Условия представимости обобщенных регулярных языков стохастическими автоматами[1]

В. Н. Трубников,
М. К. Чирков, д. ф.-м. н.[2]
Санкт-Петербургский государственный университет
vakh08@mail.ru

Работа посвящена исследованию и обоснованию необходимых и достаточных условий представимости обобщенных регулярных языков, задаваемых над полем вещественных чисел, стохастическими конечными автоматами. Разработан метод синтеза стохастического автомата по регулярному выражению обобщенного языка, удовлетворяющего этим условиям. Приведен пример.

Ключевые слова: стохастические конечные автоматы, обобщенные регулярные языки, представимость обобщенных языков автоматами, синтез автоматов по регулярному выражению языка.

1. Введение

Стохастические автоматы занимают важное место среди автоматных моделей различного типа, поэтому исследование свойств представляемых ими языков имеет существенное значение. К настоящему времени достаточно подробно исследованы свойства языков, представленных в стохастических автоматах с заданной точкой сечения (см., например, монографию [1] и список литературы к ней). Однако, следует отметить и те работы (например, [1-4]), в которых рассматриваются представляемые стохастическими автоматами обобщенные вероятностные языки, определяющие отображение множества слов в заданном алфавите в интервал [0,1], и исследуются некоторые их свойства. При этом, как показано в работах [2, 3], так называемые обобщенные «нечеткие» автоматные модели, задаваемые над различными алгебраическими системами (см., например, [5]), в частном случае их задания над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ могут оказаться эквивалентными стохастическим

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00310-а.

автоматам [2, 3]. Поэтому важное значение имеет исследование тех необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять задаваемый над $\mathbb{R}$ регулярный обобщенный $\mathbb{R}$-нечеткий язык, чтобы он оказался обобщенным вероятностным языком и существовал представляющий его конечный стохастический автомат. Именно этой проблеме и посвящена данная работа, являющаяся естественным продолжением статьи [2].

2. Стохастические автоматы и вероятностные языки

Пусть заданы *входной алфавит* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, *алфавит состояний* $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ и *выходной алфавит* $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}\}$. *Стохастический автомат общего вида* определяется как система

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X,\ A,\ Y,\ \mathbf{p},\ \{\mathbf{P}(s,l)\}\rangle \tag{1}$$

множеств $X,\ A,\ Y$, начального распределения вероятностей состояний

$$\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}), \quad \sum_i p_i = 1, \tag{2}$$

и nk квадратных матриц $\mathbf{P}(s,l)$, $x_s \in X$, $y_l \in Y$, с элементами

$$P_{ij}(s,l) = P(a_j y_l |\, a_i x_s), \tag{3}$$

заданными для каждой пары (a_i, x_s), $a_i \in A$, $x_s \in X$, на множестве $A \times Y$, которые характеризуют вероятность перехода автомата в состояние a_j с выдачей символа y_l при условии, что он находился в состоянии a_i и на него воздействует символ x_s.

Согласно (3) элементы матриц $\mathbf{P}(s,l)$, называемых *матрицами вероятностей переходов и выходов,* для вполне определенных автоматов $\mathcal{A}_{pr}$ должны удовлетворять условиям $P_{ij}(s,l) \in [0,1]$, $\sum_{j,l} P_{ij}(s,l) = 1$.

Для *абстрактного стохастического автомата*

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X,\ A,\ \mathbf{p},\ \{\mathbf{P}(s)\}\rangle \tag{4}$$

задаются только алфавиты X, A, начальное распределение вероятностей состояний (2) и *матрицы вероятностей переходов* $\mathbf{P}(s)$, $x_s \in X$, с элементами $P_{ij}(s) = P(a_j|a_i x_s)$.

Пусть $\mathcal{A}_{pr}$ есть стохастический автомат (1), выделено подмножество $Y^{(\text{к})} \subseteq Y$ его выходных символов и $P(y_l|\,\omega)$ есть вероятность выдачи автоматом буквы y_l в такте t при поступлении на вход автомата слова $\omega = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t}$. Тогда *обобщенным вероятностным языком* (далее просто *вероятностным языком*) Z, *представленным в автомате* $\mathcal{A}_{pr}$ *подмножеством конечных выходных символов* $Y^{(\text{к})}$, называют «нечеткое» множество слов $Z = \{\omega, \mu(\omega)\}_{\omega\in X^*}$ в алфавите X, удовлетворяющее условию

$$\mu : X^* \to [0,1], \quad \mu(\omega) = \sum_{y_l\in Y^{(\text{к})}} P(y_l|\,\omega).$$

Пусть теперь $\mathcal{A}_{pr}$ есть абстрактный стохастический автомат (4), выделено подмножество $A^{(\text{к})} \subseteq A$ его конечных состояний и $P(a_i|w)$ есть вероятность того, что автомат перейдет в состояние a_i в такте t при поступлении на вход слова w. *Вероятностным языком* Z, *представленным в абстрактном стохастическом автомате* $\mathcal{A}_{pr}$ *подмножеством конечных состояний* $A^{(\text{к})}$, называют «нечеткое» множество слов $Z = \{\omega, \mu(\omega)\}_{\omega\in X^*}$ в алфавите X такое, что

$$\mu : X^* \to [0,1], \quad \mu(\omega) = \sum_{a_i\in A^{(\text{к})}} P(a_i|\,\omega). \tag{5}$$

Если подмножество конечных состояний $A^{(\text{к})}$ задавать m-мерным вектор-столбцом $\mathbf{e}^{(\text{к})} = (e_0^{(\text{к})}, e_1^{(\text{к})}, \ldots, e_{m-1}^{(\text{к})})^T$ таким, что

$$e_i^{(\text{к})} = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i \notin A^{(\text{к})}, \\ 1, & \text{если } a_i \in A^{(\text{к})}, \end{cases}$$

то выражение (5) примет вид

$$\mu(\omega) = \mathbf{p}\mathbf{P}(\omega)\mathbf{e}^{(\text{к})},$$

где

$$\mathbf{P}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{P}(e) = \mathbf{I}(m) & \text{при } t = 0, \\ \mathbf{P}(\omega) = \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{P}(s_\nu) & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$\omega = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t}$, и $\mathbf{I}(m)$ – единичная $(m\times m)$-матрица.

В теории стохастических автоматов известно следующее утверждение о сводимости [1].

Т е о р е м а 1. *Для любого стохастического автомата общего вида* $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, Y, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s,l)\}, Y^{(\kappa)}\rangle$, *имеющего* m *состояний и* k *выходных символов, в котором подмножеством выходных символов* $Y^{(\kappa)} \subseteq Y$ *представлен вероятностный язык* Z, *можно построить абстрактный стохастический автомат*

$$\mathcal{B}_{pr} = \langle X,\ B,\ \mathbf{p}',\ \{\mathbf{P}(s)\},\ B^{(\kappa)}\rangle,$$

имеющий mk *состояний, в котором вероятностный язык* Z *представлен некоторым подмножеством* $B^{(\kappa)} \subseteq B$.

3. Обобщенные $\mathbb{R}$-нечеткие автоматы и языки

Обобщенным $\mathbb{R}$-*нечетким автоматом* (для краткости, $\mathbb{R}$-*автоматом*, где $\mathbb{R}$ есть обозначение поля вещественных чисел) назовем систему $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s,l)\}, \mathbf{q}\rangle$, где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ – вектор-строка *весов начальных состояний* $\mathbb{R}$-автомата; $\{\mathbf{R}(s,l)\}$ – множество из nk квадратных *матриц переходов и выходов* $\mathbf{R}(s,l) \in \mathbb{R}^{m,m}$, $(x_s, y_l) \in X \times Y$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ – вектор-столбец *весов конечных состояний* $\mathbb{R}$-автомата. *Абстрактным* $\mathbb{R}$-*автоматом* будем называть систему $\mathcal{A} = \langle X, A, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}, \rangle$.

Назовем $\mathbb{R}$-*нечетким языком (кратко,* $\mathbb{R}$-*языком)* Z *в алфавите* X «нечеткое» подмножество слов в X^*, задаваемое функцией принадлежности (*весовой функцией*) $\mu_Z : X^* \to \mathbb{R}$, где величина $\mu_Z(\omega) \in \mathbb{R}$ для слова $\omega \in X^*$ представляет собой *вес* слова ω в $\mathbb{R}$-языке Z.

