предписанной продолжительностью $\Gamma(x_0,t_0,T_f)$ введено понятие опорного решения в C–ядре, а также доказана конструктивная теорема о достаточных условиях, гарантирующих сильную динамическую устойчивость C–ядра. Алгоритм построения сильно динамически устойчивого C–ядра описан в общем случае для игры n лиц. Конструктивный алгоритм построения опорного решения описан для игры 2 лиц.

- Проблема динамической устойчивости кооперативных решений изучена и решена для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью $\Gamma(x_0,t_0,T_f)$ с фиксированным коалиционным разбиением игроков. Предложен алгоритм вычисления процедуры распределения дележа для описанной модели с двухуровневой кооперацией игроков.

- Проблема динамической и сильной динамической устойчивости принципов оптимальности изучена и решена для кооперативной дифференциальной игры со случайной продолжительностью $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$, а также ее модификаций $\Gamma^{T,\rho}(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T_{min}}(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T_\sigma}(x_0,t_0)$. Сформулированы теоремы, гарантирующие выполнение динамической устойчивости и защиты от иррационального поведения участников во всех указанных классах игр.

- Предложен алгоритм регуляризации вектора Шепли в игре $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$.

- Для игры $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$ доказаны теорема о необходимых и теорема о достаточных условиях непустоты множества опорных решений в C–ядре.

- Введен класс кооперативных многошаговых игр со случайным числом шагов. Сформулированы и доказаны теоремы о регуляризации вектора Шепли и C–ядра для данного класса игр.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы были доложены на семинарах кафедры математической теории игр и статистических решений Санкт-Петербургского государственного университета, на семинарах Центра теории игр (СПбГУ), на семинаре Механико-математического факультета Саратовского государственного университета (2004), на семинарах Болонского университета, Италия (2011), Унив. г. Падуя, Италия (2011), Унив. Ла Сапиенца, Рим, Италия (2011); семинарах научного центра GERAD унив. Монреаля, Канада (2011, 2015, 2016); на семинаре унив. Анауак, Мехико, Мексика (2014); на семинаре кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и математической кибернетики Московского государственного университета (2016), на XXX и XXXI научных конференциях «Процессы управления и устойчивость», Санкт-Петербург(1999, 2000), на V Российской мультиконференции по проблемам управления, Санкт-Петербург (2012), на I Российском экономическом конгрессе, Москва (2009), а также на следующих международных конференциях: «Устойчивость и процессы управления», посвящ. В.И. Зубову, Санкт-Петербург (2005, 2010, 2015); Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана», Екатеринбург (2005), Russian-Finnish Graduate School Seminar «Dynamic Games and Multicriteria Optimization», Petrozavodsk (2006); 2nd International Conference on Game Theory and Application, Qingdao, China (2007); International Conference on Game Theory and Management, St.Petersburg (2007 — 2012, 2014, 2016); Международный Конгресс «Нелинейный динамический анализ», Санкт-Петербург (2007), Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль(2009); Int. Conference Stochastic Optimal Stopping, Petrozavodsk (2010); Spain-Italy-Netherlands Meeting on Game Theory (Paris 2011, St. Petersburg 2015); 25th IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, Berlin (2011), Workshop on Dynamic Games in Management Science, Montreal, Canada (2008, 2011, 2016); Viennese Workshop on Optimal Control, Dynamic Games and Nonlinear Dynamics, Vienna (2012, 2015); Conference on Constructive Nonsmooth Analysis, St.Petersburg (2012); Международная научная конференция «Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л.В. Канторовича», Санкт-Петербург (2012); International Symposium on Dynamic Games and Applications (Wroclaw 2008; Amsterdam 2014); 28th European Conference on Operational Research, Poznan, Poland (2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–38], из которых 10 опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК РФ (работы [1–5], [7–11]), 8 работ опубликованы в журналах, индексируемых в наукометрических базах Scopus/ Web of Science ([17, 18, 24, 27, 28, 30, 33, 38]), работы [6, 16, 29, 31, 32] являются монографиями/главами в монографиях в издательствах «Nova Science Publ.», «Springer», «БХВ-Петербург».

Работы [1–8, 17–31, 34, 38] написаны в соавторстве. В работах [2, 5, 8, 29] соавтором была предложена постановка задачи, а диссертантом получены все основные результаты; в работе [7] диссертанту принадлежит раздел о кооперативных многошаговых играх со случайной продолжительностью. В работе [1] диссертанту принадлежит постановка задачи, доказательство теоремы о сунеаддитивности, математическая модель и вычисления в примерах, а соавтору — выбор методов решения. В работе [6] диссертантом проведено систематическое исследование математических моделей принятия решений несколькими сторонами в условиях конфликта при наличии неопределенности.

В работах [3, 24, 26] диссертантом формализована теоретико-игровая задача разработки невозобновляемых ресурсов, сформулированы основные результаты в рамках вероятностного подхода, доказано утверждение 1 и следствие 1 в [3], получены аналитические выражения в содержательных примерах. В работах [4, 34] диссертанту принадлежит постановка задачи, а также доказательство утверждения о виде функционала выигрыша для случая неотрицательной функции полезности, а соавтору — доказательство утверждения о виде функционала выигрыша в общем случае и построение контрпримера. В работе [31] диссертанту принадлежит постановка задачи и доказательство теорем, а соавтором найдены оптимальные стратегии в игре управления вредными выбросами в окружающую среду.

В работе [17] личным вкладом автора является постановка задачи со случайным моментом начала и доказательство теорем, а соавтором выполнены вычисления в примере. В работах [18, 20–23, 28, 38] диссертанту принадлежат все основные теоретические результаты, касающиеся дифференциальных игр со случайным моментом окончания, причем в работах [20–23] аналитические выражения для оптимальных управлений, вектора Шепли и процедуры распределения дележа получены лично диссертантом, а соавторами выполнены вспомогательные вычисления, построение графиков, анализ результатов. В работе [19] диссертантом выполнены вычисления в примере дифференциальной игры управления вредными выбросами. В работе [27] соавтором предложена экономическая модель, а диссертантом найдены оптимальные стратегии и построена характеристическая функция. В работе [30] диссертантом сформулирована и доказана теорема о динамической устойчивости вектора Шепли, а соавторам принадлежит формулировка игры на деревьях событий в некооперативной постановке и выбор математической модели в примере.

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично.

Структура и объем. Диссертация изложена на 349 страницах, состоит из введения, трех разделов, включающих в себя 9 глав, заключения и списка литературы, содержащего 362 наименования.

Содержание работы

В диссертационной работе Громовой Е.В. изучаются динамические игры с детерминированной динамикой, в которых продолжительность игры является случайной величиной. Работа состоит из частей I, II, III, организованных следующим образом.

Часть I «Дифференциальные игры со случайной продолжительностью» посвящена дифференциальным играм, в которых момент окончания или момент начала игры является случайной величиной с известной функцией распределения. Часть I состоит из Глав 1, 2, 3, 4.

В Главе 1 приводится формулировка классической дифференциальной игры с предписанной продолжительностью $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$, а также некоторые вспомогательные сведения из области оптимального управления, дифференциальных игр и теории вероятностей. Кроме того, описаны динамика и вид функций мгновенного выигрыша (полезности) в теоретико-игровых задачах рационального природопользования, экологического менеджмента и управления рекламной кампанией, которые будут использованы в последующих главах в качестве примеров, иллюстрирующих теоретические результаты.

В исследованиях в области дифференциальных игр, как правило, изучаются дифференциальные игры с предписанной продолжительностью. Это означает, что игра развивается во времени на фиксированном временном промежутке $[t_0, T_f]$, причем момент начала игры t_0 и момент окончания игры T_f известны заранее.

