Обобщение метода Крылова для задач массового обслуживания[1]

К. О. Видяева, аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет
karina.vidyaeva@gmail.com

Рассматривается метод приближенного вычисления k-минимального многочлена оператора. Подход использует вычисленные значения функционалов от итераций оператора. Обсуждаются особенности алгоритма при использовании метода Монте-Карло. Приводятся численные примеры использования метода в теории массового обслуживания.

Ключевые слова: k-минимальный многочлен оператора, спектр линейного оператора, метод Монте-Карло, стационарный режим.

1. Введение

В этой работе применяется метод из [1], позволяющий оценивать спектр линейного оператора. Подход основан на обобщении метода Крылова о вычислении коэффициентов минимального многочлена и позволяет иметь дело с матрицами бесконечного порядка.

Рассматриваемый в работе метод может быть использован в теории массового обслуживания, для оценки выхода системы на стационарный режим, при расчете ядерных реакторов и в ряде других приложений. В теории массового обслуживания известно, что второе собственное число матрицы перехода является показателем выхода системы на стационарный режим

$$\left\| P^n(X^{(0)}, \cdot) - \pi(\cdot) \right\| \leq c \cdot |\lambda_2|^n,$$

где P — матрица перехода, π — стационарное распределение, т. е. скорость выхода системы на стационарный режим определяется геометрической прогрессией со знаменателем λ_2. Поэтому далее основное внимание уделяляется нахождению именно второго собственного числа.

Будем рассматривать линейный оператор A, действующий в линейном нормированном пространстве F вещественных функций

[1] ©К. О. Видяева, 2012

(векторов). Спектр A будем предполагать дискретным. Собственный числа могут иметь комплексные значения и быть кратными. Они будут нормироваться в порядке убывания их модулей, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \ldots$.

Предметом исследования далее будут спектральные свойства оператора A при условии, что нам известны (измерены, вычислены), может быть со случайными ошибками итерации

$$\xi_m = A^m X, m = 0, 1, \ldots, M, \tag{1}$$

для некоторого X из F.

Обозначим $\mu_1 = \lambda_1, \mu_2, \ldots, \mu_l, \ldots$ значения собственных чисел без учета их кратности, занумерованных в порядке убывания их модулей (для комплексно сопряженных чисел порядок нумерации чисел с равным модулем безразличен).

Назовем многочлен степени k

$$P_k(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \mu_j), \tag{2}$$

k — минимальным многочленом оператора A.

Если F конечномерное пространство векторов размерности n и A матричный $n \times n$ оператор, то коэффициенты минимального многочлена A при известных итерациях (1) находятся методом Крылова [2]. Очевидно, что при очень больших значениях степени максимального многочлена метод Крылова практически не применим. Тем более он не применим в случае счетного спектра оператора. Далее мы опишем метод приближенного вычисления коэффициентов k-минимального многочлена для заданных, как правило небольших, значений k. При этом нам будет необходима Лемма 1, доказанная в [1]. Ниже следует ее формулировка. Мы также кратко воспроизведем ход ее доказательства.

2. Метод приближенного вычисления k-минимального многочлена оператора

Рассматривается последовательность вещественных чисел

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{T} a_k b_k^t, \quad |\xi_t| < \infty, \tag{3}$$

где a_k и b_k числа (м. б. комплексные), все b_k различны

$$|b_1| \geq |b_2| \geq \cdots \geq |b_T|, \tag{4}$$

но могут быть равными по модулю, $T > 0$, может быть бесконечным, в этом случае предполагается абсолютная сходимость ряда и векторы $\vec{a} = \|a_k\|_{k=1}^{\infty}$ и $\vec{b} = \|b_k\|_{k=1}^{\infty}$ принадлежат ℓ_2.