Пусть задан конечный $\mathbb{R}$-автомат $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s,l)\}, \mathbf{q}\rangle$, выделено «нечеткое» подмножество $Y^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} Y$ его выходных символов, где оператор $\underset{\mu}{\subseteq}$ используется для обозначения того, что в $Y^{(\text{к})}$ входят все символы из Y, но с некоторыми весами, т. е. $Y^{(\text{к})} = \{(y_l, \mu_{Y^{(\text{к})}}(y_l)) \,|\, y_l \in Y,\ \mu_{Y^{(\text{к})}}(y_l) \in \mathbb{R}\}$, и $R(y_{l_t} \,|\, \omega)$ есть вес такого события, что в такте t при поступлении на вход автомата слова $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$ автомат выдаст букву y_{l_t}. Тогда $\mathbb{R}$-*языком* Z, *представленным в* $\mathbb{R}$-*автомате* $\mathcal{A}$ *«нечетким» подмножеством конечных выходных символов* $Y^{(\text{к})}$ назовем «$\mathbb{R}$-нечеткое» множество слов

$$Z = \{\omega,\ \mu(\omega)\}_{\omega \in X^*} \tag{6}$$

в алфавите X, удовлетворяющих для всех $\omega \in X^*$ условию

$$\mu : X^* \to \mathbb{R}, \quad \mu(\omega) = \sum_{y_{l_t} \in Y^{(\text{к})}} R(y_{l_t} | \, \omega) \mu_{Y^{(\text{к})}}(y_{l_t}),$$

где $\mu(\omega)$ есть вес слова ω в $\mathbb{R}$-языке Z, $\mu_{Y^{(\text{к})}}(y_{l_t})$ – вес символа y_{l_t} в «нечетком» множестве $Y^{(\text{к})}$, а $R(y_{l_t} | \, \omega)$ вычисляется по следующей формуле:

$$R(y_{l_t} | \, \omega) = \sum_{y_{l_1}, \ldots, y_{l_{t-1}} \in Y} \mathbf{r} \prod_{\nu=1}^{t-1} \mathbf{R}(s_\nu, l_\nu) \mathbf{R}(s_t, l_t) \mathbf{q}.$$

В случае, если автомат $\mathcal{A}$ есть абстрактный $\mathbb{R}$-автомат с выделенным «нечетким» подмножеством конечных состояний $A^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} A$, т. е.

$$A^{(\text{к})} = \{(a_i, \mu_{A^{(\text{к})}}(a_i)) | \, a_i \in A, \ \mu_{A^{(\text{к})}}(a_i) \in \mathbb{R}\},$$

и $R(a_{i_t} | \, \omega)$ есть вес такого события, что автомат $\mathcal{A}$ при поступлении входного слова $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$ окажется в такте t в состоянии a_{i_t}, то *$\mathbb{R}$-языком Z, представленным в абстрактном $\mathbb{R}$-автомате $\mathcal{A}$ «нечетким» подмножеством конечных состояний $A^{(\text{к})}$*, будем называть «$\mathbb{R}$-нечеткое» множество слов $Z = \{\omega, \mu(\omega)\}_{\omega \in X^*}$ в алфавите X такое, что

$$\mu : X^* \to \mathbb{R}, \qquad \mu(\omega) = \sum_{a_{i_t} \in A^{(\text{к})}} R(a_{i_t} | \, \omega) \mu_{A^{(\text{к})}}(a_{i_t}), \tag{7}$$

где $R(a_{i_t} | \, \omega)$ вычисляется по следующей формуле:

$$R(a_{i_t} | \, \omega) = \mathbf{r} \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{R}(s_\nu) \mathbf{q}_{i_t},$$

и $\mathbf{q}_{i_t} = (0, 0, \ldots, q_{i_t}, \ldots, 0)^T$.

Для абстрактного $\mathbb{R}$-автомата с m состояниями «нечеткое» подмножество конечных состояний $A^{(\text{к})}$ можно задавать m-мерным вектор-столбцом

$$\mathbf{a}^{(\text{к})} = (\mu_{A^{(\text{к})}}(a_0) \, , \, \mu_{A^{(\text{к})}}(a_1) \, , \, \ldots \, , \, \mu_{A^{(\text{к})}}(a_{m-1}))^T.$$

В таком случае выражение (7) примет вид $\mu(\omega) = \mathbf{r}\mathbf{R}(\omega)\mathbf{q}^{(\text{к})}$, где $\mathbf{q}^{(\text{к})}$ – результат поэлементного умножения векторов $\mathbf{a}^{(\text{к})}$ и $\mathbf{q}$,

т. е. $\mathbf{q}^{(\text{к})} = (\mu_{A^{(\text{к})}}(a_0)q_0\,,\ \mu_{A^{(\text{к})}}(a_1)q_1\,,\ \ldots\,,\ \mu_{A^{(\text{к})}}(a_{m-1})q_{m-1})$, а $\mathbf{R}(\omega)$ есть

$$\mathbf{R}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{R}(e) = \mathbf{I}(m) & \text{при } t = 0, \\ \mathbf{R}(\omega) = \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{R}(s_\nu) & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$\omega = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$, и $\mathbf{I}(m)$ – единичная $(m \times m)$-матрица.

В [2] доказана справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 2. *Для любого обобщенного $\mathbb{R}$-автомата $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s,l)\}, \mathbf{q}\rangle$, имеющего m состояний и k выходных символов, в котором «нечетким» подмножеством выходных символов $Y^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} \underset{\mu}{\subseteq} Y$ представлен $\mathbb{R}$-язык Z (6), можно построить такой абстрактный $\mathbb{R}$-автомат $\mathcal{B} = \langle X, B, \mathbf{r}', \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}'\rangle$, имеющий mk состояний, в котором $\mathbb{R}$-язык Z представлен некоторым «нечетким» подмножеством $B^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} B$.*

Из теорем 1 и 2 следует, что в принципе задачу представимости языков можно рассматривать для абстрактных $\mathbb{R}$-нечетких и стохастических автоматов. В [2] доказано также следующее утверждение, которое в дальнейшем будем называть теоремой о сводимости.

Т е о р е м а 3. *Пусть задан абстрактный $\mathbb{R}$-автомат*

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \langle X,\ \widetilde{A},\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{R}(s)\},\ \mathbf{q}^{(\text{к})}\rangle, \tag{8}$$

где $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, $\widetilde{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, и выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{r} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$;

2) $\mathbf{q}^{(\text{к})} = (q_0, q_1, \ldots, q_{m-1})$, $q_j \in [0,1]$, $j = \overline{0, m-1}$;

3) $\mathbf{R}(s) = (R_{ij}(s))_{m,m}$, $R_{ij}(s) \in [0,1]$, $\sum_{j=0}^{m-1} R_{ij}(s) \leqslant 1$, *для всех* $i = \overline{0, m-1}$ *и* $s = \overline{0, n-1}$.

Тогда можно построить эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный стохастический автомат

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X,\ A,\ \mathbf{p},\ \{\mathbf{P}(s)\},\ \mathbf{e}^{(\text{к})}\rangle, \tag{9}$$

имеющий не более $2m+2$ состояний и такой, что для всех $\omega \in X^*$ выполняется

$$\mathbf{p}\mathbf{P}(\omega)\mathbf{e}^{(\text{к})} = \mathbf{r}\mathbf{R}(\omega)\mathbf{q}^{(\text{к})}. \tag{10}$$

В [2] предложен алгоритм построения стохастического автомата (9), для которого выполняется (10), по $\mathbb{R}$-автомату (8), удовлетворяющему условиям теоремы 3.

4. Регулярные $\mathbb{R}$-языки и формулировка задачи

В соответствии с понятиями, введенными в работах [6, 7], приведем ряд определений, где $\Phi_Z(w) = \mu_Z(w)$ есть еще одно, принятое в теории регулярных $\mathbb{R}$-языков, обозначение веса слова $w \in X^*$ в Z.

Элементарными $\mathbb{R}$-*языками* в алфавите $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ назовем $\mathbb{R}$-языки $Z = e$ («пустое» слово) и $Z = x_s$, $s = \overline{0, n-1}$, определяемые соотношениями

$$\Phi_e(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = e, \\ 0 & \text{при } \omega \neq e, \end{cases} \qquad \Phi_{x_s}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = x_s, \\ 0 & \text{при } \omega \neq x_s. \end{cases} \tag{11}$$

Элементарные $\mathbb{R}$-языки с весами (11) обозначают (как и в обычной алгебре регулярных языков) символами $e, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Для $\mathbb{R}$-языков определяются следующие операции.

