САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Дмитриев Алексей Валерьевич

Стохастические и асинхронные методы решения систем уравнений (с приложениями к задачам финансовой математики)

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена на *кафедре статистического моделирования математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.*

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,*
профессор ЕРМАКОВ Сергей Михайлович

Официальные оппоненты: *доктор технических наук,*
профессор ШИЧКИНА Юлия Александровна,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

доктор физико-математических наук,
СИМОНОВ Николай Александрович,
старший научный сотрудник
Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Ведущая организация: *Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого*

Защита состоится «____» ____________ 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 212.232.49* при *Санкт-Петербургском государственном университете*, расположенном по адресу: *199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33, ауд. 74.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *им. Горького Санкт-Петербургского государственного университета*, расположенной по адресу *199034, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетская наб., д.7/9.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, проф. Чурин Ю.В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. При решении многих прикладных задач физики, биологии, финансовой математики и других дисциплин зачастую не удаётся найти их явное решение. По этой причине возникает необходимость использования приближенных методов, после применения которых исходная задача часто сводится к решению систем уравнений большой размерности.

Решение таких задач в силу их сложности целесообразно проводить на многопроцессорных системах, что налагает определенные ограничения на класс используемых алгоритмов. Такие алгоритмы должны обладать свойством параллелизма и эффективно использовать ресурсы вычислительных систем. Алгоритмы, пригодные для использование на многопроцессорных системах, можно разделить на два типа: синхронные и асинхронные.

При использовании параллельных алгоритмов так или иначе возникает необходимость координировать действия процессоров. В случае синхронных алгоритмов эта координация осуществляется путем разделения алгоритма на общие для всех процессоров этапы. На каждом этапе процессоры производят ряд операций, зависящих от результатов вычислений на предыдущих этапах. Переход к следующему этапу осуществляется только после того, как все процессоры выполнили назначенные им в рамках этапа операции. Обмен результатами вычислений между процессорами, другими словами – синхронизация, происходит в конце этапа. Некоторые процессоры при этом могут быстрее других справляться с теми операциями, которые назначены им на текущем этапе, и в результате будут, простаивая, ожидать завершения этапа.

В асинхронных алгоритмах нет этапов общих для всех процессоров, а есть свои собственные этапы для каждого процессора. Процессорам разрешается вычислять быстрее и совершать больше итераций, чем могут совершить другие процессоры. Тот факт, что такие алгоритмы эффективно загружают систему и имеют потенциальное преимущество в скорости, делает их объектом исследования.

Так например, в работах [4], [5] были предложены асинхронные варианты метода простых итераций для решения систем уравнений. В этих работах приведены достаточные условия, при которых асинхронные итерации сходятся к решению задачи, однако эти условия довольно ограничительные, и, как было показано в диссертации, в некоторых случаях удаётся построить асинхронные алгоритмы, гарантирующий сходимость и при более слабых условиях.

Естественными свойствами асинхронности обладают также многие разновидности метода Монте-Карло для решения систем уравнений. Исследованию вопроса применения метода Монте-Карло посвящено достаточно много работ различных авторов (см., например, работы С.М. Ермакова, Г.А. Михайлова, Дж. Холтона и др.).

Цель диссертационной работы:

- исследование метода асинхронных итераций для задач, не удовлетворяющих достаточным условиям сходимости, указанным в [4], [5];
- построение оценок метода Монте-Карло для решения систем уравнений с использованием многопроцессорных систем, исследование вопросов их стохастической устойчивости;
- построение оценок метода Монте-Карло, обладающих свойством асинхронности, для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности;
- применение разработанных алгоритмов для численного решения задачи нахождения цены американского опциона.

Методы исследования. В работе применяются методы статистического моделирования, теории вероятностей, функционального анализа, линейной алгебры и общая теория методов Монте-Карло. Численные эксперименты проводились в статистическом пакете R совместно с программной реализацией на языке C.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты являются математически обоснованными и могут успешно применяться для решения широкого класса задач, так или иначе сводящихся к решению систем уравнений, на многопроцессорных вычислительных системах. Полученные теоретические результаты могут послужить основой для дальнейших исследований асинхронных детерминированных и стохастических асинхронных методов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры статистического моделирования математико-механического факультета СПбГУ, а также на международных конференциях:

- Seventh International Workshop on Simulation, Римини, Италия, Май 21-25, 2013;
- Ninth IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, Аннеси-ле-Вьё, Франция, Июль 15-19, 2013.