Дифференциальную игру n лиц с предписанной продолжительностью будем обозначать как $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$. Множество игроков обозначим как N, $|N| = n$. В дальнейшем будем ассоциировать игроков с их порядковыми номерами: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, соответственно i-ый игрок будет обозначаться как $\{i\} \in N$. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = g(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x(t_0) = x_0 \in X \subset R^m. \tag{1}$$

Полагается, что состояние $x(t) \in X$ принадлежит некоторому открытому подмножеству $\mathbb{R}^m$ для всех $t \in [t_0, T_f]$, а управления u_i выбираются из множеств допустимых управлений $\mathcal{U}_i$, которые состоят из всех измеримых фунций из $[t_0, T_f]$ в U_i, $i = 1, \ldots, n$. Множества допустимых значений управлений U_i представляют собой выпуклые компактные подмножества $\mathbb{R}^k$ такие что $U_i \ni \{\mathbf{0}\}$. В дальнейшем мы будем использовать сокращенные обозначения и писать $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $U = \prod_{i=1}^n U_i$, $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ и, соответственно, $u \in \mathcal{U}$ и $u(t) \in U$, $t \in [t_0, T_f]$.

Будем полагать, что для любого допустимого управления $u \in \mathcal{U}$ и для любого начального условия $x_0 \in X$ существует решение системы (1), обозначаемое $x(x_0, t_0, t, u)$, такое что для всех $t \in [t_0, T_f]$ выполняется $x(x_0, t_0, t, u) \in X$. Кроме того, потребуем выполнения следующих условий:

Предположение 1.1.1. Пусть правые части системы дифференциальных уравнений (1) удовлетворяют следующим условиям регулярности:

1. функция g непрерывна на множестве $X \times U_1 \times \ldots \times U_n$,

2. функция g удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной $\kappa_1 > 0$:

$$\|g(x', u) - g(x'', u)\| \leq \kappa_1 \|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in X, u \in U,$$

3. существует такая константа $\kappa_2 > 0$, что функция g ограничена сверху по x:

$$\|g(x, u_1, \ldots, u_l)\| \leq \kappa_2 (1 + \|x\|) \quad \forall x \in X, u \in U,$$

4. для любого $x \in X$, множество
$$G(x) = \{g(x,u) | u \in U\}$$
является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^m$.

Выигрыш i-го игрока определяется следующим образом:

$$K_i(x_0, t_0, T_f, u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T_f} h_i(x(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $h_i(x, u_1, \ldots, u_n)$ представляет собой непрерывную функцию и $x(t)$ – решение задачи Коши для системы ОДУ (1) при управлениях $u_1(t), \ldots, u_n(t)$.

Рассмотрим кооперативный вариант игры. Пусть $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ – такой n-набор управлений, который доставляет максимум суммарному выигрышу игроков:

$$u^* = \arg\max_u \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, T_f, u). \tag{3}$$

Траекторию $x^*(t)$, $t \in [t_0, T_f]$, являющуюся решением задачи (1) при управлении u^* будем называть кооперативной траекторией.

Совокупный выигрыш игроков из максимальной коалиции N, полученный при использовании оптимальных управлений u^* обозначим $V(x_0, t_0, T_f, N)$:

$$V(x_0, t_0, T_f, N) = \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, T_f, u_1^*, \ldots, u_n^*) = \sum_{i=1}^n \int\limits_{t_0}^{T_f} h_i(x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau. \tag{4}$$

Описанные выше оптимальные управления разыскиваются в классах позиционных или программных стратегий.

Развитию кооперативной игры игры во времени соответствует движение вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$. Следовательно, в каждый момент времени $t \in [t_0, T_f]$ игроки попадают в подыгру $\Gamma(x^*(t), t, T_f)$ с предписанной продолжительностью $T_f - t$. Под выигрышем в подыгре $\Gamma(x^*(t), t, T_f)$, $\;t \in [t_0, T_f]$ будем понимать

$$K_i(x^*(t), t, T_f, u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t}^{T_f} h_i(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где динамика игры описывается системой (1) с начальным условием $x(t) = x^*(t)$.

В Главе 2 рассматриваются дифференциальные игры со случайным моментом окончания. В § 2.1 вводится определение игры $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$, являющейся модификацией игры $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$, а именно, предполагается, что игра заканчивается в момент времени T, где T — случайная величина с известной функцией распределения $F(t)$, $t \in [t_0, T_f]$ с условием нормировки:

$$\int_{t_0}^{T_f} dF(t) = 1.$$

Кроме того, далее предполагается существование функции плотности распределения $f(t)$. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1), для которой выполняются требования Предположения 1.1.1. Функция мгновенного выигрыша $h_i(x(\tau), u(\tau))$ игрока i в момент времени τ, $\tau \in [t_0, T_f)$, зависит от фазовой переменной $x(x_0, t_0, \tau, u(\cdot))$ и текущих значений управлений $u(\tau)$, где $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)\}$ — n–набор допустимых управлений игроков. Предполагается, что h_i являются непрерывными функциями своих аргументов.

Математическое ожидание выигрыша игрока i

$$K_i(x_0, t_0, T_f, u_1, \dots, u_n) = \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{T} h_i(x(\tau), u(\tau)) d\tau\right)$$

в игре $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$ имеет вид:

$$K_i(x_0, t_0, T_f, u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^{T_f} \left[\int_{t_0}^{t} h_i(x(\tau), u(\tau)) d\tau\right] f(t) dt, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

При развитии игры во времени, в каждый промежуточный момент ϑ, $\vartheta \in (t_0; T_f)$, игроки попадают в подыгру $\Gamma^T(x(\vartheta), \vartheta, T_f)$ с начальным состоянием $x(\vartheta) = x$. Очевидно, что игра может закончиться до момента ϑ с вероятностью $F(\vartheta)$, а вероятность продолжить игру после момента ϑ равна $(1 - F(\vartheta))$. Тогда под выигрышем в подыгре $\Gamma^T(x(\vartheta), \vartheta, T_f)$ будем понимать условное математическое ожидание выигрыша, а именно:

$$K_i(x, \vartheta, T_f, u_1, \dots, u_n) = \int_{\vartheta}^{T_f}\int_{\vartheta}^{t} h_i(x(\tau), u(\tau)) d\tau \, dF_\vartheta(t), \tag{7}$$

где $F_\vartheta(t)$, $t \geq \vartheta$ – функция распределения момента окончания игры в подыгре $\Gamma^T(x(\vartheta), \vartheta, T_f)$. Нетрудно заметить, что $F_\vartheta(t)$ является условной функцией распределения, а именно функцией распределения момента окончания игры при условии, что игра не закончилась до момента ϑ, $\vartheta \in (t_0, T_f)$. Кроме того, необходимо, чтобы $F_\vartheta(t)$ удовлетворяла стандартному условию нормировки при $\vartheta \in (t_0, T_f)$. Условная функция распределения $F_\vartheta(t)$ вычисляется по следующей формуле:

$$F_\vartheta(t) = \frac{F(t) - F(\vartheta)}{1 - F(\vartheta)}, \quad t \in [\vartheta, T_f). \tag{8}$$

Очевидно, что в подыгре $\Gamma^T(x(\vartheta),\vartheta,T_f)$ условная плотность распределения $f_\vartheta(t)$ определяется следующим образом:

$$f_\vartheta(t)=\frac{f(t)}{1-F(\vartheta)},\ t\in[\vartheta,T_f). \tag{9}$$

Таким образом, при предположении о существовании плотности $f(t)=F'(t)$ и учитывая равенства (7) и (9), запишем интегральный выигрыш игрока $i, i=1,\ldots,n$, в подыгре $\Gamma^T(x(\vartheta),\vartheta,T_f)$:

$$K_i(x,\vartheta,T_f,u_1,\ldots,u_n)=\frac{1}{1-F(\vartheta)}\int\limits_\vartheta^{T_f}\int\limits_\vartheta^{t}h_i(x(\tau),u(\tau))d\tau\, f(t)dt. \tag{10}$$

В § 2.2 изучается вопрос упрощения функционала выигрыша в дифференциальной игре $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$. Математическое ожидание интегрального выигрыша игрока для игры $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$ является функционалом нестандартного для задач оптимального управления вида, т.к. содержит повторное интегрирование. В § 2.2 данный функционал приведен к стандартному виду при помощи замены порядка интегрирования. Кроме того, в § 2.2.2 рассматривается случай смешанного функционала выигрыша игрока, т.е. интегрального и терминального выигрыша. В § 2.2.3 изучается вопрос об упрощении функционала выигрыша для общего случая линейно-квадратичных дифференциальных игр.

