ПОЛИНОМЫ БЕРНУЛЛИ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

14 ноября 2009 г.

В книге В. И. Крылова [1, глава 1] теория полиномов Бернулли строится на основе производящей функции. В докладе мы достигаем той же цели с помощью гармонического анализа. При этом выводятся все формулы, связанные с полиномами Бернулли, которые указаны в большой Математической энциклопедии [2, с. 423].

1°. Будем использовать рекуррентное определение полиномов Бернулли:

$$B_0(x) \equiv 1$$

и при $n = 1, 2, \ldots$

$$B_n'(x) = n\, B_{n-1}(x), \tag{1}$$

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

В частности,

$$B_1(x) = x - \tfrac{1}{2}\,,$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6}\,.$$

Проинтегрируем обе части тождества (1) по отрезку $[0, x]$. Получим

$$B_n(x) = B_n(0) + n \int_0^x B_{n-1}(t)\, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$B_n(1) = B_n(0), \qquad n = 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

Это равенство выполняется и при $n = 0$. При $n = 1$ имеем

$$B_1(1) = \tfrac{1}{2}\,, \qquad B_1(0) = -\tfrac{1}{2}\,. \tag{4}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Отметим свойства полиномов Бернулли, которые непосредственно следуют из определения.

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ АРГУМЕНТОВ. *Справедлива формула*

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, B_k(y) \, x^{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{5}$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к n, $n \geqslant 2$.

Согласно (1) при фиксированном y имеем

$$\frac{d}{dx} \, B_n(x+y) = n \, B_{n-1}(x+y).$$

Проинтегрируем обе части этого тождества по отрезку $[0, x]$. Получим

$$B_n(x+y) = B_n(y) + n \int_0^x B_{n-1}(t+y) \, dt.$$

В силу индукционного предположения

$$\int_0^x B_{n-1}(t+y) \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \, B_k(y) \, \frac{x^{n-k}}{n-k} \, ,$$

поэтому

$$B_n(x+y) = B_n(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \, C_{n-1}^k \, B_k(y) \, x^{n-k}.$$

Учитывая, что $\frac{n}{n-k} \, C_{n-1}^k = C_n^k$, приходим к (5). $\square$

Подставим в (5) $y = 0$. Получим разложение полинома Бернулли по степеням x:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, B_k(0) \, x^{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

В частности,

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, B_k(0).$$

На основании (3) приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \, B_k(0) = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

Оно позволяет последовательно находить значения $B_1(0)$, $B_2(0)$, ...

Далее, согласно (5)

$$B_n(x+1) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big[B_k(1) - B_k(0)\big] x^{n-k}.$$

Принимая во внимание (3) и (4), получаем

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n\,x^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Вместе с тем, согласно той же формуле (5)

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k(x),$$

что вместе с (6) приводит к соотношению

$$n\,x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, B_k(x), \qquad n = 2, 3, \dots .$$

Это соотношение, наряду с (1), (2), позволяет последовательно вычислять полиномы Бернулли $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... Кроме того, оно представляет собой разложение степени x по полиномам Бернулли.

3°. Найдём разложение функций Бернулли $B_n(x)$ при $n \geqslant 2$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 1]$.

ТЕОРЕМА. *При $n \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$B_n(x) = -\,2\,n! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\big(2\pi s x - \frac{n\pi}{2}\big)}{(2\pi s)^n}\,, \qquad x \in [0, 1]. \tag{7}$$

Доказательство теоремы основано на двух леммах.

ЛЕММА 1. *При $k = 0, 1, \dots$ и натуральных s справедливы формулы*

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x) \sin 2\pi s x\; dx = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{(2\pi s)^{2k+1}}\,, \tag{8}$$

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x) \cos 2\pi s x\; dx = 0. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разберёмся сначала с полиномом $B_1(x)$ (случай $k = 0$). Интегрируя по частям и учитывая (1) и (4), при $s = 1, 2, \dots$ получаем

$$\int_0^1 B_1(x)\sin 2\pi sx\;dx = -\frac{1}{2\pi s}\,B_1(x)\cos 2\pi sx\,\Big|_0^1 = -\frac{1}{2\pi s}\,;$$

$$\begin{array}{r|l} B_1(x) = u & du = dx \\ \sin 2\pi sx\;dx = dv & v = -\dfrac{1}{2\pi s}\,\cos 2\pi sx \end{array}$$

$$\int_0^1 B_1(x)\cos 2\pi sx\;dx = -\frac{1}{2\pi s}\int_0^1 \sin 2\pi sx\;dx = 0.$$

$$\begin{array}{r|l} B_1(x) = u & du = dx \\ \cos 2\pi sx\;dx = dv & v = \dfrac{1}{2\pi s}\,\sin 2\pi sx \end{array}$$