Работа над диссертацией была поддержана грантом РФФИ № 14-01-00271-а.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликованы работы [1], [2] и [3] в научных изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК. В статье [1] Ермаковым С.М. была поставлена задача и предложен метод её решения, а реализация метода, получение оценок метода Монте-Карло, исследование их свойств и проведение численных экспериментов полностью выполнено диссертантом. В статье [2] соискателем были доказаны лемма 1 об оценке погрешности при использовании асинхронных итераций и теорема 1 о сходимости метода частичной синхронизации, предложены оценки метода Монте-Карло в случае частичной синхронизации, сформулированы и доказаны теоремы 3 и 4 о достаточных условиях стохастической устойчивости предложенных методов. В статье [3] соискателем был построен пример расходимости асинхронных итераций для случая нелинейной системы, были сформулированы и доказаны лемма 2 об оценке погрешности при использовании асинхронных итераций для нелинейных систем уравнений и теорема 6 о сходимости метода частичной синхронизации в случае нелинейных систем уравнений.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 125 страниц, из них 120 страницы текста, включая 20 рисунков. Библиография включает 52 наименования на 5 страницах.

Содержание работы

В диссертации рассматривается задача нахождения неподвижной точки

$$x = F(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбец неизвестных, $F = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ – оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. В основе предлагаемых в диссертации методов лежит метод простой итерации

$$x_i(t+1) = f_i(x(t)),\ i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где $x(t)$, $t = 0, 1, \dots$ – последовательность векторов из $\mathbb{R}^n$. При выполнении определенных условий (см. [6]) на оператор F итерации (2) сходятся к неподвижной точке оператора F.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов.

В первой главе производится исследование асинхронных итераций и метода Монте-Карло для решения систем уравнений. В начале первой главы дается обзор встречающихся в литературе результатов, связанных с введением и использованием метода асинхронных итераций для решения различных задач.

В первом параграфе даётся определение асинхронных итераций, формулируются известные и полученные автором результаты.

Предположим, что множество $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ – это множество моментов времени, в которые одна или несколько компонент x_i вектора x обновляются согласно (2) некоторым процессором распределенной вычислительной системы. Обозначим через T^i множество моментов времени, в которые происходит обновление x_i.

В многопроцессорной системе процессор, обновляющий компоненту x_i, не всегда имеет актуальную информацию по другим компонентам вектора x, поэтому в асинхронном случае допускается использование устаревшей информации. Этот факт можно записать в следующем виде

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(\tau_1^i(t)), \ldots, x_n(\tau_n^i(t))), \ \forall t \in T^i,$$

где $\tau_j^i(t)$ – моменты времени, удовлетворяющие $\forall t \in T$ неравенству

$$0 \leq \tau_j^i(t) \leq t, \ j = 1, \ldots, n.$$

Для всех моментов $t \notin T^i$ считаем, что x_i не обновляется $x_i(t+1) = x_i(t)$.

Разница $(t - \tau_j^i(t))$ между текущим временем t и временем $\tau_j^i(t)$, когда процессором, обновляющем x_i, в последний раз была получена информация о компоненте x_j, рассматривается как задержка в передаче информации.

Отсутствие задержек, связанных с ожиданием других процессоров, способствует эффективной загруженности всей системы, однако может привести к расходимости таких итераций.

Для систем линейных уравнений

$$x = Ax + b \tag{3}$$

известно (см. [4]), что условие

$$\lambda_1(|A|) < 1 \tag{4}$$

является необходимым и достаточным для сходимости асинхронных итераций при любых начальных условиях.

Автором исследуются линейные системы, не удовлетворяющие условию (4). Согласно указанному результату, если обычный (синхронный) процесс сходится – $|\lambda_1(A)| < 1$, но $\lambda_1(|A|) > 1$, то по крайней мере асинхронные итерации некоторого вида обязательно расходятся.

В диссертации предлагается использовать алгоритм с частичной синхронизацией, который после каждых m асинхронных итераций, использует l

обычных. Получены оценки сверху скорости сходимости этого комбинированного процесса. Имеет место

Теорема 1. *Если итерационный процесс состоит из последовательности групп m асинхронных итераций и затем l синхронных, то при достаточно большом l он сходится. При этом сходится не медленнее, чем процесс с геометрической сходимостью с параметром $\lambda_\varepsilon \left(\frac{\|A\|}{\lambda_\varepsilon}\right)^{\frac{m}{m+l}}$ для произвольного λ_ε, удовлетворяющего неравенству $|\lambda_1(A)| < \lambda_\varepsilon < 1$.*

В алгоритмах, где чередуются m асинхронных и l синхронных итераций, и при выбранном соотношении m и l итерации сходятся к искомому решению, будем называть сумму $m + l$ **периодом асинхронности**.