Скалярным произведением числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$-языка Z называются $\mathbb{R}$-языки, обозначаемые соответственно αZ и $Z\alpha$ и определяемые следующими соотношениями весов слов для всех $\omega \in X^*$:

$$\Phi_{\alpha Z}(\omega) = \alpha \Phi_Z(\omega), \qquad \Phi_{Z\alpha}(\omega) = \Phi_Z(\omega)\alpha.$$

Дизъюнкция $\mathbb{R}$-языков Z_1 и Z_2 обозначается $Z = Z_1 \cup Z_2$ и для всех $\omega \in X^*$ определяется следующим соотношением

$$\Phi_Z(\omega) = \Phi_{Z_1}(\omega) + \Phi_{Z_2}(\omega).$$

Произведением $\mathbb{R}$-языков Z_1 и Z_2 называется $\mathbb{R}$-язык $Z = Z_1 Z_2$, определяемый для весов слов выражением

$$\Phi_Z(\omega) = \sum_{\Omega} \Phi_{Z_1}(\omega_1)\Phi_{Z_2}(\omega_2)$$

для всех $\omega \in X^*$, где Ω есть множество всевозможных таких пар слов $\omega_1, \omega_2 \in X^*$, что $\omega_1\omega_2 = \omega$.

Итерация $\mathbb{R}$-языка Z обозначается Z^* и определяется соотношением

$$\Phi_{Z^*}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = e, \\ \sum\limits_{\Omega} \Phi_Z(\omega_1)\Phi_Z(\omega_2)\ldots\Phi_Z(\omega_\nu) & \text{при } \omega \neq e, \end{cases}$$

для всех $\omega \in X^*$, где Ω есть множество всевозможных представлений ω в виде последовательности конечного числа ν, $1 \leqslant \nu \leqslant t$, $t = |\omega|$, непустых отрезков $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_\nu$.

Всякий $\mathbb{R}$-язык, который может быть получен из элементарных $\mathbb{R}$-языков с помощью конечного числа операций скалярного умножения, дизъюнкции, умножения и итерации, называется *регулярным* $\mathbb{R}$*-языком.* С использованием введенных обозначений для элементарных $\mathbb{R}$-языков и операций каждый регулярный $\mathbb{R}$-язык может быть задан его *регулярным выражением.* При этом, естественно, каждый регулярный $\mathbb{R}$-язык может иметь множество различных регулярных выражений, получаемых, в частности, с помощью весьма ограниченного набора известных в алгебре регулярных $\mathbb{R}$-языков элементарных эквивалентных преобразований, что не всегда дает возможность построить последовательность таких преобразований, позволяющую осуществить переход от заданного регулярного выражения $\mathbb{R}$-языка Z к любому другому регулярному выражению этого языка. В частности, для любых регулярных $\mathbb{R}$-языков Z, Z_1, Z_2, Z_3 в алфавите X, пустого слова e и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ возможны следующие эквивалентные преобразования:

$$Z_1 \cup Z_2 = Z_2 \cup Z_1, \quad Z_1 \cup (Z_2 \cup Z_3) = (Z_1 \cup Z_2) \cup Z_3,$$

$$(\alpha + \beta)Z = \alpha Z \cup \beta Z, \quad Z\alpha = \alpha Z, \quad eZ = Ze = Z,$$

$$Z_1(Z_2Z_3) = (Z_1Z_2)Z_3, \quad Z_1(Z_2 \cup Z_3) = Z_1Z_2 \cup Z_1Z_3,$$

$$(Z_1 \cup Z_2)Z_3 = Z_1Z_3 \cup Z_2Z_3, \quad e^* = e, \quad Z^nZ^* = Z^*Z^n.$$

Заметим, что в алгебре регулярных $\mathbb{R}$-языков, в отличии от обычной алгебры регулярных языков, операции дизъюнкции языков и итерации не обладают свойством идемпотентности $Z = Z \cup Z$ и $(Z^*)^* = Z^*$. Также, для $\mathbb{R}$-языков не будут выполнены законы мультипликативного и дизъюнктивного поглощения для итерации $Z^*Z^* = Z^*$ и $Z^* \cup Z^n = Z^*$.

Известно [1, 6, 7], что вероятностные и $\mathbb{R}$-нечеткие языки могут быть представлены соответственно в стохастических и $\mathbb{R}$-нечетких автоматах в том и только том случае, если они регулярны и, следовательно, могут быть представлены своими регулярными выражениями. При этом всякий регулярный вероятностный язык в то же время является регулярным $\mathbb{R}$-языком, однако обратное не выполняется. таким образом требуется специально исследовать следующую задачу – *найти и теоретически обосновать необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять регулярное выражение $\mathbb{R}$-языка Z, чтобы этот язык одновременно был бы вероятностным языком и можно было бы построить представляющий его стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr}$.*

5. Представимость в стохастических автоматах правильных квазивыпуклых относительно левых производных систем языков

Следующее утверждение содержит в себе одно из очевидных, не требующих доказательства, необходимых условий представимости обобщенных $\mathbb{R}$-языков в стохастических автоматах.

Теорема 4. *Пусть задан абстрактный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}, \mathbf{e}^{(\kappa)}\rangle$. Тогда для любого регулярного выражения вероятностного языка Z, представимого в данном автомате, необходимо, чтобы для любого слова $w \in Z$ выполнялось $0 \leqslant \Phi_Z(w) \leqslant 1$.*

Приведем еще ряд определений [1, 7]. Пусть задан алфавит $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ и Z есть $\mathbb{R}$-язык в алфавите X. Выделим какую-либо букву $x_s \in X$ и будем называть *левой производной* $\mathbb{R}$-языка Z по букве x_s $\mathbb{R}$-язык, обозначаемый $x_s^{-1}Z$ и такой, что

$$\Phi_{x_s^{-1}Z}(w) = \Phi_Z(x_s w) \quad \forall \ \ w \in X^*.$$

Соответственно *правой производной* $\mathbb{R}$-языка Z по букве $x_s \in X$ будем называть $\mathbb{R}$-язык, обозначаемый Zx_s^{-1}, для которого

$$\Phi_{Zx_s^{-1}}(w) = \Phi_Z(wx_s) \quad \forall\ w \in X^*.$$

Более подробные сведения о производных регулярного $\mathbb{R}$-языка по буквам алфавита X и способах их вычисления по регулярным

выражениям этого языка содержатся, например, в работе [7]. В частности, для левых производных $\mathbb{R}$-языков справедливы следующие соотношения:

$$x_s^{-1}\Lambda = \Lambda, \quad x_s^{-1}e = \Lambda, \quad x_s^{-1}x_s = e, \quad x_s^{-1}x_g = \Lambda \quad \text{при } g \neq s,$$

$$x_s^{-1}(\alpha Z) = \alpha(x_s^{-1}Z), \qquad x_s^{-1}(Z\alpha) = (x_s^{-1}Z)\alpha, \qquad x_s^{-1}\alpha = \Lambda,$$

$$x_s^{-1}(Z_1 \cup Z_2) = x_s^{-1}Z_1 \cup x_s^{-1}Z_2, \qquad x_s^{-1}Z^* = (x_s^{-1}Z)Z^*,$$

$$x_s^{-1}(Z_1Z_2) = (x_s^{-1}Z_1)Z_2 \cup \Phi_Z(e)(x_s^{-1}Z_2).$$

Систему регулярных $\mathbb{R}$-языков $\widetilde{Z} = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p-1}\}$ в алфавите X назовем *квазивыпуклой относительно левых производных,* если для всех $i = \overline{0, p-1}$ и $x_s \in X$ выполнены условия:

$$x_s^{-1}Z_i = \bigcup_{j=0}^{p-1} \alpha_{ij}(s)Z_j, \qquad \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{ij}(s) \leqslant 1, \qquad \alpha_{ij}(s) \geqslant 0.$$

Данное определение аналогичным образом можно ввести и для правых производных. Однако, так как любой факт, сформулированный в терминах левых производных можно с легкостью переформулировать на язык правых производных, то условимся в дальнейшем работать только с левыми производными.