Лемма 1. *Пусть ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$ заданы формулой (3) и пусть для некоторого $L, 1 \leq L \leq T$ и возрастающей последовательности номеров $t, t = 1, 2, \ldots$ существует решение системы уравнений*

$$\sum_{l=0}^{L} c_l^{(t)} \xi_{t+l+j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, L-1. \tag{5}$$

Тогда, если
(1) b_k, $k = 1, \ldots, T$, удовлетворяют неравенствам (4), но $|b_L| > |b_{L+1}|$, $|b_L| > 0$,
(2) $a_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, L$,
(3) для некоторого $l = l_0$, $0 \leqslant l_0 \leqslant L$, $c_{l_0}^{(t)} = 1$,
то существует предел

$$\lim_{t \to \infty} c_l^{(t)} = c_l, \quad l = 0, 1, \ldots, L \tag{6}$$

и многочлен $Q(x) = \sum\limits_{l=0}^{L} c_l x^l$ имеет своими корнями числа b_k, $k = 1, \ldots, L$:

$$Q(x) = c \prod_{k=1}^{L} (x - b_k), \quad c = \text{const}. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим $Q_t(x) = \sum\limits_{l=0}^{L} c_l^{(t)} x^l$ и положим $l_0 = L$ ($c_L^{(t)} \equiv 1$), что не умаляет общности. Подставляя в (5) выражение (3) для ξ_{t+l+j}, имеем

$$\sum_{l=0}^{L} c_l^{(t)} \sum_{k=1}^{T} a_k b_k^{t+l+j} = \sum_{k=1}^{T} a_k b_k^{t+j} \sum_{l=0}^{L} c_l^{(t)} b_k^l = 0, \quad j = 0, \ldots, L-1,$$

или

$$\sum_{k=1}^{L} a_k b_k^{t+j} Q_t(b_k) + \sum_{k=L+1}^{T} a_k b_k^{t+j} Q_t(b_k) = 0, \quad j = 0, \ldots, L-1.$$

Заметим далее, что $Q_t(b_k)$ ограничены: $|Q_t(b_k)| \le M_1 < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, в силу предположения о существовании решения системы (5) и условий $|b_k| < |b_L|$, $k = L+1, L+2, \ldots$ и $\sum\limits_{k=L+1}^{T} |a_k| < M_2 < \infty$ (абсолютная сходимость ряда при $T \to \infty$).

Для каждого j, разделив j-тое равенство на $|b_L|^{t+j}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{L} a_k Q_t(b_k) \frac{b_k^{t+j}}{|b_L^{t+j}|} = -\sum_{k=L+1}^{T} a_k Q_t(b_k) \frac{b_k^{t+j}}{|b_L^{t+j}|}, \quad j = 1, 2, \ldots, L. \quad (8)$$

Но

$$\left| \sum_{k=L+1}^{T} a_k Q_t(b_k) \frac{b_k^{t+j}}{|b_L^{t+j}|} \right| \le M_1 \cdot M_2 \cdot q^{t+j}, \quad q = \max_{L+1 \le k \le T} \left| \frac{b_k}{b_L} \right|.$$

Система уравнений (8) относительно $a_k Q_t(b_k)$ имеет при каждом t отличный от нуля определитель (определитель Вандермонда) и правая часть стремится к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, $a_k Q_t(b_k) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $k = 1, \ldots, L$. Т. к. $a_k \ne 0$, то $Q_t(b_k) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Из существования предела $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{l=0}^{L} c_l^{(t)} b_k^l = 0$ следует существование предела $\lim\limits_{t\to\infty} c_l^{(t)} = c_l$, что и доказывает Лемму 1. □

Если A линейный оператор в гильбертовом пространстве F, а X и Y элементы F, то функционалы $(A^t X, Y)$, $t = 1, 2, \ldots$ могут быть выбраны в качестве последовательности ξ_t, определяемой формулой (3). Если в разложении X и Y по элементам базиса F присутствуют представители всех инвариантных подпространств F, то b_k будут представлять все значения собственных чисел оператора A.

Доказанная Лемма 1 может служить основой алгоритмов для вычисления коэффициентов k-минимального многочлена оператора. При этом следует заметить:

- при $T = L$ в случае матричного оператора вычислительный метод совпадает с методом Крылова вычисления коэффициентов минимального многочлена матрицы;
- при больших t вычислительные трудности могут быть значительными. Степени b_k при $|b_k| > 1$ — большие числа, а при

$|b_k| < 1$ — очень маленькие. Лемма справедлива для вещественных чисел ξ_t, и реальные вычисления, вообще говоря, могут потребовать операции над числами с очень большим числом знаков.