В диссертации получено обобщение теоремы 1 на случай нелинейных систем (1), для которых сходится метод простой итерации, но при этом F не является n-сжимающим (см. [5]).

Во втором параграфе исследуются алгоритмы метода Монте-Карло для решения систем вида (1) и линейных систем (3), для которых $|\lambda_1(A)| < 1$, но $\lambda_1(|A|) > 1$.

Как известно (см. [7]), при условии (4) возможно вычисление решения линейной системы (3) при помощи асинхронного алгоритма метода Монте-Карло. То есть на различных процессорах моделируются траектории цепи Маркова, и вычисляются оценки на них, после чего оценки, полученные на всех процессорах, усредняются. Таким образом, условия несмещенности оценок метода Монте-Карло и сходимости асинхронных итераций совпадают, на что было обращено внимание в работе [8].

Как было показано в [7], нарушение условия (4) и использование асинхронного алгоритма приводит к стохастической неустойчивости – экспоненциальному росту дисперсии. Эта трудность, вообще говоря, может быть преодолена за счёт увеличения вычислительной работы, но её экспоненциальный рост делает алгоритм нереализуемым. Альтернативой является запоминание промежуточных результатов – синхронизация.

Предлагается в случае $\lambda_1(|A|) > 1$ использовать смешанный алгоритм с частичной синхронизацией. В диссертации доказывается лемма, являющаяся обобщением леммы из [7], которая описывает поведение ковариации случайной ошибки с ростом числа итераций.

Рассматривается итерационный процесс $y(j)$ с начальным вектором $y(0)$ и

$$y(j) = By(j-1) + d,\ j = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

где B – матрица $n \times n$, а d – вектор длины n. Пусть при каждом j вычисление слагаемых в правой части (5) происходит с помощью рандомизированной процедуры. Таким образом, вместо последовательности $y(j)$ возникает последовательность случайных векторов $\Xi(j) = (\xi_1(j), \dots, \xi_n(j))^T$, $j = 0, 1, 2, \dots$ с начальным вектором $\Xi(0)$, связанных соотношением

$$\Xi(j) = \mathbb{B}_j \Xi(j-1) + \mathbb{D}(j) \tag{6}$$

где $\mathbb{B}_j = \|\beta_{i,k}\|_{i,k=1}^n$ – случайные матричные операторы, $\mathbb{D}(j)$ – случайные векторы. При этом для любого натурального j выполнено $\mathbb{E}\Xi(j) = y(j) = (y_1(j), \dots, y_n(j))^T$, $\mathbb{E}\mathbb{B}_j = B$, $\mathbb{E}\mathbb{D}(j) = d$.

Следующая лемма определяет характер поведения ковариации векторов ошибок $\mathcal{E}(j) = \Xi(j) - y(j)$.

Лемма 1. *Пусть случайные операторы $\mathbb{B}_j$, векторы $\mathbb{D}(j)$ и $\Xi(k)$ независимы в совокупности при любых $j = 0, 1, 2, \dots$ и $k < j$, в том смысле, что случайные величины α_1, α_2, α_3, где α_1 – произвольный элемент оператора $\mathbb{B}_j$, α_2 – произвольный элемент $\mathbb{D}(j)$, α_3 – произвольный элемент $\Xi(k)$, независимы в совокупности. Тогда для матрицы ковариации вектора $\mathcal{E}(j)$ справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} vec\, cov\mathcal{E}(j) =& B \otimes B vec\, cov\mathcal{E}(j-1) + \mathbb{E}(\Delta_j \otimes \Delta_j) vec\, cov\mathcal{E}(j-1) + \\ &+ \mathbb{E}(\Delta_j \otimes \Delta_j) vec(y(j-1)y(j-1)^T) + vec\, cov\delta(j), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\Delta_j = \mathbb{B}_j - B$, $\delta(j) = \mathbb{D}(j) - d$, vec – операция векторизации матрицы, а $\otimes$ – операция кронекеровского произведения матриц.

Доказанная лемма позволяет оценить период асинхронности алгоритма метода Монте-Карло с запоминанием.

Можно предложить разные оценки метода Монте-Карло, реализующие предложенный подход с чередованием синхронных и асинхронных методов. Автором приводится ряд простых в реализации оценок для решения системы (3) при условиях $|\lambda_1(A)| < 1$, но $\lambda_1(|A|) > 1$ и исследуются их свойства. Доказываются теоремы, гарантирующие их стохастическую устойчивость.