Рассмотрим интегральный выигрыш игрока i, который имеет вид (6). Не умаляя общности, в этом разделе положим $t_0=0$. Кроме того, введем более компактное обозначение $h_i(\tau)=h_i(x(\tau),u(\tau))$. Ниже будет рассмотрен случай $T_f=\infty$ как наиболее сложный.

Теорема 2.2.1. Пусть функции мгновенного выигрыша $h_i(t)$, $i=1,\ldots,n$ являются неотрицательными и интегрируемыми функциями времени t, $t\in[t_0,\infty)$. Тогда выигрыш игрока i (6) может быть представлен в следующем виде:

$$K_i(x_0,t_0,u_1,\ldots,u_n)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^t h_i(\tau)d\tau\, dF(t)=\int\limits_0^\infty(1-F(\tau))h_i(\tau)d\tau. \tag{11}$$

В общем случае имеет место следующий результат.

Теорема 2.2.2. [4] Ожидаемый выигрыш (6) может быть представлен в виде (11), если выполняются следующие условия:

1.
$$\lim_{T_f\to\infty}(1-F(T_f))\int\limits_{t_0}^{T_f}h_i(t)dt=0.$$

2. Следующие интегралы существуют в смысле несобственных интегралов Римана:
$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\left|\int\limits_{t_0}^{t} h_i(\tau)d\tau\right| dF(t) < +\infty, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Следствие 2.2.1. Интегральный выигрыш (6) имеет следующий вид:
$$K_i(x_0, t_0, T_f, u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T_f} h_i(x(\tau), u(\tau))e^{-\int_{t_0}^{\tau}\lambda(t)dt}d\tau, \tag{12}$$
где $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$.

В общем случае для подыгры $\Gamma^T(x(\vartheta), \vartheta, T_f)$ имеем следующий вид выигрыша для игрока i:
$$K_i(x, \vartheta, T_f, u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{\vartheta}^{T_f} h_i(x(\tau), u(\tau))e^{-\int_{\vartheta}^{\tau}\lambda(t)dt}d\tau. \tag{13}$$

Теоретические результаты демонстрируются для дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов в атмосферу (§ 2.2.1) и дифференциальной игры управления капиталовложениями в рекламную кампанию (§ 2.2.4).

В § 2.3 игра $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$ изучается в кооперативной форме, причем задача рассматривается со смешанными выигрышами игроков. Перед началом игры игроки договариваются об использовании ими допустимых управлений $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$, максимизирующих совокупный ожидаемый выигрыш игроков:
$$\sum_{i=1,\ldots,n} K_i(x_0, t_0, T_f, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1,\ldots,n}\int\limits_{t_0}^{T_f}\Big[(1-F(\tau))h_i(x(\tau), u_1, \ldots, u_n) + f(\tau)H_i(x(\tau))\Big]d\tau. \tag{14}$$
Дальнейшее изложение предполагает, что кооперативная траектория существует и является единственной.

Обозначим как $h(x(\tau), u) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(x(\tau), u_1, \ldots, u_n)$ совокупный мгновенный выигрыш, $H(x(\tau)) = \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(x(\tau))$ – суммарный терминальный выигрыш.

Рассмотрим следующую задачу максимизации:
$$\frac{1}{1-F(t)}\int\limits_{t}^{T_f}\Big[(1-F(s))h(x,u) + f(s)H(x(s))\Big]ds, \tag{15}$$
$$\dot{x} = g(x,u),\ x(t) = x.$$

В § 2.3.1 данная задача решается в классе позиционных управлений, $W(x,t)$ — соответствующая функция Беллмана. Для простоты рассмотрим случай $x \in \mathbb{R}^1$.

Теорема 2.3.1. Пусть существует непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция $W(t, x(t))$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{f(t)}{1-F(t)}W = \frac{\partial W}{\partial t} + \max_u \left(h(x,u) + \frac{f(t)}{1-F(t)}H(x) + \frac{\partial W}{\partial x}g(x,u) \right) \tag{16}$$

с краевым условием $\lim\limits_{\tau \to T_f} W(\tau, x){=}0$, и существует допустимое управление $u^*(t,x)$, доставляющее максимум выражению $\left(h(x,u) + \frac{f(t)}{1-F(t)}H(x) + \frac{\partial W}{\partial x}g(x,u)\right)$, тогда управление $u^*(t,x)$ является оптимальным и выполняется равенство $W(t_0,x_0) = V(x_0,t_0,T_f,N)$.

Следствие 2.3.1. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (16) имеет следующий вид:

$$\lambda(t)W(x,t) = \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \max_u \left(h(x,u) + \lambda(t)H(x) + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x}g(x,u) \right). \tag{17}$$

В § 2.3.2 уравнение (17) выведено другим способом, который не предполагает предварительного упрощения интегрального выигрыша игрока. В § 2.3.3 и в § 2.3.4 оптимальные управления найдены, соответственно, в классе программных и позиционных стратегий для приложений дифференциальных игр в области природоохранного менеджмента (§ 2.3.3) и совместной разработки месторождения n игроками (§ 2.3.4).

В Главе 3 рассматриваются некоторые модификации игры $\Gamma^T(x_0,t_0,T_f)$ со случайным моментом окончания, а именно, в § 3.1 — § 3.4 введены классы дифференциальных игр, обозначенные как $\Gamma^{T,\rho}(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T_{min}}(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T_{min},T}(x_0,t_0,T_f)$, $\Gamma^{T_\sigma}(x_0,t_0)$.

В § 3.1 изучается игра $\Gamma^{T,\rho}(x_0,t_0,T_f)$, которая заканчивается в случайный момент времени T с функцией распределения $F(t)$, $t \in [t_0,T_f]$, причем мгновенные выигрыши игроков дисконтируются при помощи функции дисконтирования $e^{-\rho(t_0,\tau)}$, т.е.

$$K_i(x_0,t_0,u) = E\left(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\rho(t_0,\tau)}h_i(x(\tau),u_1,\dots u_n)d\tau\right) \tag{18}$$

где $\rho(t_0,t)$ – ставка дисконтирования.

В случае дисконтирования с интегральной ставкой дисконтирования $\rho(t_0,t){=}\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau$ используется обозначение $\Gamma^{T,r(t)}(x_0,t_0,T_f)$. Для игры $\Gamma^{T,r(t)}(x_0,t_0,T_f)$ в § 3.1.1 выводится уравнение типа Гамильтона– Якоби – Беллмана.

Рассмотрим игру $\Gamma^{T,r(t)}(x_0,t_0,T_f)$ с интегральной ставкой дисконтирования.

Теорема 3.1.1. Пусть существует непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция $W(t, x(t))$, удовлетворяющая уравнению

$$\left(r(t) + \frac{f(t)}{1 - F(t)}\right) W = \frac{\partial W}{\partial t} + \max_u \left(h(t, x, u) + \frac{f(t)}{1 - F(t)} H(x) + \frac{\partial W}{\partial x} g(x, u)\right) \tag{19}$$

с краевым условием $\lim\limits_{\tau \to T_f} W(\tau, x) = 0$ и существует допустимое управление $u^*(t, x)$, доставляющее максимум выражению $\left(h(t, x, u) + \frac{f(t)}{1-F(t)} H(x) + \frac{\partial W}{\partial x} g(x, u)\right)$, то управление $u^*(t, x)$ является оптимальным.

В § 3.1.2 приведен пример дифференциальной игры 2 лиц, в которой игроки различных типов (развитая и развивающаяся страны) участвуют в игре управления вредными выбросами.