Теоретическое исследование последнего вопроса является достаточно сложной задачей. Как начало исследований представляет интерес проведение вычислительного эксперимента. Простейшие примеры были приведены в [1], где рассмотрен значительный круг вычислительных примеров, относящихся, в первую очередь, к случаю, когда числа (A^tX, Y) вычислены методом Монте-Карло, если A конечномерный матричный оператор $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$.

Метод Монте-Карло является распространенным инструментом для вычисления итераций линейных операторов (1). Вычисления, как правило, связаны с моделированием цепи Маркова с n состояниями. Если при некотором t вычислен (со случайной ошибкой) вектор
$A^tX = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$, то $A^{t+1}X$ определяют с помощью многократного вычисления оценки

$$\frac{x_{i0}^t a_{i0i1}}{p_{i0}^0 p_{i0i1}},$$

где $\overrightarrow{p^0} = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$ вектор, согласованный с A^tX, а $\mathcal{P} = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^n$ стохастическая матрица, согласованная с A. Моделируется распределение $\overrightarrow{p^0}$ и переход от i_0 к i_1 с помощью матрицы $\mathcal{P}$. Используются также другие оценки, куда входит A^T. Подробности описаны в [3]. При очень большом n и относительно небольшой требуемой точности такой подход весьма эффективен.

3. Практическое применение

Пусть дан линейный оператор A с дискретным спектром, собственные числа которого различны, но могут быть равны по модулю. Будем моделировать случайные величины $\xi_t = (A^tX, Y)$ с помощью метода Монте-Карло [3], где X и Y — векторы, компоненты которых получены с помощью датчика случайных чисел. Выбирая

длину окна L и составляя систему линейных уравнений

$$\begin{array}{l} c_0\xi_t + c_1\xi_{t+1} + \cdots + c_L\xi_{t+L} = 0 \\ c_0\xi_{t+1} + c_1\xi_{t+2} + \cdots + c_L\xi_{t+L+1} = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_0\xi_{t+L-1} + c_1\xi_{t+L+1} + \cdots + c_L\xi_{t+2L-1} = 0, \end{array} \tag{9}$$

находим значения чисел $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_L$. Так как c_j должны быть известны с точностью до общего множителя, фиксируем $c_L = 1$. Решив уравнение вида

$$\lambda^L + c_{L-1}\lambda^{L-1} + \cdots + c_0 = 0, \tag{10}$$

коэффициентами которого являются найденные c_j, получим собственные числа линейного оператора A.

Сложность метода заключается в выборе исходных параметров: L — длина окна, m — степень ξ_m, с которой начинаем строить систему сдвигов, и N — число испытаний в методе Монте-Карло при моделировании ξ_t.

При выборе длины окна L равным размерности матрицы, метод совпадает с методом Крылова, погрешность вычислений зависит только от погрешности метода Монте-Карло и параметр m можно взять равным 1.

Если же L меньше размерности матрицы, то возникает дополнительная погрешность, погасить которую можно с помощью увеличения значения параметра m, погрешность метода Монте-Карло также присутствует в этом случае.

В задачах массового обслуживания особое значение уделяется нахождению второго собственного числа, так как именно оно является показателем выхода системы на стационарный режим. Как показала практика, точность нахождения второго собственного числа можно повысить с помощью простого алгоритма ортогонализации, при этом необходимо знать первое собственное число. Оказалось, что преобразование исходного вектора $X = (A - \lambda_1 I) * X$ повышает точность нахождения второго собственного числа, так как уничтожает всю информацию о первом собственном числе [1].

Задача данной работы заключалась в выявлении зависимостей точности нахождения второго собственного числа (ниже обозначенного как λ_2) от изначально выбранных параметров. Рассматривались матрицы различных порядков, для которых проводилась про-

цедура ортогонализации и подсчитывались математическое ожидание и дисперсия (ниже обозначенная как σ) в группе экспериментов с одинаковыми исходными параметрами (размер выборки фиксировался и был равен 10 для всех испытаний с фиксированными исходными параметрами). Как показала практика, выбором X и Y с помощью датчика случайных чисел мы можем минимизировать разложение векторов $\xi_m = (A^m X, Y) = \sum_{k=1}^{T} a_k \lambda_k^m$ на составляющие с ненулевыми коэффициентами a_k, что позволяет получить достоверные результаты.