Во второй части параграфа рассматриваются методы Монте-Карло для решения нелинейных систем размерности $n \in \mathbb{N}$, уравнениями в которой являются полиномы степени, не превосходящей $m > 0$, следующего вида

$$x_i = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} K_{i\alpha} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},\ i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $K_{i\alpha}$ – заданные константы, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, для которых выполнено неравенство $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq m$.

Оценки метода Монте-Карло для решения системы (8) строятся на ветвящихся траекториях, которые интерпретируются как процесс эволюции популяции частиц. Для формального описания результатов в диссертации используется развитый математический аппарат теории ветвящихся процессов (см., например, [9]).

В диссертации построены несмещенные оценки решения системы (8) и исследованы их свойства. Как и в случае с линейными системами процесс вычисления оценки решения без труда распараллеливается путем распределения моделируемых ветвящихся траекторий по разным процессорам.

Первая глава заканчивается серией численных экспериментов, демонстрирующих работу предложенных оценок и алгоритмов.

Результаты первой главы опубликованы в работах [2], [3].

Во второй главе результаты первой главы обобщаются на случай больших систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка размерности $n \in \mathbb{N}$, записанная в векторной форме

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{9}$$

где $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ – искомая вектор-функция, $t \in \mathbb{R}$, $f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), \dots, f_n(t,x))^T$ – оператор из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$. С заданным начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Относительно функций $f_i(t,x), i = 1, \dots, n$ предполагается, что они непрерывны на области определения. Точно так же будет предполагаться, что частные производные

$$\frac{\partial f_i(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}, i, j = 1, \dots, n$$

существуют и непрерывны на области определения.

Система дифференциальных уравнений (9) заменяется на эквивалентную систему интегральных уравнений

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau + c(t), \tag{10}$$

где $K(t,\tau)$ – матричная функция, $g(t, x(t)), c(t)$ – заданные вектор-функции. После такого преобразования система интегральных уравнений (10) решается методом Монте-Карло.

Дальнейшее исследование системы (10) разбивается на две части: первая посвящена интегральным уравнениям с полиномиальной нелинейностью, а вторая – уравнениям, которые приближаются полиномами.

Первая часть содержится во втором параграфе. Рассматриваются системы интегральных уравнений с полиномиальной нелинейностью вида

$$x_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)} K_i^{\alpha}(t,\tau) x_1^{\alpha_1}(\tau) \dots x_n^{\alpha_n}(\tau) d\tau + K_i^{(0,\dots,0)}(t),\ i = 1, \dots, n, \tag{11}$$

где $\{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$ – векторы с целочисленными неотрицательными компонентами, для которых выполнено неравенство $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le m$.

Оценки метода Монте-Карло решения системы (11) строятся на ветвящихся траекториях, интерпретируемых как процесс эволюции популяции частиц, в котором продолжительность жизни каждой частицы является случайной величиной.

Подобные ветвящиеся процессы описываются например в [9] и [10]. Отличительной особенностью рассматриваемого ветвящегося процесса будет то, что время имеет обратный ход. Другими словами, частица, родившаяся в момент времени $t > t_0$, погибнет в момент времени из промежутка $[t, t_0]$.

В диссертации получены оценки решения системы (11), являющиеся несмещенными и простыми для реализации. Однако условия на сходимость мажоритарного итерационного процесса налагают серьезные ограничения на их использование. Такое препятствие можно преодолеть за счет уменьшения интервала интегрирования и использования последовательного метода Монте-Карло с запоминанием.

Вводится сетка с шагом Δt на отрезке $[t_0, t]$: $t_0 = t_0, t_{k+1} = t_k + \Delta t, k = 1, \ldots, M-1$, а $t_M = t$. Такая процедура есть не что иное, как синхронизация, а выбор Δt зависит от вида оператора.

Далее применяется алгоритм метода Монте-Карло последовательно для каждого t_k, где начальным условием для уравнения будет результат алгоритма для момента t_{k-1}. С ростом k дисперсия оценки может экспоненциально расти, что при большом числе итераций может привести к стохастической неустойчивости. В диссертации показывается, что поведение ковариации ошибки метода с ростом k определяется линейным оператором

$$\exp\left\{\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f_x(\tau, x^*(\tau))d\tau\right\},$$

где $x^*(t)$ – точное решение задачи (11), $f_x(\tau, x^*(\tau))$ – матрица Якоби для f по x, а операция интегрирования поэлементная. Далее формулируются и доказываются достаточные условия стохастической устойчивости предложенного последовательного метода Монте-Карло.

