О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале[1]

Д. В. Иванов, к. ф.-м. н.
О. А. Кацюба, д. т. н.
Самарский государственный университет путей сообщения
dvi85@list.ru, katsyuba.samgups@mail.ru

Предложен алгоритм, являющийся обобщением метода наименьших квадратов, который позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале в условиях отсутствия информации о законе распределения помех.

Ключевые слова: состоятельное оценивание, метод наименьших квадратов, разность дробного порядка.

1. Введение

Модели на основе дробных дифференциальных и разностных уравнений находят применение во многих приложениях таких как теория вязкоупругости [1, 2], теория хаоса, фракталы [3], для описания диэлектрических материалов [4], электрохимических процессов [5], трафика в компьютерных сетях [6]. Проблемам использования дробного интегро-дифференциального исчисления для описания динамики различных систем и процессов управления посвящен обзор [7, 8].

По виду параметризации шума модели можно выделить две группы моделей: модель ошибки в уравнении (ARX-модель) и модель выходной ошибки [9]. Идентификация моделей ошибки уравнения сводится к классической задаче регрессионного анализа и может быть решена методом наименьших квадратов. В моделях ошибки в уравнении считается, что помеха проходит через часть динамической системы, что не всегда удобно для приложений. Свободной от этого недостатка является модель выходной ошибки, однако идентификация данной модели существенно сложнее. Естественным обобщением двух данных моделей является ARX-модель с помехой наблюдения в выходном сигнале.

В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем [10, 11]. В [12] пред-

ложен метод оценивания параметров авторегрессии нецелого порядка с помехой в выходном сигнале, в [13, 14] метод оценивания динамической системы с помехой в выходном сигнале, обобщение метода на динамическую систему нецелого порядка с ошибками в переменных приведено в [15]. В [16, 17] предложены рекуррентные алгоритмы идентификации позволяющий получать сильно состоятельные оценки некоторых классов нелинейных ARX-систем с помехой наблюдения в выходном сигнале [18].

В статье дано обобщение метода нелинейных наименьших квадратов [10] на случай линейной динамической ARX-системы дробного порядка с помехой в выходном сигнале и доказана сильная состоятельность получаемых оценок, при отсутствии информации о законе распределения помех.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = ... - 1, 0, 1, ...$:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \xi_i^{(2)}, \tag{1}$$

$$y_i = z_i + \xi_i^{(1)},$$

где $\Delta^{\alpha_m} z_i$ и $\Delta^{\beta_m} x_i$ разности дробного порядка:
$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} z_{i-j}$,
$\Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}$,
$\begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)}$, $\begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\beta_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m-j+1)}$,
$0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r, 0 < \beta_1 \ldots < \beta_{r_1}, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$,
z_i, y_i — ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные;
x_i — наблюдаемая входная переменная;
$\xi_i^{(1)}$ — помеха наблюдения в выходном сигнале;
$\xi_i^{(2)}$ — ошибка уравнения.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\tilde{B}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы является компактом.

2. Случайные процессы $\left\{\xi_i^{(1)}\right\}, \left\{\xi_i^{(2)}\right\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям: $E\left(\xi_{i+1}^{(k)}/F_i^{(k)}\right) = 0$, п. н., $E\left(\left(\xi_{i+1}^{(k)}\right)^2/F_i^{(k)}\right) < \infty$ п. н., $k = \overline{1,2}$ $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^4\right) < \infty$, п. н., $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^2\right) < \infty$, п. н.,

где $F_i^{(k)}$ — σ-алгебры, индуцированные семействами непрерывных случайных величин $\left\{\xi^{(k)}(t), t \in T_i\right\}, T_i = \{\mathrm{t}; \mathrm{t} \leq \mathrm{i}, \mathrm{t} \in \mathrm{Z_c}$ — множество целых чисел$\}$.

3. Входной сигнал x_i является случайным процессом с $E(x_i) = 0$, $E(x_i^2) = \sigma_x^2 < \infty$ и истинные значения параметров $\left(\dfrac{b_0}{a_0}\right)$ удовлетворяют условию $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{\varphi_z^{(i)}}{\varphi_x^{(i)}}\right)\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \middle| \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\right) =$

$= \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zx} \\ \hline H_{zx}^T & H_{xx} \end{array}\right) = H$ п. н.