4. Примеры

В ходе исследований получено следующее.

1. Рассматривалась стохастическая матрица пятого порядка, для которой фиксировались исходные вектора X, Y, длина окна L и m, исходя из результатов, основанных на точных значениях ξ_m, полученных ранее в [1]. Параметры с наилучшими результатами фиксировались и вычисления производились по алгоритму, описанному выше, где ξ_m вычислялись рекурсивно с помощью метода Монте-Карло с числом итераций равным N.

$$A = \begin{pmatrix} 0.0625 & 0.125 & 0.25 & 0.25 & 0.3125 \\ 0.3 & 0.05 & 0.15 & 0.1 & 0.4 \\ 0.09 & 0.18 & 0.27 & 0.136 & 0.318 \\ 0.21 & 0.36 & 0.105 & 0.26 & 0.053 \\ 0.12 & 0.04 & 0.24 & 0.28 & 0.32 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Матрица A — стохастическая, собственные числа которой равны

$$1.00000; \quad \mathbf{-0.04273 \pm 0.21713i}; \quad 0.10905; \quad -0.05521.$$

При фиксированных X и Y, $L = 3$, $m = 2$, ($M = [2 * (L + 1) - 1] = 7$ — количество подряд полученных ξ_m, необходимых для реализации алгоритма) и применении ортогонализации получены результаты, собранные в Табл. 1.

С увеличением числа итераций в методе Монте-Карло точность нахождения второго собственного числа увеличивалось, как и ожидалось. Однако, величины ξ_m находятся рекурсивно, поэтому именно первые значения ξ_m должны находиться с наибольшей точностью. Практика показывает, что в этом случае при меньшей вычис-

Таблица 1: Зависимость точности λ_2 от числа испытаний в методе Монте-Карло.

$N \times M$	$E\lambda$	σ_1	σ_2
50 000×7	**-0,04194+0,20610i**	0,00722	0,00279
25 000×7=175 000	**-0,04688+0,20564i**	**0,00545**	**0,00744i**
10 000×7	-0,05456 + 0,20218i	0,03323	0,01393i
50 000 50 000 10 000 ...=150 000	**-0,04454+0,20522i**	**0,00403**	**0,00704i**
5 000×7	-0,02406+0,21819i	0,06061	0,02480i

лительной сложности погрешность метода меньше, чем при большей вычислительной сложности, но равном числе итераций на каждом шаге вычисления ξ_m (сравните четвертую строку Табл. 1 со второй, первый столбец Табл. 1 показывает общее число итераций в методе Монте-Карло, необходимых для получения последовательности величин ξ_m).

2. Находилась зависимость точности значения второго собственного числа от длины окна L и m — степени ξ_m, с которой начинаем строить систему сдвигов. Результаты при количестве итераций в методе Монте-Карло $N = 250000$ отображены в Табл. 2.

Таблица 2: Зависимость точности λ_2 от длины окна L и степени m.

	$E\lambda$	σ_1	σ_2
L=3, m=2	**-0,04216 + 0,21949i**	**0,0039**	**0,0056i**
L=3, m=3	-0,03665 + 0,22852i	**0,00418**	**0,0164i**
L=3, m=1	-0,04136 + 0,23641i	0,01065	0,0223i
L=4, m=1	-0,04556 + 0,21075i	0,00625	0,00598i

Наилучшими параметрами для матрицы пятого порядка оказались $L = 3$ и $m = 2$. Как видно из Табл. 2 с уменьшением длины окна L необходимо увеличивать число m, но это увеличение не должно быть слишком большим, иначе это приведет к обратным результатам. Параметры $L = 3, m = 3$ немного ухудшают вычисление второго собственного числа.

Подобного рода задача уже оценивалась в работе [1], где все ξ_m находились точно, без применения метода Монте-Карло. В данной же работе рассматривается иной случай. При увеличении значения параметра m, возникает дополнительная погрешность метода, которая растет нелинейно и с трудом может быть найдена аналитиче-

ски. Результаты эксперимента показывают, что выбор параметров L и m должен быть "сбалансирован".