В третьем параграфе рассматривается системы (10), которые с любой заданной точностью могут быть приближены системами с полиномиальной нелинейностью. В результате такой замены возникает дополнительная погрешность, оценка которой приводится в диссертации.

Вторая глава завершается серией численных экспериментов, в которых предложенными методами решается матричное уравнение Риккати, играющее важную роль в вариационном исчислении и в квантовой теории поля,

$$\frac{dX}{dt} = XA(t)X + B_1(t)X + XB_2(t) + C(t), X(t_0) = X_0$$

где X – матрица неизвестных размерности $n \times n$, $A(t), B_1(t), B_2(t), C(t)$ – заданные матрицы, зависящие от t, размерности $n \times n$.

В третьей главе метод Монте-Карло применяется для решения задачи оценки стоимости американского опциона, которая является одной из трудных задач в теории опционов. Показывается применимость результатов первой главы.

В первом параграфе приводятся основные сведения про опционы и их виды. Во втором параграфе описывается уравнение Блэка-Шоулза, на основе которого строятся методы оценки американского опциона

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} - rU = 0,$$

где t — время, S — цена акции, $U = U(S,t)$ — цена опциона, σ — постоянная волотильность, r — безрисковая ставка.

В качестве методов оценки стоимости американских опционов в диссертации рассматривается метод подвижной границы (см. [11]) в третьем параграфе и метод штрафных функций (см. [11]) в четвёртом параграфе.

Параллелизм методов Монте-Карло, используемых для нахождения цены опциона, исследуется для однофакторных моделей, однако это обстоятельство не является существенным ограничением при переносе предлагаемых методов на многофакторные модели.

Для уравнений в частных производных, полученных после применения метода штрафных функций или метода подвижной границы, на их области определения вводится сетка, и применяется метод конечных разностей. После чего задача преобразуется к системе нелинейных уравнений, однако ее можно свести к последовательному решению систем линейных уравнений.

Для случая штрафных функций предложенные в первых главах оценки метода Монте-Карло позволяют построить асинхронные алгоритмы для нахождения стоимости американского опциона. Как упоминалось ранее, использование последовательного метода Монте-Карло чревато явлением стохастической неустойчивость. В связи с этим в третьей главе приводятся достаточные условия стохастической устойчивости предлагаемых процедур.

В диссертации показана нецелесообразность использования рандомизированного метода Ньютона в случае, когда цена опциона ищется при помощи метода подвижной границы.

Глава завершается серией численных экспериментов.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [1].

В заключении подводятся итоги диссертационного исследования. Полученные результаты позволяют решать широкий спектр прикладных задач из различных областей науки, предоставляя при этом возможность эффективно использовать многопроцессорные вычислительные системы.

Список публикаций

1. Дмитриев А.В., Ермаков С.М. Параллельный Монте-Карло метод оценки американских опционов // Вестник СПбГУ, Серия 1, Выпуск 1. 2013. С. 72–82.

2. Дмитриев А.В., Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и асинхронные итерации // Вестник СПбГУ, Серия 1, Том 1 (59) Выпуск 4. 2014. С. 517–528.

3. Дмитриев А.В., Ермаков С.М. О частичной синхронизации итерационных методов // Вестник СПбГУ. 2016. Т. 3 (61), № 3. С. 393–401.

Цитированная литература

4. Chazan D., Miranker W. Chaotic relaxation // Linear Algebra and its Applications. 1969. Vol. 2, no. 2. P. 199–222.

5. Baudet G. M. Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors // J. ACM. 1978. Vol. 25, no. 2. P. 226–244.

6. Дж. Ортега, В. Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Мир, 1975. С. 560.

7. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике (Вводный курс). Невский Диалект, Бином. Лаборатория знаний, 2009. С. 192.

8. Ермаков С.М. Метод Монте Карло и асинхронные вычисления // Тезисы 1-ой международной конференции общества Бернулли. Т. 6. 1987. С. 462.

9. Севастьянов Б. А. Теория ветвящихся случайных процессов // УМН. 1951. Т. 6. С. 47–99.

10. Harris T. E. The theory of branching processes: Tech. rep. Berlin, Gottingen, Heidelberg: 1963.

11. Nielson B.F, Skavhaug O., Tvelto A. Penalty and front-fixing methods for the numerical solution of American option problems // J. Comp. Finan. 2002. no. 4.

Подписано в печать 28.03.2017. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$

Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 1,00. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано в Издательстве ВВМ.

198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.