В § 3.2 изучается игра $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0)$, являющаяся модификацией игры со случайным моментом окончания $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$, для которой может быть получен ряд специальных свойств, основанных на виде функции распределения случайной величины T, заданной следующим образом. Пусть T_i – случайная величина с известной функцией распределения $F_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, соответствующая моменту окончания конфликтно-управляемого процесса для игрока i, $i = \overline{1, n}$. Будем предполагать, что $\{T_i\}_{i=1}^n$ – независимые случайные величины. В данном разделе предполагаем, что игра начинается в момент t_0 и заканчивается в момент первой остановки игры для какого-либо из игроков, т.е.

$$T_{min} = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}. \tag{20}$$

Для случайной величины T_{min} имеем: $F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t))$.

Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Выигрыши игроков предполагаются интегральными и, при выполнении предпосылок Теоремы 2.2.2, имеют вид (12). В данном разделе предполагаем $T_f = \infty$. Результаты для конечного временного интервала $[t_0; T_f]$ могут быть получены аналогичным образом.

Утверждение 3.2.1. В игре $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0)$ интегральный выигрыш игрока i, $i = 1, \ldots, n$ имеет следующий вид:

$$K_i(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} h_i(x(\tau), u(\tau)) e^{-\int_{t_0}^{\tau} \lambda(t) dt} d\tau, \tag{21}$$

где $\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)$.

В работе рассмотрены два примера игры $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0, T_f)$ из области природоохранного менеджмента, в которых управление ищется в классе программных (§ 3.2.1) и позиционных (§ 3.2.2) управлений. В § 3.2.1 изучается дифференциальная игра управления вредными выбросами, в которой случайные величины T_i имеют распределение Вейбулла с параметрами λ_i, δ_i. В § 3.2.2 одна теоретико-игровая задача оптимальной разработки невозобновляемого ресурса решена для произвольной функции распределения $F(t)$.

В § 3.3 сформулирована следующая модификация игры $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0, T_f)$. Пусть в игре принимают участие два игрока ($n = 2$), причем игра прекращается в момент времени $T_{min} = \min\{T_1, T_2\}$, однако в отличие от предыдущей постановки задачи, асимметрия заключается в том, что оставшийся игрок i также получает терминальный выигрыш $\Phi_i(x(T_{min}))$. Для данной постановки в § 3.2.1 выигрыш приводится к стандартному виду, в § 3.2.2 сформулировано уравнение типа Гамильтона– Якоби – Беллмана.

Далее в Главе 3 в § 3.4 рассматривается теоретико-игровая задача $\Gamma^{T_\sigma}(x_0, t_0)$, в которой вероятностное распределение момента окончания игры T не может быть описано с помощью некоторого стандартного распределения. В этом случае предлагается использовать составную функцию распределения $F_\sigma(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, заданную специальным образом. Будем полагать $T_f = \infty$.

Пусть t_0 – начальное время, $F_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ – набор функций распределения, описывающих различные режимы функционирования системы и удовлетворяющие следующему условию:

C. Функции распределения $F_i(t)$ являются абсолютно непрерывными неубывающими функциями, такими что каждая Ф.Р. стремится к 1 асимптотически, т.е. $F_i(t) < 1 \; \forall t < \infty$.

Пусть также $\tau = \{\tau_i\}$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{N-1} < \tau_N = \infty$ – упорядоченная последовательность моментов времени, в которые происходит изменение вида Ф.Р.

Составная Ф.Р. $F_\sigma(t)$ определяется следующим образом:

$$F_\sigma(t) = \begin{cases} F_1(t), & t \in [\tau_0, \tau_1), \\ \alpha_i(\tau_i)F_{i+1}(t) + \beta_i(\tau_i), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \\ & 1 \le i \le N-1, \end{cases} \tag{22}$$

где $\alpha_i(\tau_i) = \frac{F_\sigma(\tau_i^-)-1}{F_{i+1}(\tau_i)-1}$, $\beta_i(\tau_i) = 1 - \frac{F_\sigma(\tau_i^-)-1}{F_{i+1}(\tau_i)-1}$, $F_\sigma(\tau_i^-) = \lim\limits_{t \to (\tau_i - 0)} F_\sigma(t)$.

Составная плотность распределения вероятности имеет следующий вид:

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in [\tau_0, \tau_1), \\ \alpha_i(\tau_i)f_{i+1}(t), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \\ & 1 \le i \le N-1. \end{cases} \tag{23}$$

Теорема 3.4.1. Пусть дан набор Ф.Р. $F_i(t)$, $1 \le i \le N$, таких что условие **C** выполняется для каждой функции $F_i(t)$. Тогда составная Ф.Р. $F_\sigma(t)$, определенная по формуле (22), удовлетворяет **C**.

Задача оптимизации в классе программных стратегий в кооперативной игре $\Gamma^{T_\sigma}(x_0, t_0)$ приобретает следующий вид:

$$u^*(t) = \underset{u}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, t_0, u) = \underset{u}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N} (1 - F_\sigma(\tau))h_i(x(\tau), u_i(\tau))d\tau. \tag{24}$$

В § 3.4.2. описаны различные подходы к определению составной функции распределения $F_\sigma(t),\ t \in [t_0, \infty)$. Изменения функции распределения $F_\sigma(t)$ в моменты времени $\tau = \{\tau_i\}$, $\ t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{N-1} < \tau_N = \infty$ могут быть одного из двух типов, соответствующих фиксированному набору $\tau = \{\tau_i\}_{i=1}^{N-1}$ либо зависеть от состояния системы (τ_i определяется как решение уравнения $\gamma_i(x^i(\tau_i^-)) = 0$).

В § 3.4.3 изучена теоретико-игровая задача разработки невозобновляемого ресурса как пример игры $\Gamma^{T_\sigma}(x_0, t_0)$ с одним моментом изменения вида Ф.Р. для обоих указанных выше вариантов. Предполагается, что игроки используют идентичное оборудование для эксплуатации месторождения, причем вероятность отказа оборудования определяется режимом эксплуатации (в данном примере рассматривается два возможных режима). Наибольший интерес представляет случай, когда переключение режимов зависит от состояния x. В этом случае момент перехода из одного режима в другой определяется степенью разработки месторождения, а, конкретнее, изменение Ф.Р. происходит при достижении порогового значения ax_0 ($a \in [0, 1]$) объема оставшегося ресурса x от первоначального значения x_0.

В конце Главы 3 в § 3.5 рассматривается игра со случайным моментом начала $\Gamma^{T_0}(x_0, t_0, T_f)$. Предполагается, что дифференциальная игра n лиц начинается в случайный момент времени T_0 и заканчивается в фиксированный момент времени T_f. Будем считать известной функцию распределения случайной величины T_0: $F(t)$, $t \in [t_0; T_f]$, а также значение фазовой переменной x в момент времени t_0 ($x(t_0) = x_0$).

Под выигрышем игрока i будем понимать

$$K_i(x_0, t_0, T_f, u_1 \ldots, u_n) = \mathbb{E}\left[\int\limits_{T_0}^{T_f} h_i(t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t))\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}\mathrm{d}t\right], \qquad (25)$$

где T_0 — случайная величина. Отметим, что в данной постановке мгновенный выигрыш игрока дисконтируется при помощи экспоненциальной функции с дисконтирующей ставкой r.

Утверждение 3.5.1. Пусть выполнены предпосылки Теоремы 2.2.2. Тогда в игре $\Gamma^{T_0}(x_0, t_0, T_f)$ интегральный выигрыш игрока i, $\ i = 1, \ldots, n$ имеет следующий вид:

$$K_i(x_0, t_0, T_f, u_1 \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T_f} h_i(x(\tau), u(\tau))F(\tau)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau. \qquad (26)$$

В Главе 4 рассматриваются другие подходы к определению функционала выигрыша в дифференциальной игре $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$ со случайным моментом окончания. В § 4.1 сформулированы основные требования к конфликтно-управляемой системе, которые будут использованы в данной Главе в дальнейшем. Альтернативным подходом к задаче максимизации математического ожидания выигрыша является задача минимизации величины, соответствующей той или иной мере риска, основанной на вычислении дисперсии или второго момента выигрыша. В § 4.2 и § 4.3 задача минимизации дисперсии выигрыша и второго момента в классе программных стратегий упрощены.