3. В случае нестохастических матриц погрешность метода Монте-Карло растет экспоненциально. В таких ситуациях необходимо нормировать матрицу и свести ее к стохастической. Известно, что неотрицательная матрица A, имеющая положительное максимальное характеристическое число $r > 0$ и соответствующее этому числу положительный собственный вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) > 0$, простыми линейными преобразованиями может быть сведена к стохастической матрице $P = \frac{1}{r} z^{-1} A z$ [2]. Собственные числа исходной матрицы могут быть легко восстановлены по собственным числам полученной стохастической матрицы.

Результаты метода, применяемого к матрице без нормировки и с нормировкой, приведены в Табл. 3.

Рассматривалась матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \tag{12}$$

с собственными числами

$$20.98978, -\mathbf{0.66060} \pm \mathbf{4.51289i}, -0.97786, 2.3093,$$

фиксировались X, Y, производилась ортогонализация.

Таблица 3: Результаты подсчета λ_2 для не стохастической матрицы.

N = 50 000	$E\lambda$	σ_1	σ_2
без нормировки	-0,48443 + 4,54973i	0,26874	0,29891i
с нормировкой	-0,65834 + 4,825788i	0,03436	0,11946i

Очевидно преимущество описанного преобразования.

Так как основной задачей являлось нахождения второго собственного числа для матриц массового обслуживания, то интерес данной работы состоял в определении погрешности метода для матриц больших размерностей. Рассматривались простейшие системы массового обслуживания с одним прибором, время обслуживания которых распределено по показательному закону с параметром $\mu(t)$

и интенсивностью поступающего потока $\lambda(t)$. Для системы такого типа с десятью возможными состояниями и исходными параметрами $\lambda(t) = 0,21 + rand(0,2)$ и $\mu(t) = 0,45 + rand(0,2)$ при фиксированном значении $N = 50000$ (число испытаний в методе МК) неплохие результаты были получены уже при длине окна $L = 3$. Рандомизация исходных показателей обеспечила хорошую отделимость собственных чисел.
Собственные числа сгенерированной матрицы перехода равны:

$$1,00000; \mathbf{0,89539}; 0,78407; -0,67308; -0,59884;$$

$$0,57361; -0,42364; 0,36718; -0,42364; 0,05796.$$

Полученные результаты отображены в Табл. 4.

Таблица 4: Подсчет λ_2 для СМО с 10 состояниями.

	$E\lambda$	σ
L=3, m=16	0,89059	0,01848
L=3, m= 6	0,92924	0,01310
L=2, m=25	0,88163	0,04796

Для системы массового обслуживания подобного типа, но с количеством состояний равным 20 также были получены очень хорошие результаты. Фиксировалось значение $N = 50000$, вектора X, Y. Точное значение второго собственного числа $\lambda_{\mathbf{2}} = \mathbf{0,96112}$. Результаты в Табл. 5. Вопрос устойчивости метода при увеличении

Таблица 5: Подсчет λ_2 для СМО с 20 состояниями.

	$E\lambda$	σ
L=3, m=16	0,96201	0,02255
L=3, m= 6	0,96102	0,01443
L=2, m=25	0,96894	0,01460

погрешности метода Монте-Карло также был изучен для матрицы большого порядка $n = 20$.

Для сравнения рассматривался также метод наименьших квадратов, который для некоторого, выбранного заранее, натурального m решает задачу

$$\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{t=k}^{k+m} q_t \left(c_0^{(t)}\xi_{t+j} + \cdots + c_l^{(t)}\xi_{t+L+j}\right)^2 \to \min,$$

$q_t > 0$, m>L. Для простоты далее полагаем $q_t \equiv 1$.

Если $N \to \infty$ и случайной ошибкой можно пренебречь, то имеет место результат аналогичный Лемме 1. Рассмотрим Алгоритм 2:

1. Вычисляются $\xi_t = ((A^t(A-\lambda I)X, Y)$ с помощью метода Монте-Карло.