База индукции построена. Сделаем индукционный переход от $k-1$ к k, $k \geqslant 1$. Согласно (3) имеем

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\sin 2\pi sx\;dx = \frac{2k+1}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\;dx; \tag{10}$$

$$\begin{array}{r|l} B_{2k+1}(x) = u & du = (2k+1)B_{2k}(x)\,dx \\ \sin 2\pi sx\;dx = dv & v = -\dfrac{1}{2\pi s}\,\cos 2\pi sx \end{array}$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\;dx = -\frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\sin 2\pi sx\;dx. \tag{11}$$

$$\begin{array}{r|l} B_{2k}(x) = u & du = 2k\,B_{2k-1}(x)\,dx \\ \cos 2\pi sx\;dx = dv & v = \dfrac{1}{2\pi s}\,\sin 2\pi sx \end{array}$$

На основании (10), (11) и индукционного предположения получаем

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\sin 2\pi sx\;dx = -\frac{2k(2k+1)}{(2\pi s)^2}\,\frac{(-1)^k\,(2k-1)!}{(2\pi s)^{2k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{(2\pi s)^{2k+1}}\,.$$

Аналогично

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\cos 2\pi sx\;dx = -\frac{2k+1}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\;dx,$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\;dx = \frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\cos 2\pi sx\;dx.$$

Согласно индукционному предположению последний интеграл равен нулю. Значит,

$$\int_0^1 B_{2k+1}(x)\cos 2\pi sx\;dx = 0.$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *При натуральных k и s справедливы формулы*

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\;dx = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{(2\pi s)^{2k}},$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\;dx = 0.$$

Доказательство. Согласно (8) и (9) имеем

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\;dx = -\frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\sin 2\pi sx\;dx =$$

$$= -\frac{2k}{2\pi s}\,\frac{(-1)^k\,(2k-1)!}{(2\pi s)^{2k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{(2\pi s)^{2k}},$$

$$\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\;dx = \frac{2k}{2\pi s}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\cos 2\pi sx\;dx = 0.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы при $n = 2k$, $k \geqslant 1$. Запишем ряд Фурье полинома $B_{2k}(x)$ на отрезке $[0,1]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty}(a_s\,\cos 2\pi sx + b_s\,\sin 2\pi sx),$$

где

$$a_s = 2\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi sx\;dx, \qquad b_s = 2\int_0^1 B_{2k}(x)\sin 2\pi sx\;dx.$$

В силу (2) и леммы 2 ряд Фурье принимает вид

$$\frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi sx}{s^{2k}}\,.$$

Этот ряд при $k \geqslant 1$ сходится равномерно. Воспользуемся следующим утверждением (см., например, [3, с. 68]):

если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[0,1]$ *функции* $f(x)$ *сходится равномерно, то сумма этого ряда совпадает на* $[0,1]$ *с* $f(x)$.

Получим

$$B_{2k}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k)!}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi sx}{s^{2k}}\,, \qquad x \in [0,1]. \tag{12}$$

Это соответствует (7) при $n = 2k$, $k \geqslant 1$.

Доказательство теоремы при $n = 2k+1$, $k \geqslant 1$. Согласно (2) и лемме 1 ряд Фурье полинома $B_{2k+1}(x)$ на отрезке $[0,1]$ имеет вид

$$\frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{2^{2k}\,\pi^{2k+1}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi sx}{s^{2k+1}}\,.$$

При $k \geqslant 1$ он сходится равномерно. Значит,

$$B_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{2^{2k}\,\pi^{2k+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi sx}{s^{2k+1}}\,, \qquad x \in [0,1]. \tag{13}$$

Это соответствует (7) при $n = 2k+1$, $k \geqslant 1$.

Теорема доказана. $\square$

Положим в (12) $k = 1$ и $x = 0$. Учитывая, что $B_2(0) = \frac{1}{6}$, приходим к знаменитой формуле

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^2}\,.$$

Из (13) при $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$ следует, что

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}\bigl(\tfrac{1}{2}\bigr) = B_{2k+1}(1) = 0, \qquad k \geqslant 1.$$

4°. Продолжим изучение свойств полиномов Бернулли.