где $\varphi_x^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\beta_1\\ j\end{pmatrix}x_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\beta_{r_1}\\ j\end{pmatrix}x_{i-j}\right)^T$,

$\varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_1\\ j\end{pmatrix}z_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_r\\ j\end{pmatrix}z_{i-j-1}\right)^T$,

причем H существует, ограничена и положительно определена.

4.$\{x_i\}$ статистически не зависит от $\left\{\xi_i^{(1)}\right\}, \left\{\xi_i^{(2)}\right\}$.

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям y_i, x_i, при известных порядках $r, r_1, \alpha_m, \beta_m$ определить оценки истинных значений параметров.

3. Критерий для оценивания параметров

Система может быть записана как линейная регрессия

$$y_i = \varphi_i^T\theta_0 + \varepsilon_i, \tag{2}$$

где $\varphi_i = \left(\left(\varphi_y^{(i)}\right)^T \middle| \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right)^T$,

$\varphi_y^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} y_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} y_{i-j-1}\right)^T$,

$\theta_0 = \left(b_0^T \middle| a_0^T \right)^T = \left(b_0^{(1)}, ..., b_0^{(r)} \middle| a_0^{(1)}, ..., a_0^{(r_1)} \right)^T$,

$\varepsilon_i = \xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)} - b_0^T \varphi_{\xi_1}^{(i)}$,

$\varphi_{\xi_1}^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} \xi_{i-j-1}^{(1)}, \ldots, \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} \xi_{i-j-1}^{(1)}\right)^T$,

Л е м м а 1. *Пусть выполняются условия 1–3 , тогда математическое ожидание ε_i равно нулю $E(\varepsilon_i) = 0$.*

Доказательство. Из предположения, что $\left\{\xi_i^{(1)}\right\}, \left\{\xi_i^{(2)}\right\}$- мартингал-разности следует, что $E(\xi_i^{(k)}) = 0$, тогда используя предположение 3 можно показать

$E(\varepsilon_i) = E(\xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)} - b_0^T \varphi_{\xi_1}^{(i)}) =$

$= E(\xi_i^{(1)}) + E(\xi_i^{(2)}) - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} E\left(\xi_{i-j-1}^{(1)}\right) = 0.$

Л е м м а 2. *Пусть выполняются условия 1-3, тогда средняя дисперсия обобщенной ошибки равна*

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + b_0^T H_{\xi_1} b_0 = \omega(b_0),$$

где $\bar{\sigma}_1^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \left(\xi_i^{(1)}\right)^2$, $\bar{\sigma}_2^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \left(\xi_i^{(2)}\right)^2$,

$$H_{\xi_1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_{\xi_1}^{(i)} \left(\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^T\right] = \begin{pmatrix} h_{\xi_1}^{(11)} & h_{\xi_1}^{(21)} & \ldots & h_{\xi_1}^{(r1)} \\ h_{\xi_1}^{(21)} & h_{\xi_1}^{(22)} & \ldots & h_{\xi_1}^{(r1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\xi_1}^{(1r)} & h_{\xi_1}^{(2r)} & \ldots & h_{\xi_1}^{(rr)} \end{pmatrix},$$

$h_{\xi_1}^{(mk)} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ j \end{pmatrix} \sigma_1^2(i-j-1), m = \overline{1,r}.$

Доказательство. По определению средней дисперсии

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\varepsilon_i - E\left(\varepsilon_i\right)\right)^2,$$

так как согласно Лемме 1 $E(\varepsilon_i)=0$, то

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E\left(\varepsilon_i\right)^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E\left(\xi_i^{(1)}+\xi_i^{(2)}-b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^2=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E\left(\left(\xi_i^{(1)}\right)^2+\left(\xi_i^{(2)}\right)^2+b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}\left(\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^T b_0-\right.$$
$$\left.-2\xi_i^{(1)}b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}-2\xi_i^{(2)}b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}+2\xi_i^{(1)}\xi_i^{(2)}\right)$$

Используя лемму [19] для случайных процессов $\xi_i^{(k)}$, а также условия 3, 4 получаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E\left(\left(\xi_i^{(1)}\right)^2+\left(\xi_i^{(2)}\right)^2+b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}\left(\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^T b_0\right)=$$
$$=\bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2+b_0^T H_{\xi_1}b_0.$$