Систему обобщенных регулярных $\mathbb{R}$-языков $\widetilde{Z} = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p-1}\}$ в алфавите X назовем *правильной,* если выполнено условие

$$0 \leqslant \Phi_{Z_i}(e) \leqslant 1, \quad \forall\, i = \overline{0, p-1}. \tag{12}$$

Теорема 5. *Если* $\widetilde{Z}^{(\mathbf{e}^{(\mathcal{K})})} = \{Z_0^{(\mathbf{e}^{(\mathcal{K})})}, Z_1^{(\mathbf{e}^{(\mathcal{K})})}, \ldots, Z_{m-1}^{(\mathbf{e}^{(\mathcal{K})})}\}$ *есть система вероятностных языков, представленных в абстрактном стохастическом автомате* $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}, \mathbf{e}^{(\mathcal{K})}\rangle$ *различными начальными состояниями (при заданном финальном векторе* $\mathbf{e}^{(\mathcal{K})}$*), то* $\widetilde{Z}^{(\mathbf{e}^{(\mathcal{K})})}$ *есть правильная система, квазивыпуклая относительно левых производных по буквам алфавита* X*.*

Доказательство. Для начала докажем, что указанная система является квазивыпуклой. Имеем

$$x_s^{-1}Z_i^{(\mathbf{e}^{(\mathrm{K})})} = x_s^{-1}\bigcup_j\bigcup_g P_{ij}(x_g)x_gZ_j^{(\mathbf{e}^{(\mathrm{K})})} = \bigcup_j P_{ij}(x_s)Z_j^{(\mathbf{e}^{(\mathrm{K})})},$$

$$\forall\ i=\overline{0,m-1},\quad x_s\in X,\quad \text{при}\quad \sum_{j=0}^{m-1} P_{ij}(x_s)=1,$$

т. е. действительно система $\widetilde{Z}^{(\mathbf{e}^{(\text{К})})}$ является квазивыпуклой относительно левых производных.

Докажем теперь правильность этой системы. Если каждый язык $Z_i^{(\mathbf{e}^{(\text{К})})}$ представлен в стохастическом автомате каким-то начальным состоянием (при заданном финальном векторе $\mathbf{e}^{(\text{К})}$), то он является вероятностным языком, а значит, согласно теореме 4, каждое слово, в том числе и пустое слово e, принадлежит ему с неким неотрицательным весом, не превосходящим единицу. □

Условимся для краткости правильную квазивыпуклую относительно левых производных систему называть правильной L-квазивыпуклой системой. Рассмотрим теперь обратную задачу – вопрос о существовании для любой заданной правильной L-квазивыпуклой системы регулярных $\mathbb{R}$-языков стохастического автомата, представляющего своими начальными состояниями эту систему (условие «при заданном финальном векторе $\mathbf{e}^{(\text{К})}$» в дальнейшем будем опускать как очевидное).

Пусть задан регулярный $\mathbb{R}$-язык Z в алфавите X, такой, что

$$\widetilde{Z}=\bigcup_{i=0}^{m-1}\alpha_i Z_i, \tag{13}$$

где $\alpha_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,m-1}$, — некоторые скаляры, а $Z_i,\ i=\overline{0,m-1}$, — заданные регулярные $\mathbb{R}$-языки, такие, что образуемая ими система $\mathbb{R}$-языков

$$\widetilde{Z}=\{Z_0,Z_1,\ldots,Z_{m-1}\} \tag{14}$$

является L-квазивыпуклой системой. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любой заданной правильной L-квазивыпуклой системы* (14) *из m регулярных $\mathbb{R}$-языков в алфавите X существует и может быть построен абстрактный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr}=\langle X,A,\{\mathbf{P}(s)\},\mathbf{e}^{(\text{К})}\rangle$ с $2m+2$ состояниями, представляющий $\mathbb{R}$-языки $Z_i,\ i=\overline{0,m-1}$, этой системы своими начальными состояниями.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы в принципе повторяет доказательство теоремы 3.3 из [6]. Следует однако заметить, что в нашем случае имеются некоторые ограничения на коэффициенты разложений производных, а значит, при образовании матриц переходов сумма элементов в каждой строке любой матрицы будет неотрицательной и не будет превосходить единицы. Кроме того образуемый финальный вектор также будет содержать неотрицательные и не превосходящие единицы элементы. Таким образом можно построить $\mathbb{R}$-автомат, удовлетворяющий условиям теоремы 3 о сводимости, а, значит, и эквивалентный ему стохастический автомат. □

Также можно сформулировать аналогичное следствие из этой теоремы.

Следствие 1. *Для любого заданного регулярного $\mathbb{R}$-языка $\widetilde{Z}$ в алфавите X, представимого в виде линейного разложения* (13) *по m регулярным $\mathbb{R}$-языкам Z_i, $i = \overline{0, m-1}$ (с неотрицательными коэффициентами, сумма которых не превышает единицу), образующим правильную L-квазивыпуклую систему $\mathbb{R}$-языков* (14), *существует и может быть построен абстрактный конечный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr}$ с не более чем $3m+1$ состояниями, представляющий этот $\mathbb{R}$-язык Z.*

Доказательство. Доказательство этого следствия также фактически повторяет доказательство соответствующего следствия из теоремы 3.3 работы [6], однако с теми же самыми замечаниями. При этом необходимо учесть тот факт, что теорему 3 о сводимости можно обобщить и на случай начального вектора $\mathbf{p}$, состоящего из неотрицательных элементов, сумма которых не превосходит единицу. Делается это следующим образом:

• вносятся изменения в формулировку теоремы, а именно в вид векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$\widetilde{\mathbf{p}} = (\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{m-1}), \quad \widetilde{p}_i \geqslant 0, \quad \sum_i \widetilde{p}_i \leqslant 1,$$

$$\widetilde{q}_i \geqslant 0, \quad \max_i \widetilde{q}_i \cdot \max_i \widetilde{p}_i \leqslant 1;$$

• вносятся следующие изменения в 4 шаг изложенного в [2] алгоритма построения автомата:

а) шаг 4 выполняется для каждого состояния a_j такого, что $\widetilde{p}_j\widetilde{q}_j > 0$, а именно если изначально был вектор $\widetilde{\mathbf{p}} = (\ldots, \widetilde{p}_j, \ldots)$, то это состояние «раздваивается» по следующей схеме:

$$\mathbf{p} = (\ldots, \widetilde{p}_j \cdot \max_i \widetilde{q}_i - \widetilde{p}_j\widetilde{q}_j, \widetilde{p}_j\widetilde{q}_j, \ldots), \quad \mathbf{q} = (\ldots, 0, 1, \ldots);$$

б) в каждой матрице $\mathbf{P}(s)$ удваивается строка j, т. е. в каждой новой матрице строки j и $j+1$ получаются равными между собой, а после j-го столбца, вставляется $(j+1)$-й столбец, состоящий из нулей.

Тогда при помощи такой вот обобщенной теоремы 3 из $\mathbb{R}$-автомата, полученного в процессе доказательства следствия из теоремы 6, строится искомый стохастический автомат. □

Также можно заметить, что если выполняются условия доказанного следствия, то $\mathbb{R}$-язык $\widetilde{Z}$ (при условии, что вес пустого слова e в данном языке неотрицателен и не превышает 1) может быть представлен в конечном абстрактном стохастическом автомате одним из своих начальных состояний. Этот факт не требует особого доказательства в силу своей очевидности, так как правильную L-квазивыпуклую систему всегда при необходимости можно дополнить $\mathbb{R}$-языком с указанными свойствами и при этом ни правильность, ни L-квазивыпуклость не нарушатся.

Таким образом, исходя из всех рассуждений можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. *(Необходимые и достаточные условия).*

Для того, чтобы обобщенный регулярный $\mathbb{R}$-язык $\widetilde{Z}$ был представим в конечном абстрактном стохастическом автомате, необходимо и достаточно, чтобы по нему можно было построить правильную L-квазивыпуклую систему $\mathbb{R}$-языков.

Доказательство. Это утверждение является прямым следствием теорем 5 и 6. □

6. Синтез автомата $\mathcal{A}_{pr}$ по регулярному выражению $\mathbb{R}$-языка

Введем некоторые вспомогательные определения, которые помогут сформулировать алгоритм синтеза.

$\mathbb{R}$-*языком* Z, *представленным в элементарной канонической форме*, назовем $\mathbb{R}$-язык, который может быть представлен в виде

$$Z = \bigcup_{k=0}^{p-1} \alpha_k \omega_k, \quad \text{где} \quad \omega_k \in X^*, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Канонической формой регулярного $\mathbb{R}$-*языка* Z *в алфавите* X назовем его представление в виде

$$Z = \bigcup_{i=0}^{r-1} \alpha_i \omega_{i0} \left(\prod_{j=0}^{l-1} Z_{ij}^* \, \omega_{ij} \right), \tag{16}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\omega_{ij} \in X^*$, а Z_{ij} – регулярные $\mathbb{R}$-языки в канонической форме. Так как количество операций итерации в любом регулярном выражении конечно, то за конечное количество представлений $\mathbb{R}$-языка Z через $\mathbb{R}$-языки Z_{ij} можно дойти до момента, когда $\mathbb{R}$-язык Z_{ij} будет находиться в элементарной канонической форме (15), поэтому определение канонической формы регулярного обобщенного $\mathbb{R}$-языка корректно.