В части II «Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью в форме характеристической функции» описанные выше классы дифференциальных игр изучаются в форме характеристической функции.

Отдельного внимания в дифференциальных играх заслуживают следующие вопросы: построение характеристической функции $V(x_0, t_0, T_f; S),\ S \subseteq N$; проблема динамической и сильно динамической устойчивости кооперативных решений (принципов оптимальности).

В Главе 5 рассматриваются кооперативные дифференциальные игры с предписанной продолжительностью $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$. § 5.1 посвящен вопросу динамической устойчивости кооперативных решений в игре $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$. В § 5.1.1 – § 5.1.3 систематизированы известные результаты, объясняющие концепцию динамической устойчивости принципов оптимальности в кооперативных дифференциальных играх. В § 5.1.4 предлагается обобщение условия защиты от иррационального поведения участников. В § 5.1.5 построен динамически устойчивый вектор Шепли для игры трех лиц, в которой задача управления объемами вредных выбросов моделируется как частный случай дифференциальной линейно-квадратичной игры. Все результаты получены в аналитическом виде.

В § 5.2 изучается вопрос сильной динамической устойчивости C–ядра в игре $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$. Вводится понятие опорного решения в C–ядре, а также доказывается конструктивная теорема о достаточных условиях, гарантирующих сильную динамическую устойчивость C–ядра. Подробно анализируются следствия об ограничениях на характеристическую функцию, гарантирующие непустоту множества опорных решений.

Рассмотрим игру $\Gamma_V(x_0, t_0, T_f)$. Предположим, что перед началом игры игроки договорились об использовании ими С–ядра $C(x_0, t_0, T_f)$ в качестве принципа оптимальности $M(x_0, t_0, T_f)$.

Определение 5.2.1. [2] Будем говорить, что С–ядро $C(x_0, t_0, T)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma_V(x_0, t_0, T_f)$, если

1. $C(x^*(t), t, T) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$;

2. существует такой дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, t_0, T_f)$ и такая процедура распределения дележа $\bar{\beta}(\tau) = (\bar{\beta}_1(\tau), \ldots, \bar{\beta}_n(\tau))$, $\tau \in [t_0, T]$, что $\bar{\alpha} = \int\limits_{t_0}^{T} \bar{\beta}_i(\tau) d\tau$ и

$$C(x_0, t_0, T_f) \supseteq \Big\{ \int\limits_{t_0}^{t} \bar{\beta}(\tau) d\tau \Big\} + C(x^*(t), t, T),\ \forall t \in [t_0, T],$$

где операция сложения в последнем выражении понимается как сумма множеств по Минковскому.

Определение 5.2.2. Дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, t_0, T_f)$, гарантирующий сильно динамическую устойчивость С–ядра, будем называть опорным решением.

Теорема 5.2.1. Пусть $V(x^*(t), t, T; S)$ — непрерывно дифференцируемая функция по $t \in [t_0; T]$. Пусть $C(x^*(t), t, T) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$. Если существует дележ $\alpha \in C(x_0, t_0, T_f)$ и соответствующая ему ПРД $\beta(t),\ t \in [t_0, T]$, такая что $\forall S \subset N$ справедливо

$$\sum_{i \in S} \beta_i(t) \geq -\frac{d}{dt} V(x^*(t), t, T; S), \tag{27}$$
$$\sum_{i \in N} \beta_i = -\frac{d}{dt} V(x^*(t), t, T; N),$$

то дележ $\alpha \in C(x_0, t_0, T_f)$ является опорным решением $\bar{\alpha}$, а С–ядро $C(x_0, T - t_0)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Следствие 5.2.1. Пусть $V(x^*(t), t, T; S)$ — непрерывно дифференцируемая функция по $t \in [t_0; T]$. Пусть существует дележ $\alpha \in C(x_0, t_0, T_f)$ и соответствующая ему ПРД $\beta(t),\ t \in [t_0, T]$, такая что $\forall S \subset N$ выполняется условие (27) Теоремы 5.1.1 . Тогда ПРД $\beta(t)$ удовлетворяет неравенству

$$-\frac{d}{dt}\big[V(x^*(t), t, T; N) - V(x^*(t), t, T; N \setminus S)\big] \geq \sum_{i \in S} \beta_i(t), \tag{28}$$
$$\sum_{i \in N} \beta_i = -\frac{d}{dt} V(x^*(t), t, T; N).$$

Следствие 5.2.2. Пусть характеристическая функция $V(x^*(t), t, T; N)$ непрерывно дифференцируема по $t \in [t_0, T]$ и удовлетворяет следующему условию для $\forall S \subset N, \qquad \forall t \in [t_0, T]$:

$$\frac{d}{dt} V(x^*(t), t, T, N) \leq \frac{d}{dt}[V(x^*(t), t, T, N \setminus S) + V(x^*(t), t, T, S)]. \tag{29}$$

Тогда множество опорных решений $\overline{C}(x_0, t_0, T_f)$ непусто.

В § 5.2.1 предлагается алгоритм построения сильно- динамически устойчивого C-ядра для игры n лиц. Для игры $n = 2$ лиц данный алгоритм может быть существенно упрощен. В § 5.2.2 предложен конструктивный подход для построения множества опорных решений в игре двух лиц. Данный алгоритм был использован в § 5.2.3 для построения сильно-динамически устойчивого решения в дифференциальной игре сокращения объемов вредных выбросов с ненулевой абсорбцией загрязнений для случая двух игроков. В § 5.2.4 была рассмотрена игра трех лиц из § 5.2.5. Доказано, что в данной игре управления вредными выбросами множество опорных решений не пусто и содержит вектор Шепли.

В § 5.3 исследуется вопрос построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$. В § 5.3.1, § 5.3.2 приводятся известные определения α- и δ- характеристических функций, на конкретных примерах дифференциальных игр анализируются достоинства и недостатки предложенных подходов. В § 5.3.3 формулируется новый подход к построению характеристической функции (ζ–х.ф.), позволяющий избежать указанных недостатков.

В теории кооперативных игр существуют различные способы построения характеристических функций. Наиболее часто используемые классы характеристических функций могут быть обозначены в порядке их появления как α-, β-, γ-, δ- характеристические функции.

В современной литературе под характеристической функцией в кооперативных играх понимается следующее отображение из множества всех возможных коалиций:

$$V(\cdot) : 2^N \to R,$$
$$V(\emptyset) = 0.$$

Отметим, что значение $V(S)$ является мерой стратегической силы коалиции S. Важным свойством является свойство супераддитивности характеристической функции:

$$V(x_0, t_0, T_f, S_1 \cup S_2) \geq V(x_0, t_0, T_f, S_1) + V(x_0, t_0, T_f, S_2), \tag{30}$$

$\forall\, S_1, S_2 \subseteq N,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Характеристическая функция $V^\zeta(x_0, t_0, T; S)$, $S, S \subseteq N$ может быть определена следующим образом: игроки из S используют стратегии $u_S^* = \{u_i^*\}_{i \in S}$ из оптимального n-набора u^*, в то время как оставшиеся игроки из множества $N \setminus S$ минимизируют выигрыш $\sum\limits_{i \in S} K_i$ коалиции S.

Имеем:

$$V^\zeta(x_0, t_0, T; S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\} \\ \min\limits_{\substack{u_j \in U_j,\, j \in N \setminus S \\ u_i = u_i^*,\, i \in S}} \sum\limits_{i \in S} K_i(x_0, u_S^*, u_{N \setminus S}), & S \subset N, \\ \max\limits_{\substack{u_1, u_2, \ldots, u_n, \\ u_i \in U_i,\, i \in N}} \sum\limits_{i=1}^{n} K_i(x_0, u_1, u_2, \ldots, u_n), & S = N. \end{cases} \tag{31}$$

Предложенный способ построения характеристической функции в дифференциальной игре с предписанной продолжительностью легко может быть обобщен для других классов игр.

