Асимптотические свойства вектора состояний обобщенной линейной динамической стохастической системы с симметричной матрицей[1]

Н. К. Кривулин, д. ф.-м. н.
О. А. Нев
Санкт-Петербургский государственный университет[2]
nkk@math.spbu.ru, nevolga@gmail.com

В статье изучается стохастическая динамическая система, которая описывается линейным векторным уравнением с симметричной матрицей второго порядка в идемпотентном полукольце с операциями максимума и сложения. Предполагается, что диагональными элементами матрицы являются неотрицательная случайная величина и ноль, а оба недиагональных элемента равны произвольной неотрицательной константе. Рассматривается задача определения средней асимптотической скорости роста вектора состояний (показателя Ляпунова) системы. Решение включает замену переменных, в результате которой вместо случайных координат вектора состояний вводятся новые случайные величины, анализ которых оказывается более удобным. Затем выполняется построение и исследование сходимости соответствующих последовательностей одномерных функций распределения. Показатель Ляпунова вычисляется как среднее значение предельного распределения одной из последовательностей.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, показатель Ляпунова, идемпотентное полукольцо, сходимость распределений.

1. Введение

Модели обобщенных линейных стохастических динамических систем находят применение при анализе многих реальных систем в технике, экономике, управлении и других областях. Динамика системы в таких моделях описывается при помощи линейных в смысле некоторого идемпотентного полукольца [1–3] векторных уравнений со случайной матрицей.

Во многих случаях представляет интерес изучение асимптотических свойств системы, включая определение средней асимптотической скорости роста вектора состояний (показателя Ляпунова) для системы. Однако вычисление значения показателя Ляпунова часто оказывается довольно трудоемкой задачей даже для весьма простых моделей систем. Известные результаты в этой области

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-01-00808.

включают решения, полученные в работах [3–10] для систем с матрицей второго порядка с экспоненциальным распределением случайных элементов.

Ниже рассматривается задача определения показателя Ляпунова для системы с матрицей второго порядка, диагональными элементами которой являются неотрицательная случайная величина и ноль, а оба недиагональных элемента равны произвольной неотрицательной константе. Используется подход, предложенный в [3, 6–8], который предполагает замену переменных, в результате которой вместо случайных координат вектора состояний системы вводятся новые случайные величины, анализ которых оказывается более удобным. Затем выполняется построение и исследование сходимости соответствующих этим величинам последовательностей одномерных функций распределения. Показатель Ляпунова вычисляется как среднее значение предельного распределения одной из последовательностей.

Результаты исследования получены в общем виде и не зависят от конкретного закона распределения случайного элемента матрицы. Рассмотрены примеры применения этих результатов для вычисления показателя Ляпунова при условии, когда случайная величина имеет экспоненциальное или равномерное распределение.

2. Стохастическая динамическая система

Рассмотрим стохастическую динамическую систему, эволюция которой при всех $k = 1, 2, \ldots$ описывается векторным уравнением, заданным в идемпотентном полукольце со скалярными операциями вычисления максимума в роли сложения и арифметического сложения в роли умножения

$$\boldsymbol{z}(k) = A(k)\boldsymbol{z}(k-1),$$

где $A(k)$ — случайная матрица, $\boldsymbol{z}(k)$ — вектор состояний системы.

Предположим, что

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c — некоторая неотрицательная константа, $\{\alpha_k | k \geq 1\}$ — последовательность независимых неотрицательных случайных величин,

которые имеют общее распределение вероятностей с функцией распределения $F_\alpha(t)$ и конечным средним a.

Векторное уравнение можно записать с использованием обычных арифметических операций в виде

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1)+\alpha_k, y(k-1)+c), \\ y(k) &= \max(x(k-1)+c, y(k-1)). \end{aligned}$$

Средняя (асимптотическая) скорость роста вектора состояний, которую обычно называют показателем Ляпунова системы, определяется как предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max(x(k), y(k)).$$

Применяя эргодическую теорему из [3], нетрудно показать, что для рассматриваемой системы указанный предел существует с вероятностью 1, а также выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} \max(x(k), y(k)) = \lambda.$$

Последнее равенство означает, что для нахождения показателя Ляпунова можно от исследования сходимости случайных величин перейти к исследованию сходимости их средних.