Применяя лемму [20] для случайных процессов, получаем:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E\left(-2\xi_i^{(1)}b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}-2\xi_i^{(2)}b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}+2\xi_i^{(1)}\xi_i^{(2)}\right)=0.$$

Так как ряд из коэффициентов $\begin{pmatrix}\alpha_m\\ j\end{pmatrix}$ сходится абсолютно [21], тогда, применяя теорему Теплитца [22] можно показать, что ряд сходится:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{i}\begin{pmatrix}\alpha_m\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_k\\ j\end{pmatrix}\sigma_1^2(i-j-1)<\infty,$$

Определим оценку $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщенных ошибок $\left(\varepsilon_i(b_0,i)\right)^2$ с весом $\omega(b)$, т. е.

$$\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}}\sum_{i=1}^N\frac{\left(y_i-\varphi_i^T\theta\right)^2}{\bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2+b^T H_{\xi_1}b}=\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}}\frac{U_N(b,a)}{\omega(b)}. \qquad (3)$$

Имеет место, следующая теорема:

Т е о р е м а 1. *Пусть некоторый случайный процесс* $\{y_i, i=...-1,0,1,...\}$ *описывается уравнением* (1) *с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-4. Тогда оценка* $\hat{\theta}(N)$, *определяемая выражением (3) с вероятностью 1 при* $N\to\infty$, *существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т. е.* $\hat{\theta}(N)\xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{}\theta_0$ *п. н.*

Доказательство. Определим

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{N}U_N(b,a) = \\
&= N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\left(z_i+\xi_i^{(1)}+\xi_i^{(2)}-\left(\varphi_z^{(i)}+\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^T b-\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T a\right)^2 = \\
&= N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_i^{(1)}+\xi_i^{(2)}+\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T b_0+\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T a_0-\right. \\
&\left.-\left(\varphi_z^{(i)}+\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^T b-\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T a\right)^2 \\
&= N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_i^{(1)}+\xi_i^{(2)}-\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T\tilde{b}-\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\tilde{a}-\left(\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^T b\right)^2 = \\
&= \nu_1+\nu_2+\nu_3;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\nu_1 = N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}&\left(\left(\xi_i^{(1)}\right)^2+\left(\xi_i^{(2)}\right)^2+b^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}\left(\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right)^T b-\right. \\
&\left.-2\xi_i^{(1)}b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}-2\xi_i^{(2)}b_0^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}\right),
\end{aligned}$$

$$\nu_2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^T\left(\frac{\left(\varphi_z^{(i)}\right)}{\left(\varphi_x^{(i)}\right)}\right)\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \,\middle|\, \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\right)\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right),$$

$$\begin{aligned}
\nu_3 = 2N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}&\left(-\xi_i^{(1)}\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T\tilde{b}-\xi_i^{(2)}\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T\tilde{b}-\xi_i^{(1)}\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\tilde{a}-\right. \\
&\left.+\xi_i^{(2)}\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\tilde{a}+b^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T\tilde{b}+b^T\varphi_{\xi_1}^{(i)}\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\tilde{a}+\xi_i^{(1)}\xi_i^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

где $\tilde{b}=b-b_0, \tilde{a}=a-a_0, \tilde{\theta}=\theta-\theta_0$.

Применив лемму [19] для случайных процессов, получаем, что $\nu_1 \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2+b^T H_{\xi_1} b$, п. н. так как из 3

$$\lim_{N\to\infty}\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\varphi_z^{(i)}}{\varphi_x^{(i)}}\right)\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \,\middle|\, \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\right) = H \text{ п. н.},$$

то $\nu_2 \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \tilde{\theta}^T H\tilde{\theta}$ п. н.