Теорема 5.3.1. Характеристическая функция (31) является супераддитивной функцией.

Построенная ζ-характеристическая функция имеет следующие преимущества. Во-первых, характеристическая функция (31) удовлетворяет свойству супераддитивности (см. Теорему 5.3.1) в отличие от δ - характеристической функции. Во-вторых, она может быть вычислена в два этапа с использованием выражений для оптимальных управлений, что существенно упрощает процесс вычислений по сравнению с построением α - характеристической функции. Отметим, что оптимальные управления, максимизирующие суммарный выигрыш игроков, существуют и могут быть вычислены для широкого класса игр при достаточно слабых ограничениях, а вопрос существования и единственности равновесия по Нэшу для данного класса характеристических функций не является столь существенным, как для класса δ-характеристических функций. Кроме того, заданная новым образом характеристическая функция может быть использована для игр с фиксированными коалиционными структурами, в которых на втором уровне кооперации возникают технические сложности с построением характеристических функций.

В § 5.3.4 приведен пример построения характеристической функции в игре $\Gamma(x_0, t_0, T_f)$ всеми тремя описанными способами. Доказано, что в данном примере дифференциальной игры управления объемами вредными выбросами достаточные условия (29), гарантирующие сильную динамическую устойчивость C–ядра, выполнены без дополнительных ограничений на параметры модели для всех рассмотренных способов. Все результаты получены в аналитическом виде.

В § 5.4 описана кооперативная дифференциальная игра с фиксированной коалиционной структурой. Кооперация происходит на двух уровнях: сначала коалиции объединяются в коалицию N с целью максимизации суммарного выигрыша, а затем выигрыши (компоненты вектора Шепли), полученные коалициями, распределяются внутри этих коалиций. В § 5.4.1 предложен подход (процедура распределения дележа), согласно которому можно перераспределить выигрыши игроков во времени так, что кооперация будет динамически устойчивой на обоих уровнях игры. При этом на втором уровне игры используется способ построения характеристической функции, предложенный в § 5.3.3. В § 5.4.2 теоретические результаты демонстрируются на примере теоретико- игровой задачи управления вредными выбросами в атмосферу для случая заданной коалиционной структуры.

В Главе 6 проблема динамической и сильной динамической устойчивости принципов оптимальности была адаптирована и решена для кооперативной дифференциальной игры со случайной продолжительностью $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$, а также ее модификаций $\Gamma^{T,\rho}(x_0, t_0, T_f)$, $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0, T_f)$, $\Gamma^{T_\sigma}(x_0, t_0)$ (Глава 7). В § 6.1, 6.2, 6.3 сформулированы теоремы, гарантирующие выполнение динамической устойчивости и защиты от иррационального поведения участников на примере вектора Шепли.

Рассмотрим кооперативную форму игры $\Gamma^T(x_0, t_0, T_f)$. Будем полагать $T_f = \infty$. Для определенности далее будем полагать, что игроки договорились использовать вектор Шепли для раздела суммы $V_T(x_0, t_0, N)$:

$$Sh_i(x_0, t_0) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}[V^T(x_0, t_0, S) - V^T(x_0, t_0, S \backslash \{i\})], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определение 6.2.1. Пусть существует вектор-функция

$$\beta(t) = \{\beta_i(t) \geq 0\}_{i=1,\dots,n},$$

такая что компоненты вектора Шепли $Sh(x_0, t_0) = \{Sh_i(x_0, t_0)\}_{i=1,\dots,n}$ в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0)$ представимы в виде

$$Sh_i(x_0, t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} (1 - F(t))\beta_i(t)dt, \quad i = 1, \dots, n. \tag{32}$$

Вектор-функцию $\beta(t) = \{\beta_i(t)\}$ будем называть процедурой распределения дележа (ПРД) в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0)$.

Определение 6.2.2. Будем называть вектор Шепли $\{\overline{Sh}_i(x_0, t_0)\}$ динамически устойчивым вектором Шепли, если существует такая ПРД $\{\beta_i(t) \geq 0\}, \quad t \in [t_0, \infty)$, что вектор $\overline{Sh}(x^*(\vartheta), \vartheta) = \{\overline{Sh}_i^{\vartheta}\}, \forall\, \vartheta \in [t_0, \infty)$, вычисленный по формуле

$$\overline{Sh}_i(x^*(\vartheta), \vartheta) = \frac{1}{(1 - F(\vartheta))} \int\limits_{\vartheta}^{\infty} (1 - F(t))\beta_i(t)dt, \quad i = 1, \dots, n, \tag{33}$$

также является вектором Шепли в соответствующей подыгре $\Gamma_V^T(x^*(\vartheta), \vartheta), \quad \vartheta \in [t_0, \infty)$.

Теорема 6.2.1. Пусть для каждой подыгры $\Gamma_V^T(x^*(\vartheta), \vartheta)$, $\vartheta \in [t_0, \infty)$, вектор Шепли $\bar{S}h(x^*(\vartheta), \vartheta)$ является абсолютно непрерывной функцией времени ϑ. Пусть

$$\beta_i(\vartheta) = \frac{f(\vartheta)}{(1 - F(\vartheta))} \overline{Sh}_i(x^*(\vartheta), \vartheta) - (\overline{Sh}_i(x^*(\vartheta), \vartheta))' \geq 0, \ \vartheta \in [t_0, \infty), \ i = 1, \dots, n. \tag{34}$$

Тогда в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0)$ вектор Шепли $\bar{S}h(x_0, t_0)$ является динамически устойчивым дележом с ПРД (34).

Очевидно, что в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0)$ мы всегда можем распределить во времени вектор Шепли $\{Sh_i\}$, используя формулу для выплат (34). Однако в общем случае нельзя гарантировать неотрицательности компонент $\beta_i(\vartheta), \forall\, \vartheta \in [t_0, \infty)$. Вектор Шепли не является динамически устойчивым в общем случае. Алгоритм проверки динамической устойчивости вектора Шепли является следующим: вычислить компоненты ПРД по формуле (34) и проверить выполнение условия $\{\beta_i(\vartheta) \geq 0\}, \ \forall\, \vartheta \in [t_0, \infty)$. Если неотрицательность выполнена, то вектор Шепли $\{Sh_i\}$, распределенный во времени в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0)$ согласно (34), является динамически устойчивым.

В противном случае вектор Шепли не является динамически устойчивым принципом оптимальности. Тогда, при выполнении свойства неотрицательности функции мгновенного выигрыша $h_i(x(\tau), u(\tau)) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, для получения нового динамически устойчивого (регуляризованного) принципа оптимальности на основе первоначально выбранного игроками динамически неустойчивого принципа оптимальности, может быть использована новая процедура распределения дележа, а именно:

$$\bar{\beta}_i(\vartheta) = \frac{Sh_i(x^*(\vartheta),\vartheta)\sum\limits_{i=1}^{n} h_i(x^*(\vartheta),u^*(\vartheta))}{V(x^*(\vartheta),\vartheta,N)}, \qquad \vartheta \in [t_0,\infty). \tag{35}$$

В § 6.3. были изучены дополнительные ограничения на ПРД, обеспечивающие защиту игроков от иррационального поведения других участников в кооперативной дифференциальной игре с предписанной продолжительностью.