3. Переход к новым переменным

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} X(k) &= x(k) - x(k-1), \\ Y(k) &= y(k) - x(k). \end{aligned}$$

Тогда скалярные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(\alpha_k, Y(k-1)+c), \\ Y(k) &= \max(c, Y(k-1)) - \max(\alpha_k, Y(k-1)+c). \end{aligned}$$

Заметим, что из второго уравнения, в частности, следует неравенство

$$Y(k) \le \max(c-\alpha_k, -c) \le c.$$

Тогда уравнения можно окончательно записать в виде

$$X(k) = \max(\alpha_k, Y(k-1) + c),$$
$$Y(k) = c - \max(\alpha_k, Y(k-1) + c).$$

Кроме того, учитывая, что $x(k) = X(1) + \cdots + X(k)$, имеем

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} \sum_{i=1}^{k} X(i) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} \max(0, Y(k)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} \sum_{i=1}^{k} X(i).$$

4. Сходимость функций распределения

Введем функции распределения

$$\Phi_k(t) = P\{X(k) < t\}, \qquad \Psi_k(t) = P\{Y(k) < t\}.$$

Рассмотрим функцию Φ_k и представим ее в виде

$$\Phi_k(t) = P\{\max(\alpha_k, Y(k-1) + c) < t\} = F_\alpha(t)\Psi_{k-1}(t-c).$$

Заметим, что

$$\Psi_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0; \\ 1, & \text{если } t > 0; \end{cases} \qquad \Psi_0(-t) = 1 - \Psi_0(t).$$

Преобразуем функцию распределения $\Psi_k(t)$, используя формулу полной вероятности,

$$\Psi_k(t) = \int_0^\infty P\{Y(k) < t | \alpha_k = u\} f_\alpha(u) du.$$

Используя рекуррентное уравнение для $Y(k)$, получим

$$\mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u\} = 1 - \mathsf{P}\{u \le -t + c, Y(k-1) \le -t\}.$$

В силу того, что

$$P\{Y(k) < t | \alpha_k = u\} = \begin{cases} 1 - \Psi_{k-1}(-t), & \text{если } u \le -t + c; \\ 1, & \text{если } u > -t + c; \end{cases}$$

при $t \le c$ имеем

$$\Psi_k(t) = 1 - \Psi_{k-1}(-t) F_\alpha(c - t).$$

Учитывая, что $Y(k) \le c$, для всех $t > c$ выполняется равенство $\Psi_k(t) = 1$. Следовательно,

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1 - F_\alpha(c-t), & \text{если } t \le -c; \\ 1 - \Psi_{k-1}(-t)F_\alpha(c-t), & \text{если } -c < t \le c; \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Рассмотрим значения функции $\Psi_k(t)$ при $-c < t \le c$.

Введем обозначение $G(t) = F_\alpha(c-t)F_\alpha(c+t)$. Положим $k = 2m$. Тогда

$$\Psi_{2m}(t) = (1 - F_\alpha(c-t))(1 + G(t) + \ldots + G^{m-1}(t)) + G^m(t)\Psi_0(t).$$

Пусть $k = 2m+1$. Учитывая, что $\Psi_0(-t) = 1 - \Psi_0(t)$, имеем

$$\Psi_{2m+1}(t) = (1 - F_\alpha(c-t))(1 + G(t) + \ldots + G^m(t)) + \\ + F_\alpha(c-t)G^m(t)\Psi_0(t).$$

Сумма в скобках в правой части выражений, записанных для $\Psi_{2m}(t)$ и $\Psi_{2m+1}(t)$, при каждом t является суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $G(t) < 1$. Учитывая, что $G^m(t) \to 0$ при $m \to \infty$, подпоследовательности $\Psi_{2m}(t)$ и $\Psi_{2m+1}(t)$ сходятся к функции

$$\Psi(t) = (1 - F_\alpha(c-t))\frac{1}{1 - G(t)} = \frac{1 - F_\alpha(c-t)}{1 - F_\alpha(c-t)F_\alpha(c+t)}.$$

Из сходимости подпоследовательностей $\Psi_{2m}(t)$ и $\Psi_{2m+1}(t)$ к общему пределу следует, что для всех $-c < t \le c$ исходная последовательность $\Psi_k(t)$ также сходится к функции $\Psi(t)$.

Таким образом, для всех t окончательно имеем

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 - F_\alpha(c-t), & \text{если } t \le -c; \\ \frac{1 - F_\alpha(c-t)}{1 - F_\alpha(c-t)F_\alpha(c+t)}, & \text{если } -c < t \le c; \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что полученная функция является функцией распределения некоторой случайной величины Y.

Поскольку последовательность функций Ψ_k сходится к функции Ψ, последовательность функций Φ_k также сходится при $k \to \infty$

к некоторой функции, которая имеет вид

$$\Phi(t) = F_\alpha(t)\Psi(t-c) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0; \\ F_\alpha(t)\frac{1-F_\alpha(2c-t)}{1-F_\alpha(2c-t)F_\alpha(t)}, & \text{если } 0 < t \le 2c; \\ F_\alpha(t), & \text{если } t > 2c. \end{cases}$$

Очевидно, что полученная функция является функцией распределения некоторой случайной величины X.

