ЧИСЛА СТИРЛИНГА

В. Н. Малозeмов
(Доклад на семинаре 7.09.1999)

1°. Числа Стирлинга первого рода $\{\alpha_{mk}\}$, $k \in 1:m$, $m = 1,2,\ldots$, определяются как коэффициенты разложения

$$q_m(x) := x(x-1)\cdots(x-m+1) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k}\,\alpha_{mk}\,x^k. \tag{1}$$

Поскольку $q_1(x) = x$, $q_2(x) = x(x-1)$, то

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\alpha_{mk} = (m-1)\,\alpha_{m-1,k} + \alpha_{m-1,k-1}, \quad k \in 2:m-1, \tag{3}$$

$$\alpha_{m1} = (m-1)!\,, \quad \alpha_{mm} = 1, \quad m = 3,4,\ldots \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что $\alpha_{mm} = 1$. Далее

$$(-1)^{m-1}\,\alpha_{m1} = q_m'(0) = \bigl\{x[(x-1)\cdots(x-m+1)]\bigr\}'_{x=0} = (-1)^{m-1}\,(m-1)!\,,$$

откуда следует, что $\alpha_{m1} = (m-1)!\,$.

Теперь запишем

$$q_m(x) = q_{m-1}(x)\,(x-m+1) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-1-k}\,\alpha_{m-1,k}\,x^{k+1} +$$

$$+(m-1)\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k}\,\alpha_{m-1,k}\,x^k = \alpha_{m-1,m-1}\,x^m +$$

$$+\sum_{k=2}^{m-1} (-1)^{m-k}\,[\alpha_{m-1,k-1} + (m-1)\,\alpha_{m-1,k}]\,x^k + (-1)^{m-1}\,(m-1)\,\alpha_{m-1,1}\,x.$$

Сравнив это с (1), получим (3). ■

Соотношения (2)–(4) позволяют построить таблицу чисел Стирлинга первого рода при $m \in 1:6$.

$m \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
6	120	274	255	85	15	1

Отметим, что при $m \geq 2$
$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k}\, \alpha_{mk} = 0.$$
Чтобы убедиться в этом, достаточно положить в (1) $x = 1$.

Можно расширить понятие чисел Стирлинга первого рода, приняв $\alpha_{mk} = 0$ при $k \notin 1 : m$, $k \in \mathbb{Z}$. В этом случае вся таблица $\{\alpha_{mk}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $k \in \mathbb{Z}$, будет определяться первой строкой $\ldots 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$ и рекуррентным соотношением
$$\alpha_{mk} = (m-1)\, \alpha_{m-1,k} + \alpha_{m-1,k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 2, 3, \ldots$$

2°. Числа Стирлинга второго рода $\{\beta_{mk}\}$, $k \in 1 : m$, $m = 1, 2, \ldots$, определяются как коэффициенты разложения
$$x^m = \sum_{k=1}^{m} \beta_{mk}\, x(x-1)\cdots(x-k+1) =$$
$$= \beta_{m1}\, x + \beta_{m2}\, x(x-1) + \ldots + \beta_{mm}\, x(x-1)\cdots(x-m+1). \tag{5}$$
Очевидно, что
$$\beta_{11} = 1, \quad \beta_{21} = \beta_{22} = 1. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо рекуррентное соотношение*
$$\beta_{mk} = k\, \beta_{m-1,k} + \beta_{m-1,k-1}, \quad k \in 2 : m-1, \tag{7}$$
$$\beta_{m1} = \beta_{mm} = 1, \quad m = 3, 4, \ldots \tag{8}$$

Доказательство. Положив в (5) $x = 1$, получим $\beta_{m1} = 1$. Из (5) следует также, что $\beta_{mm} = 1$. Поскольку
$$x^2\,(x-1)\ldots(x-k+1) - x(x-1)\ldots(x-k) = k\, x(x-1)\ldots(x-k+1),$$
то
$$x^m = x^{m-1}\, x = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{m-1,k}\, [x(x-1)\cdots(x-k) + k\, x(x-1)\ldots(x-k+1)] =$$
$$= \beta_{m-1,m-1}\, x(x-1)\cdots(x-m+1) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{m-1} [\beta_{m-1,k-1} + k\, \beta_{m-1,k}]\, x(x-1)\cdots(x-k+1) + \beta_{m-1,1}\, x.$$
Сравнив это с (5), придем к (7). ■

Соотношения (6)–(8) позволяют построить таблицу чисел Стирлинга второго рода при $m \in 1 : 6$.

$m \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

Формула (5) является по существу представлением полинома x^m в ньютоновой форме. Коэффициенты такого представления можно записать с помощью разделенных разностей:

$$\beta_{mk} = x^m[0, 1, \ldots, k] = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \, C_k^s \, (k-s)^m, \quad k \in 1 : m. \tag{9}$$

Тем самым для чисел Стирлинга второго рода указан явный вид.