Для кооперативной дифференциальной игры со случайной продолжительностью $\Gamma_V^T(x_0,t_0,T_f)$ условие защиты от иррационального поведения может быть сформулировано следующим образом:

$$V_T(x_0,t_0,\{i\}) \le \int\limits_{t_0}^{\vartheta}(1-F(\tau))\beta_i(\tau)d\tau + (1-F(\vartheta))V_T(x^*(\vartheta),\vartheta,\{i\}), \tag{36}$$
$$i=1,\dots,n, \qquad \forall\theta \in [t_0;\infty).$$

Теорема 6.3.1. Пусть $V_T(x^*(t),t,\{i\})$ — непрерывно дифференцируемая функция по t, $t\in[t_0,\infty)$. Тогда условие (36) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\beta_i(t) \ge \lambda(t)V_T(x^*(t),t,\{i\}) - \frac{d}{dt}V_T(x^*(t),t,\{i\}), \quad i=1,\dots,n. \tag{37}$$

Аналогичным образом условия защиты коалиций от иррационального поведения других игроков могут быть переформулированы для задачи со случайным моментом окончания:

$$\begin{aligned} &V_T(x_0,t_0,S) \le \sum_{i\in S}\int\limits_{t_0}^{\vartheta}(1-F(t))\beta_i(t)dt + (1-F(\vartheta))V_T(x^*(\vartheta),\vartheta,S), \\ &\forall\vartheta\in[t_0,\infty), \qquad S\subseteq N. \end{aligned} \tag{38}$$

Теорема 6.3.2. Пусть $V(x^*(t),t;S)$ — непрерывно дифференцируемая функция при $t\in[t_0,\infty)$ в игре $\Gamma_V^T(x_0,t_0,T_f)$. Тогда условие (38) выполнено тогда и только тогда, когда ПРД $\beta(t)$, $t\in[t_0;\infty)$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i\in S}\beta_i(t) \ge \lambda(t)V_T(x^*(t),t,S) - \frac{d}{dt}V_T(x^*(t),t,S). \tag{39}$$

В § 6.4 приведен пример построения динамически устойчивого вектора Шепли на примере дифференциальной игры из § 2.3.4. В § 6.5 предложен алгоритм регуляризации вектора Шепли, который в § 6.5.1 продемонстрирован на иллюстративном примере линейной дифференциальной игры.

В § 6.6 изучается проблема построения сильно динамически устойчивого С–ядра; результаты, полученные в § 5.2 для игр с предписанной продолжительностью, адаптированы для игры со случайным моментом окончания. В § 6.6.1 для примера, изученного в § 6.5.1, проверяется достаточное условие для непустоты множества опорных решений.

Определение 6.6.1. Будем говорить, что С–ядро $C(x_0, t_0)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0, T_f)$, если

1. $C(x^*(t), t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, \infty)$;
2. существует такой дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, t_0)$ и такая ПРД $\bar{\beta}(\tau) = (\bar{\beta}_1(\tau), \ldots, \bar{\beta}_n(\tau))$, $\tau \in [t_0, \infty)$, что $\bar{\alpha}_i = \int\limits_{t_0}^{\infty}(1 - F(\tau))\bar{\beta}_i(\tau)d\tau$ и

$$\left\{\hat{\xi}_i = \int\limits_{t_0}^{\vartheta}(1 - F(t))\bar{\beta}_i(t)dt + (1 - F(\vartheta))\hat{\alpha}_i^{\vartheta}\right\}_{i \in N} \in C(x_0, t_0),$$
$$\forall \{\hat{\alpha}_i^{\vartheta}\}_{i \in N} \in C(x^*(\vartheta), \vartheta), \forall \vartheta \in [t_0, \infty). \quad (40)$$

Определение 6.6.2. Дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, t_0)$, гарантирующий сильно динамическую устойчивость С–ядра, будем называть опорным решением.

Сформулируем необходимые условия, гарантирующие (сильно) динамическую устойчивость С–ядра.

Теорема 6.6.1. Пусть $C(x^*(t), t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$. Пусть С–ядро $C(x_0, t_0)$ сильно динамически устойчиво в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0, T_f)$. Тогда существует множество дележей $\overline{C}(x_0, t_0) \subseteq C(x_0, t_0)$, т.ч. для любого $\xi \in \overline{C}(x_0, t)$ ПРД $\beta(t)$, вычисленная по формуле (32), удовлетворяет следующим условиям:

$$V_T(x_0, t_0; N) - V_T(x_0, t_0; N \setminus S) - (1 - F(\vartheta))V_T(x^*(t), t; S) \geq$$
$$\sum_{i \in S} \int\limits_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)(1 - F(\tau))d\tau \geq$$
$$V_T(x_0, t_0; S) - (1 - F(\vartheta))[V_T(x^*(t), t; N) - V_T(x^*(t), t; N \setminus S)], \quad (41)$$
$$\forall S \subset N,$$

$$\sum_{i \in N} \int\limits_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)(1 - F(\tau))d\tau = V_T(x_0, t_0; N) - (1 - F(\vartheta))V_T(x^*(t), t; N). \quad (42)$$

Теорема 6.6.2. Пусть $V_T(x^*(t), t; S)$, $S \subseteq N$ — непрерывно дифференцируемая функция по $t \in [t_0; \infty)$. Пусть $C(x^*(t), t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, \infty)$. Если существует дележ $\alpha \in C(x_0, t_0)$ и соответствующая ему ПРД $\beta(t),\ t \in [t_0, \infty)$, такая что $\forall S \subset N$ справедливо

$$\sum_{i \in S} \beta_i(t) \geq \lambda(t) V_T(x^*(t), t; S) - \frac{d}{dt} V_T(x^*(t), t; S),$$

$$\sum_{i \in N} \beta_i(t) = \lambda(t) V_T(x^*(t), t, N) - \frac{d}{dt} V_T(x^*(t), t, T; N), \quad (43)$$

то дележ $\alpha \in C(x_0, t_0)$ является опорным решением $\bar{\alpha}$, а С–ядро $C(x_0, t_0)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma_V^T(x_0, t_0, T_f)$.

В Главе 7 в § 7.1 — 7.4 проблема динамической и сильно динамической устойчивости изучается для игр $\Gamma^{T,\rho}(x_0, t_0, T_f)$, $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0, T_f)$, $\Gamma^{T_\sigma}(x_0, t_0)$. В § 7.2.1 приведен пример построения динамически устойчивого вектора Шепли для модели § 3.1.2, в § 7.3.1 динамически устойчивый вектор Шепли строится для игры § 3.2.1 для α-, δ-, ζ- характеристических функций.

В части III «Кооперативные многошаговые игры со случайным числом шагов» проблема динамической и сильно динамической устойчивости кооперативных решений изучается для дискретной постановки задачи. **В Главе 8** рассматриваются кооперативные многошаговые игры со случайным числом шагов. В § 8.1 – 8.8 изучены вопросы регуляризации вектора Шепли и С–ядра, проблема сильной динамической устойчивости, в § 8.9, § 8.10 приведены два примера многошаговых игр, иллюстрирующие полученные результаты.

Теорема 8.2.1. Пусть $C(\bar{z}_0) = \{\{\xi_i\}_{i=1}^n\}$. Пусть для каждого $\bar{\xi} \in C(z_0)$ ПРД $\beta^k = \{\beta_i^k\}_{i=1}^n$, $k = 1, \ldots, l$ вычисляется следующим образом:

$$\beta_i^k = \bar{\xi}_i^k - \frac{1 - \sum\limits_{m=0}^{k} p_m}{1 - \sum\limits_{m=0}^{k-1} p_m} \bar{\xi}_i^{k+1}, \qquad \beta_i^0 = \bar{\xi}_i - (1 - p_0)\, \bar{\xi}_i^1, \qquad \beta_i^l = \bar{\xi}_i^l. \quad (44)$$

Если $\beta_i^k \geq 0,\ \forall i \in N,\ \forall k \in \{0, \ldots, l\},\ \forall \{\bar{\xi}_i\} \in C(z_0),\ \forall \{\bar{\xi}_i^k\} \in C(\bar{z}_k)$, то в игре $G_V(\bar{z}_0)$ принцип оптимальности $C(\bar{z}_0)$ является динамически устойчивым.