2. Выбирается длина окна l и образуются линейные комбинации с элементами векторов l-вложений $Z_i = (\xi_i \ldots, \xi_{i+l-1})$, с коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_{l-1}$,

которые находятся из условия

$$\sum_{t=k}^{k+m} (c_0\xi_t + c_1\xi_{t+1} + c_2\xi_{t+2} + \cdots + c_{l-1}\xi_{t+l-1})^2 \to min$$

Для этого решается система из l уравнений:

$$\begin{array}{l} c_0\sum_{t=k}^{k+m}\xi_t^2 + c_1\sum_{t=k}^{k+m}\xi_t\xi_{t+1} + \cdots + c_L\sum_{t=k}^{k+m}\xi_t\xi_{t+L} = 0 \\ c_0\sum_{t=k}^{k+m}\xi_t\xi_{t+1} + c_1\sum_{t=k}^{k+m}\xi_{t+1}^2 + \cdots + c_L\sum_{t=k}^{k+m}\xi_{t+1}\xi_{t+L+1} = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_0\sum_{t=k}^{k+m}\xi_t\xi_{t+L-1} + c_1\sum_{t=k}^{k+m}\xi_{t+1}\xi_{t+L-1} + \cdots + c_L\sum_{t=k}^{k+m}\xi_{t+L-1}^2 = 0 \end{array} \qquad (13)$$

Обозначим найденные коэффициенты $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_{l-1}$

3. Составляется многочлен с найденными коэффициентами

$$Q(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_{l-1}\lambda^{l-1}.$$

Корни многочлена являются 2м, 3м ... (l-1)м собственными числами оператора .

Алгоритм 2 оказывается более устойчив к случайным ошибкам и должен использоваться в случаях недостаточной точности вычисления ξ_t. Однако вычислительная сложность Алгоритма 2 больше, чем Алгоритма 1. Это также должно быть учтено при выборе вычислительного метода (см. Табл. 6).

Таблица 6: Сравнение эффективности алгоритмов. $n = 20$, $\lambda_2 = 0,95795$ — точное значение.

Алгоритм 1	$E\lambda$	σ
L=3, m=16, N=50 000	0,94333	0,02189
L=3, m=16, N=25 000	0,96683	0,02573
L=3, m=16, **N=10 000**	0,92884	**0,04781**
Алгоритм 2	$E\lambda$	σ
L=4, m=25, k=15 N=50 000	0,95698	0,02380
L=4, m=25, k=15 N=25 000	0,96614	0,02524
L=4, m=25, k=15 N=10 000	0,96798	**0,03798**

В задачах, требующих информацию о собственных векторах матрицы, можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения собственных векторов.

Опираясь на метод Келлога и зная собственные числа линейного оператора, достаточно просто можно найти собственные вектора этого оператора.
Известно, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A^m X}{||A^m X||} \to \varphi_1, \tag{14}$$

где φ_1 — собственный вектор при наибольшем собственном числе. В случае несимметричных матриц различают правый и левый собственные вектора. Метод Келлога позволяет получить их оба, для нахождения второго необходимо итерировать XA^m в (14) (не будем акцентировать внимание на этом различии в дальнейшем). Интерес для нас представляет собственный вектор при втором собственном числе. Так как нахождение первого собственного вектора не составляет труда, а для некоторых матриц он известен (так например, для стохастической матрицы первый правый собственный вектор равен единичному). Вычисление собственного вектора (правого или левого для несимметричной матрицы) при вещественном собственном числе не является сложной задачей, необходимо найти полином от A, принимающий наибольшее по модулю значение на этом собственном числе.

Рассмотрим полином второй степени $P(A) = -A^2 + \alpha A + \beta$. Нетрудно найти коэффициент $\alpha = 2\lambda_2$, при котором полином $P(A)$ имеет экстремум. Варьируя коэффициентом β, легко добиться максимума $P(A)$ по модулю на области $[-\lambda_1, \lambda_1]$, где λ_1 — максималь-

ное собственное число. Таким образом, предел отношения (14) при замене A на $P(A)$ будет стремиться ко второму собственному вектору.