Первые слагаемые в сумме ν_3 в силу условий 2, 3 , 4 удовлетворяют условиям леммы [20] и, следовательно:

$$N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\xi_i^1\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T\tilde{b} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \text{ п. н.},$$

$$N^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\xi_i^1\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\tilde{a} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \text{ п. н.}, \forall\theta\in\tilde{B}.$$

Заметим, что

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} b^T\varphi_{\xi_1}(i)\varphi_z^T(i)(i)\tilde{b} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} b^T \begin{pmatrix} h_{z\xi_1}^{(11)} & h_{z\xi_1}^{(21)} & \dots & h_{z\xi_1}^{(r1)} \\ h_{z\xi_1}^{(21)} & h_{z\xi_1}^{(22)} & \dots & h_{z\xi_1}^{(r1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{z\xi_1}^{(1r)} & h_{z\xi_1}^{(2r)} & \dots & h_{z\xi_1}^{(rr)} \end{pmatrix} \tilde{b},$$

$$h_{z\xi_1}^{(mk)} = \sum_{i=0}^{N-1} E\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1} \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_k \\ j \end{pmatrix} \xi_{i-j-1}^{(1)}\right)$$

тогда (4) можно представить в виде r^2 слагаемых, каждое из которых в силу предположений 2-3 по лемме [20] сходится к нулю. Можно доказать, что и все остальные слагаемые в ν_3 сходятся к нулю с вероятностью 1. Таким образом, имеем:$\nu_3 \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} 0$ п. н. Окончательно имеем

$$N^{-1}U_N(b,a) \xrightarrow[N\to\infty]{} \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \tilde{\theta}^T H\tilde{\theta} + b^T H_{\xi_1} b \equiv \bar{U}(b,a) \qquad (5)$$

Покажем, что решение задачи

$$\min \omega^{-1}(b)\bar{U}(b,a), \theta \in \tilde{B} \qquad (6)$$

существует и достигается в единственной точке $\theta = \theta_0$, т.е.

$$\min_{\theta\in\tilde{B}} \omega^{-1}(b)\bar{U}(b,a) = \frac{\bar{U}(b,a)}{\omega(b)} \qquad (7)$$

Для этого вместе с критерием (3) рассмотрим функцию

$$V(b,a,\lambda) = \bar{U}(b,a) - \lambda\omega(b),$$

$$V(\lambda) = \min_{\theta\in\tilde{B}} V(b,a,\lambda). \qquad (8)$$

Тогда (8) равно

$$V(b,a,\lambda) = \bar{\sigma}_1^2(1-\lambda) + \bar{\sigma}_2^2(1-\lambda) + \left(\tfrac{b_0}{a_0}\right)^T H\left(\tfrac{b_0}{a_0}\right) +$$
$$+ \left(\tfrac{b}{a}\right)^T \left(\begin{array}{c|c} H_{yy} - \lambda H_{\xi_1} & H_{zx} \\ \hline (H_{zx})^T & H_{xx} \end{array}\right) \left(\tfrac{b}{a}\right) - 2\left(\tfrac{b_0}{a_0}\right)^T H\left(\tfrac{b}{a}\right),$$

где
$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_y^{(i)} \left(\varphi_y^{(i)}\right)^T = H_{yy}$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_w^{(i)} \left(\varphi_w^{(i)}\right)^T = H_{ww}$.
Дифференцируя $V(b,a,\lambda)$ по b,a и приравнивая производные к нулю, находим

$$\left(\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}\right) = \left(\begin{array}{c|c} H_{yy} - \lambda H_{\xi_1} & H_{zx} \\ \hline (H_{zx})^T & H_{xx} \end{array}\right)^{-1} H\left(\frac{b_0}{a_0}\right), \tag{9}$$

и тогда

$$V(\lambda) = \bar{\sigma}_1^2(1-\lambda) + \bar{\sigma}_2^2(1-\lambda) + \left(\tfrac{b_0}{a_0}\right)^T H\left(\tfrac{b_0}{a_0}\right) -$$
$$- \left(H\left(\tfrac{b_0}{a_0}\right)\right)^T \left(\begin{array}{c|c} H_{yy} - \lambda H_{\xi_1} & H_{zx} \\ \hline (H_{zx})^T & H_{xx} \end{array}\right)^{-1} H\left(\tfrac{b_0}{a_0}\right)$$

функция $V(\lambda)$ на интервале $(-\infty, \lambda_{\min}+1)$ непрерывна, где $\lambda_{\min}$-наименьшее собственное число регулярного пучка квадратичных форм, то есть наименьший корень уравнения:

$$\det\left(\left(H_{yy} - H_{zx}H_{xx}^{-1}H_{zx}^T\right) - \lambda H_{\xi_1}\right) = 0. \tag{10}$$