Нетрудно заметить, что так как количество операций итерации, умножения, объединения и умножения на скаляр в любом регулярном выражении конечно, то любой регулярный $\mathbb{R}$-язык можно привести к каноническому виду, переставив все скаляры в каждом элементе объединения вперед (в связи с коммутативностью операции умножения на скаляр) и раскрыв все объединения, не находящиеся под знаком итерации. Далее следует проделывать это для каждого $\mathbb{R}$-языка Z_{ij}, входящего в запись начального $\mathbb{R}$-языка в виде Z_{ij}^*. За конечное количество преобразований по такой схеме будет получен канонический вид $\mathbb{R}$-языка Z. Поясним процедуру приведения регулярного выражения $\mathbb{R}$-языка Z к канонической форме на следующем примере.

Пример. Пусть задано регулярное выражение $\mathbb{R}$-языка

$$Z = (0.5x_1 \cup x_1(0.2x_1 \cup ((0.5x_1 \cup 0.1x_2)(0.2x_2)^*)^*))(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^* 0.9x_3.$$

Раскроем по возможности все знаки объединения и все скобки, не

находящиеся под знаком итерации,

$$Z = 0.5x_1(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3 \cup$$
$$\cup x_1(0.2x_1 \cup ((0.5x_1 \cup 0.1x_2)(0.2x_2)^*)^*)(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3 =$$
$$= 0.5x_1(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3 \cup x_1 0.2x_1(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3 \cup$$
$$\cup x_1((0.5x_1 \cup 0.1x_2)(0.2x_2)^*)^*(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3.$$

Теперь, в каждом элементе объединения ищем выражения вида $\widehat{Z}^*$ и для каждого $\mathbb{R}$-языка $\widehat{Z}$ проделываем аналогичную процедуру.

$$Z = 0.5x_1(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3 \cup x_1 0.2x_1(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3 \cup$$
$$\cup x_1(0.5x_1(0.2x_2)^* \cup 0.1x_2(0.2x_2)^*)^*(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*0.9x_3.$$

Больше нет скобок, которые можно было бы раскрыть, поэтому остается только по возможности переместить скаляры влево

$$Z = 0.45x_1(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*x_3 \cup 0.18x_1x_1(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*x_3 \cup$$
$$\cup 0.9x_1(0.5x_1(0.2x_2)^* \cup 0.1x_2(0.2x_2)^*)^*(0.1x_1 \cup 0.2x_2)^*x_3.$$

Таким образом регулярное выражения $\mathbb{R}$-языка Z приведено к канонической форме.

Канонической единицей регулярного $\mathbb{R}$-языка Z в алфавите X, находящегося в канонической форме (16), назовем каждый элемент объединения, без коэффициента α_i, т. е. каждый элемент вида

$$\omega_{i0}\left(\prod_{j=1}^{l} Z_{ij}^* \, \omega_{ij}\right) \tag{17}$$

Тогда при помощи всех доказанных в предыдущем пункте теорем и следствий, а также используя введенные определения, можно сформулировать алгоритм синтеза конечного стохастического автомата по регулярному выражению $\mathbb{R}$-языка Z.

Алгоритм синтеза.

Синтез абстрактного стохастического автомата $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}, \mathbf{e}^{(\text{к})}\rangle$ по заданному регулярному выражению $\mathbb{R}$-языка Z с помощью вычисления левых производных по буквам алфавита X может быть выполнен следующим образом:

1. Пусть $Z = Z_0$. В исходном положении множество введенных состояний $A^{(0)}$ есть одноэлементное множество $A^{(0)} = \{a_0\}$, сопоставленное соответственно одноэлементному множеству $\widetilde{Z}^{(0)} = \{Z_0\}$, а также множество коэффициентов $\Gamma = \varnothing$.

2. Пусть на h-м шаге имеем $A^{(h-1)} = \{a_0, a_1, \ldots, a_h\}$, $A^{(h)} = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, $k > h$, и соответственно $\widetilde{Z}^{(h-1)} = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_h\}$, $\widetilde{Z}^{(h)} = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_k\}$, $k > h$, где $Z_i \neq Z_j$, $i \neq j$. Обозначим $m_h = |\widetilde{Z}^{(h)}|$. Тогда для добавившихся в $\widetilde{Z}^{(h-1)}$ $\mathbb{R}$-языков Z_i, $i = \overline{h+1, k}$, находим их производные по каждой букве алфавита X. При этом, если

$$x_s^{-1} Z_i = \left(\bigcup_{j=0}^{m_h - 1} \alpha_{ij}(s) Z_j \right) \cup \widehat{Z}_i, \tag{18}$$

где $Z_j \in \widetilde{Z}^{(h)}$, $\widehat{Z}_i = \bigcup\limits_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \widehat{Z}_{ij}$ и никакое подмножество слов $\mathbb{R}$-языка $\widehat{Z}_i$ не представимо в виде αZ_k, где $Z_k \in \widetilde{Z}^{(h)}$, а $\widehat{Z}_{ij}$ – каноническая единица (см. (17)) $\mathbb{R}$-языка $\widehat{Z}_i$ и $\alpha_{ij}(s), \beta_{ij}(s) \geqslant 0$, то возможны следующие варианты.

2.1. При $\widehat{Z}_i = \Lambda$:

а) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h - 1} \alpha_{ij}(s) \leqslant 1$, то в множество Γ добавляем все коэффициенты $\alpha_{ij}(s)$, где индекс $j = \overline{0, m_h - 1}$, а в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ ничего не добавляем и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$;

б) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h - 1} \alpha_{ij}(s) \geqslant 1$, то в множество Γ добавляем элемент $\alpha_{im_h}(s) = 1$, а в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ добавляем соответственно состояние a_{m_h} и $\mathbb{R}$-язык $Z_{m_h} = x_s^{-1} Z_i$, m_h увеличиваем на единицу, т. е. $m_h := m_h + 1$, и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$.

2.2. При $\widehat{Z}_i \neq \Lambda$:

а) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h - 1} \alpha_{ij}(s) + \sum\limits_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \leqslant 1$, то в множество Γ добавляем все элементы $\alpha_{ij}(s)$ и элемент $\alpha_{im_h}(s) = \left(1 - \sum\limits_{j=0}^{m_h - 1} \alpha_{ij}(s)\right)$, а в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ добавляем соответственно состояние

a_{m_h} и $\mathbb{R}$-язык $Z_{m_h} = \frac{1}{\alpha_{im_h}(s)}\widehat{Z} = \bigcup\limits_{j=0}^{l} \frac{\beta_{ij}(s)}{\alpha_{im_h}(s)}\widehat{Z}_{ij}$, m_h увеличиваем на единицу, т. е. $m_h := m_h + 1$, и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$;

б) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h-1} \alpha_{ij}(s) + \sum\limits_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \geqslant 1$, то в множество Γ добавляем элемент $\alpha_{im_h}(s) = 1$, в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ добавляем соответственно состояние a_{m_h} и $\mathbb{R}$-язык $Z_{m_h} = x_s^{-1} Z_i$, m_h увеличиваем на единицу, т. е. $m_h := m_h + 1$, и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$.

В результате вычислений всех указанных производных будут определены множества $A^{(h+1)}$ и $\widetilde{Z}^{(h+1)}$. Повторение данной процедуры заканчивается, когда $\widetilde{Z}^{(h+1)} = \widetilde{Z}^{(h)}$. Причем полученная система $\widetilde{Z}^{(h)}$ будет являться L-квазивыпуклой.

Данный этап завершается построением $\mathbb{R}$-автомата $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle X, \widetilde{A}, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}\rangle$, где

$$\widetilde{A} = A^{(h+1)} = A^{(h)}, \quad \mathbf{r} = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_{m-1})^T,$$

$$q_i = \Phi_{Z_i}(e), \quad i = \overline{0, m-1}, \quad m = |\widetilde{A}|,$$

а матрицы переходов $\mathbf{R}(s) = \big(R_{ij}(s)\big)_{m,m}$ строятся следующим образом:

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \alpha_{ij}(s), & \text{если } \alpha_{ij}(s) \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } \alpha_{ij}(s) \notin \Gamma. \end{cases}$$

3. Искомый автомат $\mathcal{A}_{pr}$ получается из $\widetilde{\mathcal{A}}$ применением теоремы 3 о сводимости.