Рассматривалась стохастическая матрица (8), второй собственный вектор которой равен

$$\begin{pmatrix} -0,5674 \\ 0,4476 \\ 0,5698 \\ -0,1877 \\ -0,3432 \end{pmatrix}.$$

Применяя метод Монте-Карло для вычисления векторов $A^m X$, были получены следующие результаты зависимости метода от N — количества испытаний в методе МК и m — степени m при вычислении отношения (14).

Таблица 7: Подсчет второго собственного вектора.

	$E\lambda$	σ	$\frac{1}{5}\sigma$
N=50000, m=30	-0,5684	0,0033	0,0040
	0,4483	0,0049	
	0,5695	0,0041	
	-0,1899	0,0043	
	-0,3398	0,0035	
N=25000, m=30	-0,5673	0,0069	0,0060
	0,4470	0,0043	
	0,5676	0,0074	
	-0,1922	0,0059	
	-0,3452	0,0055	
N=10000, m=30	-0,5693	0,0062	0,0064
	0,4453	0,0040	
	0,5682	0,0069	
	-0,1895	0,0049	
	-0,3444	0,0100	

Очевидно, с увеличением N точность вычислений увеличивается.

В случаях не стохастических матриц больших порядков имеет смысл применять нормировку, рассмотренную в статье ранее, с целью уменьшения погрешности вычислений. Сведя матрицу к стохастической и вычислив второй собственный вектор этой матрицы,

нахождение второго собственного вектора исходной матрицы не составляет труда.

Результаты зависимости точности нахождения второго собственного числа от m приведены в Табл. 8. Метод дает хорошие результаты при относительно малом числе итераций.

Таблица 8: Подсчет λ_2. Нормировка.

	$E\lambda$	σ	$\frac{1}{5}\sigma$
N=50000, m=10	-0,5679	0,0044	0,0036
	0,4481	0,0024	
	0,5691	0,0046	
	-0,1885	0,0040	
	-0,3424	0,0026	
N=50000, m=30	-0,5682	0,0033	0,0040
	0,4494	0,0047	
	0,5686	0,0036	
	-0,1907	0,0044	
	-0,3397	0,0038	
N=50000, m=50	-0,5678	0,0032	0,0039
	0,4467	0,0040	
	0,5697	0,0044	
	-0,1914	0,0047	
	-0,3418	0,0035	

В случае комплексных собственных чисел необходимо рассматривать задачу в двумерной постановке. Равенство

$$A(x+iy) = (\lambda+\mu i)(x+iy)$$

или

$$\begin{cases} Ax = \lambda x - \mu y, \\ Ay = \mu x + \lambda y, \end{cases}$$

можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Произведя замену переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

переходим к уравнению вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I & -\mu I \\ \mu I & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2+\mu^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Полученное равенство показывает, что у матрицы (15) есть вещественное собственное число $\lambda^2 + \mu^2$. Нетрудно доказать, что это собственное число имеет кратность равную двум. Выпишем определитель для нахождение собственный чисел матрицы (15)

$$\begin{vmatrix} \lambda A - \varepsilon I & \mu A \\ -\mu A & \lambda A - \varepsilon I \end{vmatrix} = 0,$$

$$\triangle(\varepsilon) = (\lambda^2 + \mu^2)A^2 - 2\lambda\varepsilon A + \varepsilon^2 I = 0.$$

Решив это уравнение относительно A, имеем

$$A = \frac{\lambda \pm i\mu}{\lambda^2 + \mu^2}\varepsilon I. \quad (16)$$

И так как $\lambda \pm i\mu$ — собственные числа A, то очевидно, что равенство (16) имеет место только при $\varepsilon = \lambda^2+\mu^2$ и ε имеет кратность равную двум.

Для нахождения собственных векторов матрицы (15) при собственном числе $\lambda^2 + \mu^2$ составляем и решаем систему линейных уравнений. Собственные вектора исходной матрицы находятся после выполнения обратной замены.

Список литературы

[1] *Ермаков С.М., Видяева К.О.* Об оценке спектра линейного оператора // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Вып. 1. 2012. С. 11–18.

[2] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — Изд. 4-е, дополненное. Москва: Наука. 1988. 548 с.

[3] *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. — СПб: “Невский Диалект”. Москва: “Бином”. 2009. 192 с.