Легко показать, что уравнение $V(\lambda) = 0$ имеет не более одного корня λ_1 на $(-\infty, \lambda_{\min}+1)$, так как на этом интервале функция $V(\lambda)$ непрерывна и

$$\dot{V}(\lambda) = -(\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + b^T(\lambda)H_{\xi_1}b(\lambda)) < -1, \lambda \in (-\infty, \lambda_{\min}+1).$$

Непосредственной подстановкой $\lambda_1 = 1$ в уравнение $V(\lambda) = 0$ можно убедиться, что $\lambda_1 = 1$ является корнем уравнения, к тому же единственным на интервале$(-\infty, \lambda_{\min}+1)$, что вытекает из непрерывности $\dot{V}(\lambda)$ и $\dot{V}(\lambda) < 0$ на данном интервале. Тогда из (9) непосредственно следует справедливость (7).

Выражение (3) можно привести к виду

$$\min_{\theta\in\tilde{B}} \omega^{-1}(b)U_N^1(b,a) = \min_{\theta\in\tilde{B}} \frac{\left(Y - \Phi^T\theta\right)^T \left(Y - \Phi^T\theta\right)}{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + b^T H_{\xi_1} b},$$

где $Y = (y_1, ..., y_N)^T$,
$\Phi = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_y & \Phi_x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \varphi_y^T(0) & \varphi_x^T(0) \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_y^T(N-1) & \varphi_x^T(N-1) \end{array}\right).$

Введем новый вектор переменных $\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & b & a \end{array}\right)^T = u$ и матрицу $\bar{\Phi} = \left(\begin{array}{c|c} -Y & \Phi \end{array}\right)$. Имеем для (3):

$$\min_{u\in\bar{B}} \frac{u^T\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}u}{u^T\bar{H}_\xi(N)u}, \bar{H}_\xi(N) = \left(\begin{array}{c|c|c} \bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & H_{\xi_1}(N) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

и $\bar{\Phi}^T\bar{\Phi} > 0$.

Аналогично (9) можно получить (для конечной выборки объема N):

$$V_N(\lambda) = Y^TY - \lambda - \\ -\left(\frac{\Phi_y^TY}{\Phi_w^TY}\right)^T \left(\begin{array}{c|c} \Phi_y^T\Phi_y - \lambda H_{\xi_1}(N) & \Phi_y^T\Phi_x \\ \hline \Phi_x^T\Phi_y & \Phi_x^T\Phi_x \end{array}\right)^{-1} \left(\frac{\Phi_y^TY}{\Phi_w^TY}\right),$$

и $V_N(\lambda) = 0$ имеет свойства, аналогичные $V(\lambda) = 0$.

Нахождение корня $V_N(\lambda) = 0$ можно записать в следующей форме: $\hat{\lambda}_1(N) = \lambda_{\min}(N)\left[\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\bar{H}_\xi\right]$- минимальное характеристическое число пучка квадратичных форм, определяемых $\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}$ и $\bar{H}_\xi$. Однако $\bar{H}_\xi \geq 0$, поэтому рассмотрим [21]

$$\lambda_{\min}(N)\left[\bar{\Phi}^T\bar{\Phi} - \lambda\bar{H}_\xi\right] = \frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)^{-1}\bar{H}_\xi\right]}.$$

Известно [22], что

$$\frac{1}{N}\frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)^{-1}\bar{H}_\xi\right]} \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \frac{1}{\lambda_{\max}\left[\left(\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)^{-1}\bar{H}_\xi\right]} = \\ = \lambda_{\min}\left[\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)\bar{H}_\xi^{-1}\right].$$

Так как нахождение $\lambda_{\min}\left[\left(\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)\bar{H}_\xi^{-1}\right]$ можно представить как определение корня уравнения $V(\lambda) = 0$, то $\frac{1}{N}\hat{\lambda}_1(N) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \lambda_1$ п. н.