ТЕОРЕМА ДОПОЛНЕНИЯ. *Справедливо тождество*

$$B_n(1-x) = (-1)^n\,B_n(x), \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$. Возьмём $x \in [0, 1]$. Тогда и $(1 - x) \in [0, 1]$. Согласно (7)

$$B_n(1-x) = -\,2\,n!\,\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\bigl(2\pi s x + \frac{n\pi}{2}\bigr)}{(2\pi s)^n}\,.$$

Учитывая, что

$$\cos\bigl(2\pi s x + \tfrac{n\pi}{2}\bigr) = \cos\Bigl[\bigl(2\pi s x - \tfrac{n\pi}{2}\bigr) + n\,\pi\Bigr] = (-1)^n\,\cos\bigl(2\pi s x - \tfrac{n\pi}{2}\bigr),$$

приходим к (14).

Равенство (14) установлено при $x \in [0, 1]$. Но в обеих его частях стоят полиномы степени n, поэтому данное равенство справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ АРГУМЕНТА. *Справедливо тождество*

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr), \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$. Возьмём $x \in \bigl[0, \frac{1}{m}\bigr]$. Тогда $\bigl(x + \frac{k}{m}\bigr) \in [0, 1]$ при всех $k \in 0 : m - 1$. Согласно (7)

$$\sum_{k=0}^{m-1} B_n\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) = -\,2\,n!\,\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^k} \sum_{k=0}^{m-1} \cos\Bigl[2\pi s\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) - \tfrac{n\pi}{2}\Bigr]. \tag{16}$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \exp\, i\Bigl[2\pi s\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) - \tfrac{n\pi}{2}\Bigr] = \Bigl(\exp\, i\bigl(2\pi s x - \tfrac{n\pi}{2}\bigr)\Bigr) \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{sk} =$$

$$= m\,\delta_m(s)\Bigl(\exp i\bigl(2\pi s x - \tfrac{n\pi}{2}\bigr)\Bigr),$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{m-1} \cos\Bigl[2\pi s\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) - \tfrac{n\pi}{2}\Bigr] = m\,\delta_m(s)\cos\bigl(2\pi s x - \tfrac{n\pi}{2}\bigr).$$

Подставив это в (16), получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} B_n\bigl(x + \tfrac{k}{m}\bigr) = -\,2\,n!\,\sum_{l=1}^{\infty} \frac{m}{(2\pi l m)^n}\,\cos\bigl(2\pi l(mx) - \tfrac{n\pi}{2}\bigr) =$$

$$= \frac{1}{m^{n-1}}\,B_n(mx),$$

что равносильно (15).

Равенство (15) установлено при $x \in \left[0, \frac{1}{m}\right]$. Но в обеих его частях стоят полиномы степени n, поэтому данное равенство справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема доказана. $\square$

5°. Как отмечено в [2], полиномы Бернулли при натуральных x впервые рассматривал Я. Бернулли (1713) в связи с вычислением суммы

$$\sum_{k=1}^{m} k^n.$$

При произвольном x полиномы Бернулли изучал Л. Эйлер.

На рис. изображены полиномы Бернулли $B_n(x)$ при $n = 1, 2, 3, 4$.

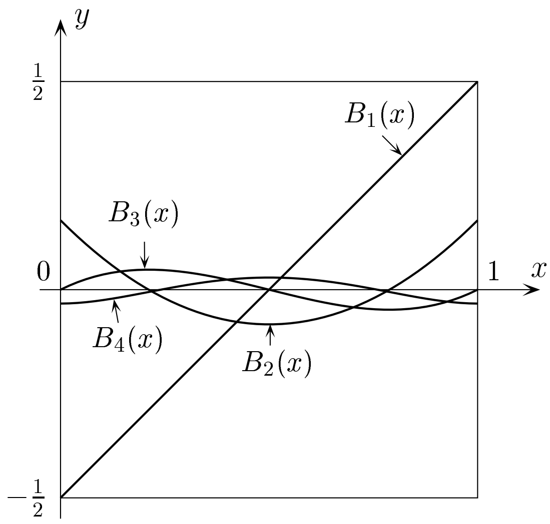

Рис. Графики полиномов Бернулли на отрезке $[0, 1]$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И. *Приближённое вычисление интегралов.* Изд. 2-е. М.: Наука, 1967. 500 с.

2. *Математическая энциклопедия.* Т. 1. М.: Изд. “Советская энциклопедия”, 1977. 1151 с.

3. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* М.: Наука, 1961. 936 с.