В Главе 9 рассмотрена другая дискретная постановка с элементом случайности, а именно, кооперативная многошаговая игра на так называемых «деревьях событий». Игра имеет фиксированную продолжительность, однако динамика игры описывается в § 9.1 при помощи стохастического процесса на «дереве событий». В конце работы в § 9.3.1 приводится иллюстративный пример игры трех лиц на дереве событий.

Теорема 9.3.1. Пусть

$$\beta_j\left(x^*\left(n_l^t\right)\right) = Sh_j\left(x^*\left(n_l^t\right)\right) - \sum_{n_k^{t+1} \in \mathcal{S}(n_l^t)} \pi(n_k^{t+1} | n_l^t) Sh_j\left(x^*\left(n_k^{t+1}\right)\right),$$

$$t = 0, \ldots, T-1, \quad (45)$$

$$\beta_j\left(x^*\left(n_l^T\right)\right) = Sh_j\left(x^*\left(n_l^T\right)\right). \tag{46}$$

Тогда вектор $(\beta_1\left(x^*\left(n_l^t\right)\right), \ldots, \beta_m\left(x^*\left(n_l^t\right)\right))$ является динамически устойчивой ПРД.

Заключение содержит обзор полученных результатов.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Громова Е. В., Петросян Л. А. Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения, 7:4, 2015, С. 19–39.**
2. **Громова Е. В., Петросян Л. А. Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами // Управление большими системами, в.55, 2015, С. 140–159.**
3. **Костюнин С. Ю, Палестини А., Шевкопляс Е. В. Об одной дифференциальной игре, моделирующей разработку невозобновляемого ресурса // Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. 10, Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2013, № 3, С. 73–82.**
4. **Костюнин С. Ю, Шевкопляс Е. В. Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. 10, Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2011, № 4, С. 47–56.**
5. **Петросян Л. А., Громова Е. В. Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх // Тр. ИММ УрО РАН, 20(3), 2014, С. 193–203.**
6. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр – СПб: БХВ-Петербург, 2012, – 424 с.
7. **Петросян Л. А., Баранова Е. М., Шевкопляс Е. В. Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью // Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, Сборник науч. трудов «Оптимальное управление и дифференциальные игры» в Тр. Инст. мат-ки и мех-ки, Т. 10, № 2, 2004, С. 116–130.**
8. **Петросян Л. А., Шевкопляс Е. В. Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью // Вестн. С.-Петерб. ун-та, Сер. 1: Математика, механика, астрономия, 2000, Вып. 4, С. 18–23.**
9. **Шевкопляс Е. В. Оптимальные решения в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Современная математика. Фундаментальные направления, 2011, Т. 42, С. 235–243.**
10. **Шевкопляс Е. В. Устойчивая кооперация в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Математическая теория игр и ее приложения, 2010, Т. 2, № 3, С. 79–105.**

11. Шевкопляс Е. В. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Управление большими системами, 26.1, М.: ИПУ РАН, 2009, С. 385–408.

12. Шевкопляс Е. В. О построении характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх со случайной продолжительностью //Труды Межд. семинара "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби посвященного 60-летию академика А.И.Субботина. Изд-во Уральского ун-та, Екатеринбург, 2006, № 1, С. 285–293.

13. Шевкопляс Е. В. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для кооперативных дифференциальных игр со случайной продолжительностью // Труды международной конференции «Устойчивость и процессы управления», 2005, Т. 1, С. 630–639.

14. Шевкопляс Е. В. Кооперативные многошаговые игры со случайным числом шагов // Труды XXXI научной конференции "Процессы управления и устойчивость". СПбГУ, 2000, С. 501–504.

15. Шевкопляс Е. В. Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью // Труды XXX научной конференции "Процессы управления и устойчивость". СПбГУ, 1999, С. 547–551.

16. Gromova E. The Shapley value as a sustainable cooperative solution in differential games of 3 players // Recent Advances in Game Theory and Applications. Birkhauser, Springer Int. Publishing, 2016, P. 67–89.

17. Gromova E., Lopez-Barrientos J.D. A differential game model for the extraction of non-renewable resources with random initial times: The cooperative and competitive cases // International Game Theory Review, 2016, Vol. 2, № 18, 1640004, – 19 p.

18. Gromova E., Malakhova A., Gromov. D. Risk and Deviation Measures for a Class of Optimal Control Problems with Random Time Horizon // 2016 SICE International Symposium on Control Systems, art. no. 7470165, 2016.

19. Gromova E., Petrosjan O. Control of Information Horizon for Cooperative Differential Game of Pollution Control // Proceedings of the Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), 2016, P. 1–4.

20. Gromova E. V. , Tur A.V., Balandina L.I. A game-theoretic model of pollution control with asymmetric time horizons // Contributions to Game Theory and Management, 2016, Vol. 9, P. 170–179.

21. Gromova E. V., Tur A.V. Differential Game of Pollution Control with Random Terminal Instants // Abstracts of the tenth International Conference on Game Theory and Management (GTM2016), – 53 p.

22. Gromova E., Plekhanova K. A differential game of pollution control with participation of developed and developing countries // Contributions to Game Theory and Management, 8, 2015, P. 64–83.

23. Gromov D., Gromova E. Differential games with random duration: A hybrid systems formulation // Contributions to Game Theory and Management, 7, 2014, P. 104–119.

24. Kostyunin S., Palestini A., Shevkoplyas E. On a nonrenewable resource extraction game played by asymmetric firms // SIAM Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 163, No. 2, 2014, P. 660–673.
25. Kostyunin S., Palestini A., Shevkoplyas E. A differential game-based approach to extraction of exhaustible resource with random terminal instants // Contributions to Game Theory and Management, 2012, № 5, P. 147–155.
26. Kostyunin S., Palestini A., Shevkoplyas E. Differential game of resource extraction with random time horizon and different hazard functions // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й междунар. науч. конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 571–576.
27. Jørgensen S., Gromova E. Sustaining Cooperation in a Differential Game of Advertising Goodwill Accumulation // European Journal of Operational Research, 2016, Vol. 254, № 1, P. 294–303.
28. Marín-Solano J. , Shevkoplyas E. Non-constant discounting and differential games with random time horizon // Automatica, 47(12), 2011, P. 2626–2638.
29. Petrosjan L. A., Shevkoplyas E. V. Cooperative solutions for games with random duration // Game Theory and Applications, 2003, Vol. 9, P. 125–139.
30. Reddy P. V. , Shevkoplyas E. V., Zaccour G. Time-consistent Shapley value for games played over event trees // Automatica, 2013, Vol. 49, № 6, P. 1521–1527.
31. Shevkoplyas E. V. , Kostyunin S. Yu. A Class of Differential Games with Random Terminal Time // Game Theory and Applications. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2013, Vol. 16, P. 177–192.
32. Shevkoplyas E. V. Feedback Solution for Class of Differential Games with Random Duration// Game Theory and Applications. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012, Vol. 15, P. 191–202.
33. Shevkoplyas E. V. The Shapley Value in cooperative differential games with random duration // Advances in Dynamic Games, V. 11., part 4, M. Breton and K. Szajowski (Eds.), Springer's imprint Birkhauser, Boston, 2011, P. 359–373.
34. Shevkoplyas E. V. , Kostyunin S. Yu. Modeling of Environmental Projects under Condition of a Random Time Horizon // Contributions to game theory and management, 2011, Vol. 4, P. 447–459.
35. Shevkoplyas E. V.. Time-consistency problem under condition of a random game duration in resource extraction // Contributions to game theory and management, 2008, Vol. 2, P. 461–473.
36. Shevkoplyas E. V. A game theoretic model of nonrenewable resources with random duration// Proceedings of the Second International Conference on Game Theory and Applications, 2007, P. 43–45.
37. Shevkoplyas E. V. On the construction of the Characteristic Function in Cooperative Differential Games with Random Duration // Contributions to Game Theory and Management, 2007, Vol. 1, P. 460–477.
38. Wrzaczek S., Shevkoplyas E., Kostyunin S. A differential game of pollution control with overlapping generations // International Game Theory Review, 2014, Vol. 16, № 3, P. 1–14.