5. Вычисление показателя Ляпунова

Сходимость случайных величин $X(k) \to X$ влечет за собой сходимость средних $\mathsf{E}X(k) \to \mathsf{E}X$, откуда следует

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k} X(i) = \mathsf{E}X.$$

Для того, чтобы получить выражение для вычисления показателя Ляпунова в явном виде, сначала запишем

$$\lambda = \int_0^\infty t d\Phi(t) = \int_0^{2c} t d\left(F_\alpha(t)\frac{1-F_\alpha(2c-t)}{1-F_\alpha(2c-t)F_\alpha(t)} - F_\alpha(t)\right) + \int_0^\infty t dF_\alpha(t).$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$\lambda = a + \int_0^{2c} \frac{F_\alpha(t)F_\alpha(2c-t)(1-F_\alpha(t))}{1-F_\alpha(t)F_\alpha(2c-t)} dt.$$

6. Примеры

Предположим, что случайная величина α_k имеет экспоненциальное распределение с функцией распределения

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0; \\ 1 - e^{-\mu t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Тогда $a = 1/\mu$ и

$$\int_0^{2c} \frac{F_\alpha(t)F_\alpha(2c-t)(1-F_\alpha(t))}{1-F_\alpha(t)F_\alpha(2c-t)} dt = \int_0^{2c} \frac{(1-e^{-\mu t})(1-e^{-\mu(2c-t)})e^{-\mu t}}{1-(1-e^{-\mu t})(1-e^{-\mu(2c-t)})} dt.$$

Вычисление интеграла дает результат

$$\lambda = c + \frac{e^{-2\mu c}}{\mu} + \arctan \frac{\sqrt{4e^{2\mu c} - 1}(e^{2\mu c} - 1)}{3e^{2\mu c} - 1}.$$

Рассмотрим равномерное распределение на $[0, 2c]$ с функцией распределения

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ \frac{t}{2c}, & \text{если } 0 < t \leq 2c; \\ 1, & \text{если } t > 2c. \end{cases}$$

В этом случае $a = c$. После вычисления интеграла получаем

$$\lambda = c + \int\limits_0^{2c} \frac{t(2c - t)^2}{2c(4c^2 - 2ct + t^2)} dt = \frac{2\pi c}{3\sqrt{3}}.$$

7. Заключение

Определение величины средней асимптотической скорости роста вектора состояний (показателя Ляпунова) для обобщенных линейных стохастических динамических систем часто оказывается довольно трудоемкой задачей даже для весьма простых моделей систем. Известные результаты в этой области, как правило, ограничиваются случаем систем с матрицей второго порядка с экспоненциальным распределением случайных элементов.

В настоящей работе рассмотрена система с матрицей второго порядка, диагональными элементами которой являются неотрицательная случайная величина с конечным средним и ноль, а оба недиагональных элемента равны произвольной неотрицательной константе. Оказывается, что в этом случае показатель Ляпунова системы может быть получен в достаточно общей форме, которая не зависит от вида распределения случайной величины.

Дальнейшие исследования могут быть направлены как на анализ новых моделей систем, так и на продолжение изучения рассмотренной выше системы. В частности, для этой системы представляет интерес вычисление значения показателя Ляпунова для новых типов распределений, среди которых могут быть не только непрерывные, но и дискретные распределения.

Список литературы

[1] *Heidergott B., Olsder G.J., van der Woude J.* Max-Plus at work. — Princeton: Princeton University Press, 2006.

[2] *Маслов В.П., Колокольцов В.Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.—М.:Физматлит. 1994.

[3] *Кривулин Н.К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009.

[4] *Olsder G.J., Resing J.A.C., De Vries R.E., Keane M.S., Hooghiemstra G.* Discrete event systems with stochastic processing times // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. Vol. 35. No. 3. P. 299–302.

[5] *Jean-Marie A.* Analytical computation of Lyapunov exponents in stochastic event graphs // Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems. Solution Methods: Proc. 3rd QMIPS Workshop. Amsterdam: CWI Tracts. Vol. 106. 1994. P. 309–341.

[6] *Кривулин Н.К.* Скорость роста вектора состояний обобщенной линейной стохастической системы с симметричной матрицей // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2007. Т. 341. С. 134–141.

[7] *Кривулин Н.К.* О вычислении скорости роста вектора состояний обобщенной линейной стохастической системы второго порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 1. С. 38–48.

[8] *Кривулин Н.К.* Вычисление показателя Ляпунова обобщенных линейных систем с показательным распределением элементов переходной матрицы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 37–47.

[9] *Кривулин Н.К.* Вычисление показателя Ляпунова для одной модели стохастической системы с синхронизацией // Стохастическая оптимизация в информатике. 2010. Т. 6. С. 171–183.

[10] *Кривулин Н.К.* Вычисление средней скорости роста вектора состояний стохастической системы с синхронизацией событий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 1. С. 109–116.