Примечание. Когда в данном алгоритме проделывается процедура взятия производных по буквам алфавита X, то должны получаться выражения вида (18). Интуитивно понятно как это делается, но поясним на словах получение данного выражение. Как и обычно находим производную $\mathbb{R}$-языка по некоторой букве. Затем полученное выражение приводится к каноническому виду. Из множества $\widetilde{Z}^{(h)}$ выбирается любой $\mathbb{R}$-язык, в который входят канонические единицы, каждая из которых содержится в полученном выражении с некоторым коэффициентом. Делением коэффициентов при этих канонических единицах в выражении производной на

соответствующие коэффициенты в выбранном $\mathbb{R}$-языке из множества $\widetilde{Z}^{(h)}$ получается некий набор коэффициентов, который описывает на какой скаляр надо домножить каждый элемент объединения выбранного $\mathbb{R}$-языка, чтобы получить элемент объединения из канонического представления производной. Среди этих коэффициентов выбирается минимальный и из выражения производный выделяется выбранный $\mathbb{R}$-язык с этим коэффициентом. В результате получаем, что каноническая единица, которой соответствовал этот коэффициент, полностью выделилась в этот $\mathbb{R}$-язык, а остальные выделились лишь частично, поэтому они остались в $\mathbb{R}$-языке $\widehat{Z}$ с некоторыми (но уже меньшими) коэффициентами. Данная процедура повторяется для всех $\mathbb{R}$-языков из множества $\widetilde{Z}^{(h)}$.

7. Условия представимости $\mathbb{R}$-языков в стохастических автоматах в терминах весовой функции и обоснование алгоритма

Достаточные условия в теореме 7 говорят о том, что если по регулярному выражению $\mathbb{R}$-языка можно построить правильную квазивыпуклую систему, то воспользовавшись теоремой 3 о сводимости можно построить стохастический автомат, представляющий этот регулярный $\mathbb{R}$-язык одним из своих начальных состояний. Если же посмотреть на сам алгоритм, то нетрудно заметить, что он обеспечивает только квазивыпуклость получаемой системы $\mathbb{R}$-языков, соответствующей вводимым состояниям автомата. То, что построенная система будет являться правильной (в смысле определения (12)), алгоритм не обеспечивает. Таким образом, естественно, необходимо накладывать некоторые условия на само регулярное выражение, чтобы в итоге получалась правильная система $\mathbb{R}$-языков. Теорема, которая будет сформулирована ниже, как раз и содержит эти условия, которые автоматически являются и достаточными условиями для построения по $\mathbb{R}$-языку стохастического автомата.

Теорема 8. *Пусть задано некоторое регулярное выражение $\mathbb{R}$-языка Z. Тогда, если это выражение можно представить в каноническом виде* (16)*, где все скаляры (в том числе и находящиеся под знаком итерации) неотрицательны, а вес любого слова $\mathbb{R}$-языка Z неотрицателен и не превосходит единицы, т. е.*

$$0 \leqslant \mu_Z(\omega) \leqslant 1 \quad \forall\, \omega \in Z, \tag{19}$$

то тогда существует абстрактный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr}$, *представляющий этот* $\mathbb{R}$*-язык* Z.

Прежде чем приступить к доказательству данного утверждения, сформулируем несколько достаточно простых лемм.

Л е м м а 1. *Если задано регулярное выражение* $\mathbb{R}$*-языка* Z, *удовлетворяющее условиям теоремы, то все скаляры (в том числе и находящиеся под знаком итерации) канонической формы* (16) *языка* Z *не превосходят единицы.*

Доказательство. Этот факт очевиден из рассуждений, что если при выполнении условий теоремы нашлось такое i, что $\alpha_i \geqslant 1$, то так как все остальные скаляры неотрицательны, то принадлежность слова $\omega_{i0}\left(\prod_{j=1}^{l} \omega_{ij}\right)$ $\mathbb{R}$-языку Z, будет не менее, чем α_i, а значит заведомо будет превосходить единицу, что противоречит условию. Если же скаляр превышающий единицу, находится под знаком итерации, то тогда, увеличивая длину соответствующего слова, можно получить сколь угодно большую степень принадлежности слова данной итерации. Значит, так как количество операций умножения на скаляр и произведения $\mathbb{R}$-языков в каждой канонической единице конечно, то значит эта степень принадлежности будет домножена на некоторый фиксированный коэффициент меньший единицы. Следовательно, увеличивая длину слова за счет итерации, в которой присутствует превосходящий единицу скаляр, можно найти слово $\mathbb{R}$-языка Z, степень принадлежности которого будет превосходить единицу, что опять же противоречит условию. □

Л е м м а 2. *Если задано регулярное выражение* $\mathbb{R}$*-языка* Z, *удовлетворяющее условиям теоремы, то все скаляры канонической формы производных любого порядка* $\mathbb{R}$*-языка* Z *также не превосходят единицы.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 1 за исключением того, что ищется слово с принадлежностью больше единицы у производной $\mathbb{R}$-языка, а так как если исходный $\mathbb{R}$-язык Z удовлетворял условиям теоремы, то и любая производная будет удовлетворять условиям теоремы, т. е. опять получаем противоречие. □

Л е м м а 3. *Если задано регулярное выражение $\mathbb{R}$-языка Z, удовлетворяющее условиям теоремы, то каждое слово принадлежащее канонической единице, содержащейся в канонической форме производной любого порядка $\mathbb{R}$-языка Z, принадлежит этой канонической единице со степенью принадлежности не более единицы.*

Доказательство. Этот факт есть прямое следствие лемм 1–2. □

Итак, перейдем теперь к доказательству теоремы 8.

Доказательство. Как упоминалось ранее, необходимо доказать правильность образуемой по алгоритму системы $\mathbb{R}$-языков. Это означает, что необходимо показать, что при заданных условиях степень принадлежности пустого слова для нового вводимого по алгоритму $\mathbb{R}$-языка, соответствующего новому состоянию, будет неотрицательна и не будет превосходить единицы.

Будем доказывать это по индукции.

• **База индукции.** На начальном (точнее нулевом) шаге алгоритма имеем систему введенных по алгоритму $\mathbb{R}$-языков $\widetilde{Z}^{(0)} = \{Z_0\}$, где $Z_0 = Z$. Тогда, так как $\mu_{Z_0}(\omega) = \mu_Z(\omega)$ для всех $\omega \in Z_0$, получаем, что база индукции доказана.

• **Предположение индукции.** Пусть на некотором шаге алгоритма имеем систему введенных $\mathbb{R}$-языков $\widetilde{Z}^{(h-1)} = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_h\}$, соответствующих множеству введенных состояний, причем выполнено, что $0 \leqslant \mu_{Z_i}(\omega) \leqslant 1$ для всех $\omega \in Z_i$, $i \in \overline{0, h}$.

• **Шаг индукции.** Докажем, что следующий вводимый в систему $\widetilde{Z}^{(h)}$ $\mathbb{R}$-язык Z_{h+1}, соответствующий новому вводимому состоянию a_{h+1}, будет обладать свойством

$$0 \leqslant \mu_{Z_{h+1}}(\omega) \leqslant 1 \quad \forall\, \omega \in Z_{h+1}.$$

Для этого вернемся к алгоритму синтеза, описанному в разделе 6, и посмотрим, когда и при каких условиях может ввестись этот новый $\mathbb{R}$-язык. Для начала рассмотрим очевидные случаи, которые описаны в алгоритме синтеза (см. раздел 6) и появляются при взятии очередной производной от некоторого уже введенного $\mathbb{R}$-языка.

Пункт 2.1 а алгоритма. Если выполняются условия данного пункта алгоритма синтеза, то новых состояний (следовательно и новых $\mathbb{R}$-языков в систему $\widetilde{Z}^{(h)}$) не вводится, поэтому этот случай не представляет интереса.

Пункт 2.1 б алгоритма. Если выполняются условия данного пункта алгоритма (т. е. новое, вводимое в автомат, состояние появляется при условиях данного пункта), то

$$\exists \;\; k \in \{\overline{0,h}\} \quad x_s^{-1} Z_k = Z_{h+1},$$

и тогда

$$\mu_{Z_{h+1}}(\omega) = \mu_{Z_k}(x_s \omega) \quad \forall\, \omega \in Z_{h+1},$$

а значит по предположению индукции требуемое условие выполняется.