Далее, согласно (1) и (5) имеем

$$q_m(x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \, \alpha_{mk} \Big\{ \sum_{s=1}^{k} \beta_{ks} \, q_s(x) \Big\} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \Big\{ \sum_{k=s}^{m} (-1)^{m-k} \, \alpha_{mk} \, \beta_{ks} \Big\} \, q_s(x).$$

Слагаемое в правой части при $s = m$ равно $q_m(x)$. Учитывая это, приходим к тождеству

$$\sum_{s=1}^{m-1} \Big\{ \sum_{k=s}^{m} (-1)^{m-k} \, \alpha_{mk} \, \beta_{ks} \Big\} \, q_s(x) \equiv 0,$$

из которого следует, что

$$\sum_{k=s}^{m} (-1)^{m-k} \, \alpha_{mk} \, \beta_{ks} = 0, \quad s \in 1 : m-1.$$

Можно расширить понятие чисел Стирлинга второго рода, положив $\beta_{mk} = 0$ при $k \notin 1 : m$, $k \in \mathbb{Z}$. В этом случае таблица $\{\beta_{mk}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $k \in \mathbb{Z}$, будет определяться первой строкой $\ldots 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$ и рекуррентным соотношением

$$\beta_{mk} = k \, \beta_{m-1,k} + \beta_{m-1,k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 2, 3, \ldots$$

3°. Числа Стирлинга второго рода появляются в формуле для моментов биномиального распределения.

ТЕОРЕМА 3. *При* m, $n = 1, 2, \dots$ *справедливо тождество*

$$\sum_{j=0}^{n} j^m \, C_n^j \, x^j \, (1-x)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} k! \, C_n^k \, \beta_{mk} \, x^k. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим более общее тождество

$$\sum_{j=0}^{n} y(j) \, C_n^j \, x^j \, (1-x)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \Delta^k y(0) \, \beta_{mk} \, x^k, \tag{11}$$

где $\{y(j)\}$ — произвольная числовая последовательность и

$$\Delta^k y(0) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \, C_k^s \, y(k-s)$$

— конечная разность k-го порядка. Имеем

$$B_n(x) := \sum_{j=0}^{n} y(j) \, C_n^j \, x^j \, (1-x)^{n-j} = \sum_{l=0}^{n} y(n-l) \, C_n^l \, x^{n-l} \, (1-x)^l =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} y(n-l) \, C_n^l \, x^{n-l} \sum_{s=0}^{l} (-1)^{l-s} \, C_l^s \, x^{l-s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \Big(\sum_{l=s}^{n} (-1)^{l-s} \, C_n^l \, C_l^s \, y(n-l) \Big) \, x^{n-s}.$$

Поскольку $C_n^l \, C_l^s = C_n^s \, C_{n-s}^{l-s}$, то

$$B_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \Big(\sum_{l=s}^{n} (-1)^{l-s} \, C_{n-s}^{l-s} \, y(n-l) \Big) \, C_n^s \, x^{n-s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{l=n-k}^{n} (-1)^{l+k-n} \, C_k^{l+k-n} \, y(n-l) \Big) \, C_n^k \, x^k.$$

Остается учесть, что

$$\sum_{l=n-k}^{n} (-1)^{l+k-n} \, C_k^{l+k-n} \, y(n-l) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \, C_k^s \, y(k-s) = \Delta^k y(0).$$

Формула (11) доказана.

Подставим в (11) $y(j) = j^m$. Для этой последовательности

$$\Delta^k y(0) = k! \, \beta_{mk}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{12}$$

Действительно, при $k = 0$ равенство очевидно, при $k \in 1 : m$ следует из (9), при $k \geq m+1$ в обеих его частях стоят нули. На основании (11) и (12) приходим к (10). ■

Формулу (10) можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^{n} j^m\, C_n^j\, x^j\, (1-x)^{n-j} = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} A_n^k\, \beta_{mk}\, x^k, \tag{13}$$

где A_n^k — число размещений из n по k. В частности, при $x = 1/2$ получаем

$$\sum_{j=0}^{n} j^m\, C_n^j = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} A_n^k\, 2^{n-k} \beta_{mk}, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Тождество (13) при $m \in 1 : 4$ установлено в [1, с. 140], в общем случае другим путем — в [2].

4°. В математической статистике используются так называемые логистические полиномы [3]. Они определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$P_n(x) = \frac{d}{dx}\big[x(1-x)\, P_{n-1}(x)\big], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$P_0(x) \equiv 1.$$

В частности, $P_1(x) = 1 - 2x$, $P_2(x) = 1 - 6x + 6x^2$.

ТЕОРЕМА 4. *При всех $n = 0, 1, \ldots$ справедливо явное представление*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, (k+1)!\, \beta_{n+1,k+1}\, x^k, \tag{15}$$

где $\beta_{n+1,k+1}$ — числа Стирлинга второго рода.

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ формула (15) очевидна. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к n.

Перепишем соотношение (14) в виде

$$P_n(x) = (1-2x)\, P_{n-1}(x) + x(1-x)\, P'_{n-1}(x).$$

В силу индукционного предположения имеем

$$P_n(x) = (1-2x) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, (k+1)!\, \beta_{n,k+1}\, x^k +$$

$$+ (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, (k+1)!\, \beta_{n,k+1}\, kx^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, (k+1)! \, (k+1) \, \beta_{n,k+1} \, x^k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, (k+2)! \, \beta_{n,k+1} \, x^{k+1} =$$

$$= \beta_{n1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \, (k+1)! \, \big[(k+1) \, \beta_{n,k+1} + \beta_{nk} \big] \, x^k + (-1)^n \, (n+1)! \, \beta_{nn} \, x^n .$$

Теперь (15) следует из (7) и (8). ∎

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций.* М.-Л.: ГТТИ, 1934. 316 с.

2. Коробкова М. Б. *Декартов базис чебышевского подпространства в* $C[a, b]$ *и дифференцирование по системам Чебышева и Маркова в* $C[a, b]$. Часть вторая. СПб. Изд-во СПбГТУ, 1999. 74 с.

3. George E. O., Rousseau C. C. *On the logistic midrange* // Ann. Inst. Statist. Math. 1987. Vol. 39. P. 627–635.