Далее, неизвестные параметры можно определить из решения системы следующих линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{c|c} \Phi_y^T\Phi_y - \lambda H_{\xi_1}(N) & \Phi_y^T\Phi_x \\ \hline \Phi_x^T\Phi_y & \Phi_x^T\Phi_x \end{array}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{\Phi_y^TY}{\Phi_x^TY}\right) \qquad (11)$$

Тогда, очевидно, получаем

$$\frac{1}{N}\left[\left(\begin{array}{c|c} \Phi_y^T\Phi_y - \lambda_1(N)H_{\xi_1}(N) & \Phi_y^T\Phi_x \\ \hline \Phi_x^T\Phi_y & \Phi_x^T\Phi_x - \lambda_1(N)H_{\xi_2}(N) \end{array}\right)\left(\frac{b}{a}\right) - \right. \\ \left. -\left(\frac{\Phi_y^TY}{\Phi_x^TY}\right)\right] \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \left(\begin{array}{c|c} H_{yy} - \lambda_1 H_{\xi_1} & H_{zx} \\ \hline H_{zx}^T & H_{xx} \end{array}\right)\left(\frac{b}{a}\right) - H\left(\frac{b_0}{a_0}\right) = 0.$$

Из единственности решений (11) и последнего выражения следует, что $\left(\dfrac{\hat{b}\,(N)}{\hat{a}\,(N)}\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \left(\dfrac{b_0}{a_0}\right)$ п. н.

4. Заключение

В работе предложен алгоритм для оценивания параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале. Дальнейшие направление исследования могут быть направлены на разработку и иследование рекуррентных алгоритмов оценивания параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале и исследования их свойств, а также на обобщение предложенного алгоритма на случай более сложных моделей шума.

Список литературы

[1] *Stiassnie M.* On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models // Applied Mathematical Modelling. 1979. Vol. 3 P. 300–302.

[2] *Bagley R. L.* ractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structuresr // AIAA J. 1983. Vol. 21. P. 741–748.

[3] *Le Mγehautγe A.* Fractal Geometries, Theory and Applications.— Penton Press, New York, 1991.

[4] *Reyes-Melo M. E., Martinez-Vega J. J., Guerrero-Salazar C. A., Ortiz-Mendez U.* Application of fractional calculus to modelling of relaxation phenomena of organic dielectric materials // Proc. Int. Conf. Solid Dielectrics. 2004. Vol. 2. P. 530–533.

[5] *Vinagre B. M.* Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures // Proc. 41-st IEEE Conf Decision Control. 2002, Las Vegas, NV. 2002. P. 214–239.

[6] *Zaborovsky V.,Meylanov R.* Informational network traffic model based on fractional calculus// Proc Int Conf Info-tech and Info-net, ICII 2001, Beijing, China. 2001. P. 58–63.

[7] *Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. 2013. №. 4. С. 3–42.

[8] *Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. 2013. №. 5. С. 3–34.

[9] *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. Пер. с англ./ Под ред. Я.З. Цыпкина.— М.: Наука. 1991. 432 с.

[10] *Кацюба О.А.* Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности. — Самара: СамГУПС, 2008. 119 с.

[11] *Иванов Д.В.* Рекуррентное оценивание параметров динамических систем. — Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH. 2011. 136 с.

[12] *Иванов Д.В.* Идентификация авторегрессии нецелого порядка с помехой в выходном сигнале // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы научно-практической internet-конференции. 18-19 июня 2013 г./ отв. ред. Ю.С. Нагорнов — Ульяновск:SIMJET, 2013. С. 3–34.

[13] *Иванов Д.В.* Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. №.5-2. С. 2534–2536.

[14] *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error// Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12-13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.

[15] *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013), Rostov-on-Don, Russia, September 27–30, 2013. P. 374–377.

[16] *Иванов Д.В., Усков О.В.* Рекуррентная идентификация билинейных ARX-систем с помехой наблюдения в выходном сигнале // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки.2012. №. 2(22). С. 96–105.

[17] *Иванов Д.В.,Усков О.В.* Рекуррентная идентификация билинейных ARX-систем с помехой наблюдения в выходном сигнале // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2012. №. 2(22). С. 96–105.

[18] *Авсиевич А.В., Иванов Д.В.* Рекуррентная идентификация билинейных ARX-систем с помехой наблюдения в выходном сигнале // Информационные системы и технологии. 2010. №. 5(61). С. 43–50.

[19] *Кацюба О.А., Жданов А.И.* Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика. 1979. №. 8. С. 86–90.

[20] *Кацюба О.А., Жданов А.И.* Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. №. 2. С. 29–38.

[21] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* — Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[22] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах)—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Т.2. 810 с.;

[23] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. 575 с.

[24] *Stoica P.,Soderstrom T.* Bias correction in least – squares identification // Int. J. Control. 1982. Vol. 35. No. 3. P. 449–457.