Пункт 2.2 б алгоритма. Аналогичен по доказательству пункта 2.1 б.

Перейдем к доказательству основного случая (пункт 2.2 а алгоритма синтеза).

Пункт 2.2 а алгоритма. Пусть Z_{h+1} вводится при условиях данного пункта. Тогда из алгоритма следует, что

$$\exists\, k \in \{\overline{0,h}\} \quad x_s^{-1} Z_k = \left(\bigcup_{j=0}^{h} \alpha_{kj}(s) Z_j \right) \;\cup\; \left(1 - \sum_{j=0}^{h} \alpha_{kj}(s) \right) Z_{h+1}.$$

Также из алгоритма следует, что $\mathbb{R}$-язык Z_{h+1} представлен в виде

$$Z_{h+1} = \bigcup_{j=0}^{l} \frac{\beta_{kj}(s)}{(1 - \sum_{j=0}^{h} \alpha_{kj}(s))} \widehat{Z}_{kj},$$

где $\widehat{Z}_{kj}$ – каноническая единица $\mathbb{R}$-языка Z_{h+1}.

В таком случае, воспользовавшись леммами 1-3 имеем, что

$$\mu_{Z_{h+1}}(\omega) \leqslant \frac{\sum_{j=0}^{l} \beta_{kj}(s)}{(1 - \sum_{j=0}^{h} \alpha_{kj}(s))} \quad \forall\, \omega \in Z_{h+1}.$$

Заметим, что этот случай имеет место, когда выполнено неравенство

$$\sum_{j=0}^{h} \alpha_{ij}(s) + \sum_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \leqslant 1,$$

т. е.

$$\sum_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \leqslant 1 - \sum_{j=0}^{h} \alpha_{ij}(s).$$

Следовательно, условие $\mu_{Z_{h+1}}(\omega) \leqslant 1$ для всех $\omega \in Z_{h+1}$ выполнено.

Левая же часть требуемого неравенства выполнена (т. е. для всех $\omega \in Z_{h+1}$ $0 \leqslant \mu_{Z_{h+1}}(\omega)$), исходя из того, что по леммам 1-3 $\mu_{Z_{h+1}}(\omega) \geqslant \frac{\min \beta_{kj}(s)}{(1-\sum_{j=0}^{h} \alpha_{kj}(s))}$, а из этих же замечаний следует, что все $\beta_{kj}(s) \geqslant 0$.

Таким образом шаг индукции доказан, и тем самым доказано, что степень принадлежности любого слова во вводимом $\mathbb{R}$-языке неотрицательна и не превосходит единицы, а значит это верно и для пустого слова. Следовательно доказана правильность образуемой системы $\mathbb{R}$-языков, а значит доказана достаточность сформулированных условий. □

Доказанная теорема дает обоснование сформулированного алгоритма синтеза, утверждая что при указанных в теореме условиях алгоритм будет порождать по заданному регулярному выражению $\mathbb{R}$-языка Z правильную квазивыпуклую систему $\mathbb{R}$-языков, а тогда можно будет построить абстрактный стохастический автомат, порождающий этот $\mathbb{R}$-язык.

Исходя из всего выше сказанного можно сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях представимости обобщенного регулярного $\mathbb{R}$-языка в стохастическом автомате.

Теорема 9. *Для того, чтобы регулярный $\mathbb{R}$-язык Z был представим в стохастическом автомате необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1. Регулярное выражение $\mathbb{R}$-языка Z может быть представлено в каноническом виде (16)*, где все входящие в выражение языка скаляры неотрицательны.*

2. Вес любого слова $\omega \in Z$ не превышает единицу, то есть $0 \leqslant \mu_Z(\omega) \leqslant 1$ для всех $\omega \in Z$.

Доказательство. Достаточность указанных условий доказана в теореме 8. Докажем их необходимость.

Пункт 2 следует из теоремы 4. Доказательство же пункта 1 вытекает из того, что если задан $\mathbb{R}$-язык Z, представимый в некотором стохастическом автомате, то согласно предложенным в работе [6] методам анализа можно построить регулярное выражение этого языка, причем нетрудно заметить, что поскольку матрицы переходов, а также начальный и конечный вектора содержат неотрицательные элементы и скаляры, входящие в это регулярное выра-

жение, получаются из элементов матриц и векторов при помощи операций умножения и сложения, то все эти скаляры будут неотрицательны. □

8. Пример синтеза стохастического автомата по регулярному выражению $\mathbb{R}$-языка

Пусть задано следующее регулярное выражение $\mathbb{R}$-языка, удовлетворяющее условиям теоремы 9,

$$Z=\Big(0.008x_1\big(0.03x_1(0.5x_1\cup 0.2x_2)^*x_1\cup 0.6x_1\big)^*x_2(0.5x_1\cup 0.2x_2)^*x_1\cup$$
$$\cup 0.14x_1(0.5x_1\cup 0.2x_2)^*x_2\Big)^*.$$

Воспользуемся описанным в разделе 6 алгоритмом синтеза и построим по этому выражению абстрактный стохастический автомат.

Введем следующие обозначения, которые упростят запись и вычисление производных,

$$A=(0.5x_1\cup 0.2x_2)^*,\qquad B=(0.03x_1Ax_1\cup 0.6x_1)^*.$$

В этом случае $\mathbb{R}$-язык Z можно записать в более удобном виде

$$Z=(0.008x_1Bx_2Ax_1\cup 0.14x_1Ax_2)^*,$$

причем

$$x_1^{-1}A=0.5A,\qquad x_1^{-1}B=0.03Ax_1B\cup 0.6B,$$
$$x_2^{-1}A=0.2A,\qquad x_2^{-1}B=\Lambda.$$

В соответствии с алгоритмом после преобразований получаем начальное условие $Z=\boxed{Z_0}$, $\quad\Phi_{Z_0}(e)=1$.

Производные первого порядка имеют вид:

$$x_1^{-1}Z_0=0.008Bx_2Ax_1Z_0\cup 0.14Ax_2Z_0=\boxed{Z_1},\Phi_{Z_1}(e)=0,\quad x_2^{-1}Z_0=\Lambda.$$

Производные второго порядка:

$$x_1^{-1}Z_1=0.5Z_1\cup 0.5(0.00048Ax_1Bx_2Ax_1Z_0\cup 0.0016Bx_2Ax_1Z_0)=$$
$$=0.5Z_1\cup 0.5\boxed{Z_2},\quad\Phi_{Z_2}(e)=0,$$

$$x_2^{-1}Z_1 = 0.14Z_0 \cup 0.86\left(\frac{2}{215}Ax_1Z_0 \cup \frac{7}{215}Ax_2Z_0\right) = 0.14Z_0 \cup 0.86\boxed{Z_3},$$

$$\Phi_{Z_3}(e) = 0.$$

Производные третьего порядка:

$$x_1^{-1}Z_2 = 0.6Z_2 \cup 0.4(0.0012Bx_2Ax_1Z_0) = 0.6Z_2 \cup 0.4\boxed{Z_4}, \quad \Phi_{Z_4}(e) = 0,$$

$$x_2^{-1}Z_2 = 0.000096Ax_1Bx_2Ax_1Z_0 \cup 0.0016Ax_1Z_0 = \boxed{Z_5}, \quad \Phi_{Z_5}(e) = 0,$$

$$x_1^{-1}Z_3 = 0.5Z_3 \cup \frac{2}{215}Z_0, \quad x_2^{-1}Z_3 = 0.2Z_3 \cup \frac{7}{215}Z_0.$$

Производные четвертого порядка:

$$x_1^{-1}Z_4 = 0.075Z_2 \cup 0.5Z_4, \quad x_2^{-1}Z_4 = 0.0012Ax_1Z_0 = \boxed{Z_6}, \quad \Phi_{Z_6}(e) = 0,$$

$$x_1^{-1}Z_5 = 0.0016Z_0 \cup 0.5Z_5 \cup 0.08Z_4, \quad x_2^{-1}Z_5 = 0.2Z_5.$$

Производные пятого порядка:

$$x_1^{-1}Z_6 = 0.0012Z_0 \cup 0.5Z_6, \quad x_2^{-1}Z_6 = 0.2Z_6.$$

Таким образом построена правильная L-квазивыпуклая система $\mathbb{R}$-языков и значит можно построить $\mathbb{R}$-автомат $\widetilde{\mathcal{A}}$, удовлетворяющий условиям теоремы 3 о сводимости,

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \langle X,\ \widetilde{A},\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{R}(s)\},\ \mathbf{q}\rangle,$$

где $X = \{x_1, x_2\}$, $\widetilde{A} = \{\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_6\}$, $\mathbf{r} = (1,0,0,0,0,0,0)$, $\mathbf{q} = (1,0,0,0,0,0,0)^T$,

$$\mathbf{R}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ \frac{2}{215} & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.075 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.0016 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.5 & 0 \\ 0.0012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0 & 0 & 0.86 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{215} & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix},$$

и значит, применив теорему 3, можно по нему построить искомый абстрактный стохастический автомат, который после удаления недостижимых состояний будет иметь вид:

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X,\ A,\ \mathbf{p},\ \{\mathbf{P}(s)\},\ \mathbf{e}^{(\text{к})}\rangle,$$

где $x = \{x_1, x_2\}$, $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_7\}$, $\mathbf{p} = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, $\mathbf{e}^{(\text{к})} = (1,0,0,0,0,0,0,0)^T$,

$$\mathbf{P}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{215} & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \frac{211}{430} \\ 0 & 0 & 0.075 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.425 \\ 0.0016 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.5 & 0 & 0.4184 \\ 0.0012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.4988 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.14 & 0 & 0 & 0.86 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{215} & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & \frac{33}{43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стоит отметить, что разложение производных по уже введенным $\mathbb{R}$-языкам может быть не единственным, причем в зависимости от разложения при построении автомата, подходящего под условия теоремы о сводимости, может быть больше или меньше ненулевых элементов в матрицах переходов. Кроме того, нельзя исключать ситуации, когда в зависимости от разложения могут появиться новые состояния, которые бы при другом разложении не нужно было бы вводить. Таким образом выбор варианта выделения может повлиять и на количество состояний в итоговом автомате.

9. Замечание о достаточных условиях

Рассмотрим следующий регулярный $\mathbb{R}$-язык

$$Z = 0.9(x_1 \cup x_2)^* \cup 0.1(-x_1 \cup x_2)^*. \tag{20}$$

Применим к нему описанный в разделе 6 алгоритм.

Начальный шаг: $Z = \boxed{Z_0}$, $\quad \Phi_{Z_0}(e) = 1$.

Производные первого порядка:

$$x_1^{-1} Z_0 = 0.9(x_1 \cup x_2)^* \cup -0.1(-x_1 \cup x_2)^* = \boxed{Z_1}, \quad \Phi_{Z_1}(e) = 0.8,$$
$$x_2^{-1} Z_0 = 0.9(x_1 \cup x_2)^* \cup 0.1(-x_1 \cup x_2)^* = Z_0.$$

Производные второго порядка:

$$x_1^{-1} Z_1 = 0.9(x_1 \cup x_2)^* \cup 0.1(-x_1 \cup x_2)^* = Z_0,$$
$$x_2^{-1} Z_1 = 0.9(x_1 \cup x_2)^* \cup (-0.1(-x_1 \cup x_2)^*) = Z_1.$$

Таким образом, по данному выражению можно построить $\mathbb{R}$-автомат $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle X, \widetilde{A}, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}\rangle$, где

$$\mathbf{r} = (1, 0), \quad \mathbf{R}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = (1, 0.8)^T.$$

Очевидно, что построенный $\mathbb{R}$-автомат удовлетворяет теореме 3 о сводимости, а значит по нему можно построить стохастический автомат, представляющий этот $\mathbb{R}$-язык Z и имеющий вид

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X,\ A,\ \mathbf{p},\ \{\mathbf{P}(s)\},\ \mathbf{e}^{(\text{к})}\rangle, \quad X = \{x_1, x_2\}, \quad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

$$\mathbf{e}^{(\text{к})} = (1, 1, 0, 0), \quad \mathbf{p} = (1, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

При этом $\mathbb{R}$-язык (19) конечно же удовлетворяет достаточным условиям представимости, однако определить выполнение этих условий довольно проблематично, потому что имеется очень ограниченный класс эквивалентных преобразований над регулярными выражениями языков, некоторые из которых описаны в разделах 4, 5 и работах [1, 6]. Если же не приводить $\mathbb{R}$-языки к каноническому виду с неотрицательными скалярами, то, несмотря на то, что в данном примере алгоритм завершился с корректным результатом, не исключен случай когда в финальном векторе хотя и будут элементы не превосходящие единицу, но возможны отрицательные элементы, а тогда нельзя применить теорему о сводимости. Однако, как

нетрудно заметить, если провести процедуру анализа $\mathbb{R}$-автомата, построенного по описанному алгоритму, то будет получено регулярное выражение, которое, удовлетворяя условиям теоремы 3, будет намного сложнее по своей структуре, нежели выражение (20), и в результате выполнения по нему алгоритма синтеза получится $\mathbb{R}$-автомат с большим количеством состояний. Таким образом процедура приведения регулярного выражения к виду, требуемому достаточными условиями, может привести к существенному росту количества состояний.

Также неочевиден вопрос о проверке степеней принадлежности слов данному $\mathbb{R}$-языку, тем более что можно построить пример вероятностного языка, в котором вероятность принадлежности любого слова не превосходит единицы, но растет по мере роста длины слова.

Таким образом можно сформулировать две проблемы:

1. Найти алгоритм, который за конечное количество шагов определит выполнение второго пункта теоремы 9 о необходимых и достаточных условиях.
2. Возможно ли так модифицировать алгоритм, описанный в разделе 6, чтобы в теореме 9 можно было упростить условие 1.

Их решение дополнит общую картину и адаптирует алгоритм к виду, более удобному для его применения на практике для регулярных выражений $\mathbb{R}$-языков, в которых возможны вхождения отрицательных скаляров.

10. Заключение

Отметим, что возможное дальнейшее направление работы может быть связано с дополнительным исследованием свойств регулярных выражений $\mathbb{R}$-языков, а также расширением класса их эквивалентных преобразований. В том числе, интересно попробовать не ограничиваться случаем $\mathbb{R}$-языков, а рассматривать более общие регулярные R-языки, где R любое частично упорядоченное полукольцо [5]. Можно заметить, что многие проблемы синтеза стохастического автомата по регулярному выражению $\mathbb{R}$-языка, связаны с выбором поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ в качестве полукольца R. В этом случае операция дизъюнкции не обладает свойством идемпотентности, так как таковым свойством не обладает операция сложения. Поэтому, вероятно, при исследовании регулярных R-языков

целесообразно будет разбить их на несколько классов в зависимости от свойств, которыми обладает рассматриваемое полукольцо R. Например, поскольку свойство идемпотентности является одним из ключевых свойств, рассматриваемые полукольца могут быть разбиты на два класса: полукольца, в которых операция сложения идемпотентна, и в которых неидемпотентна. Причем, для класса полуколец, обладающих свойством идемпотентности относительно сложения, можно будет найти пересечение теории автоматных моделей и регулярных выражений R-языков с теорией идемпотентных алгебр, которая, в настоящее время, активно развивается.

Список литературы

[1] *Чирков М.К., Пономарева А.Ю.* Стационарные детерминированные и вероятностные автоматы (Теория автоматных моделей) — СПб.: Изд. СПбГУ. 2008. 248 с.

[2] *Трубников В.Н., Чирков М.К.* Об эквивалентном преобразовании $\mathbb{R}$-нечетких автоматов в стохастические // Стохастическая оптимизация в информатике. Том 6 (Вып 1). — СПб.: Изд. СПбГУ. 2010. С. 184–202.

[3] *Чирков М.К., Наср Я.* О стохастических и нестохастических минимальных формах стохастических автоматов // Теория и приложения дискретных систем. — СПб.: Изд. СПбГУ. 1995. С. 37–67.

[4] *Masakazu N., Namio H.* Fuzzy events realized by probabilistic automata // Inform. and Control. Vol. 12. No. 15. 1968. P. 284–303.

[5] *Шестаков А.А., Чирков М.К.* Обобщенные конечные автоматы: Поведенческая эквивалентность и проблемы оптимизации. — Апатиты: Изд. КНЦ РАН. 1992. 160 с.

[6] *Чирков М.К., Кабаве М.* Абстрактный анализ обобщенных конечных автоматов // Теория и приложения дискретных систем. — СПб.: Изд. СПбГУ. 1995. С. 3–36.

[7] *Чирков М.К., Кабаве М.* Абстрактный синтез обобщенных конечных автоматов // Математическое моделирование дискретных систем. — СПб.: Изд. СПбГУ. 1995. С. 3–37.