

Имитационная нормализация в задаче идентификации параметров стохастической линейной системы¹

Ю. В. Цыганова, к. ф.-м. н.

Ульяновский государственный университет

А. В. Цыганов, к. ф.-м. н.

Ульяновский государственный педагогический

университет имени И. Н. Ульянова

TsyganovaJV@mail.ru, andrew.tsyganov@gmail.com

В работе рассматривается решение задачи идентификации параметров стохастической линейной системы с помощью вспомогательного функционала качества (ВФК). Для нахождения минимума ВФК используется метаэвристический алгоритм имитационной нормализации (имитации отжига), не требующий вычисления градиента ВФК. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: стохастические линейные системы, адаптивная фильтрация, параметрическая идентификация, фильтр Калмана, вспомогательный функционал качества, метод имитации отжига.

1. Введение

Проблема параметрической идентификации является одной из главных в теории и практике автоматического управления. Наличие качественной математической модели позволяет эффективно решать задачи расчета и проектирования сложных систем управления, в частности, навигационных систем и комплексов управления подвижными объектами в авиации, космонавтике и на флоте. Такие задачи особенно сложны в условиях постоянного повышения требований к возможностям оборудования, прежде всего, — к характеристикам точности, а также в реальных условиях априорной неопределенности и непредвиденной изменчивости характеристик модели.

За последние десятилетия разработано огромное количество различных методов и алгоритмов параметрической идентификации стохастических систем [1, 2]. В основном, такие методы заключаются

¹© Ю. В. Цыганова, А. В. Цыганов, 2010

в оценивании неизвестных параметров математической модели по данным наблюдений Z в соответствии с выбранным критерием качества идентификации J . В частности, для стохастических линейных моделей систем наиболее часто используются критерий максимума правдоподобия или критерий наименьших квадратов [2]. Основным недостатком таких методов является то, что в качестве критерия качества идентификации фактически используется критерий невязки измерений, который в случае систем наблюдения с зашумленными неполными измерениями вектора состояния не позволяет получить несмещенные оценки неизвестных параметров модели [3, 4].

Для преодоления указанного выше недостатка был разработан метод вспомогательного функционала качества (ВФК), который может быть построен с использованием только наблюдаемых величин, при этом он подменяет нереализуемый (в случае неполных зашумленных измерений) исходный функционал качества (ИФК) при решении задачи параметрической идентификации и достигает минимума одновременно с ИФК на множестве значений неизвестных параметров. Идея метода ВФК впервые была сформулирована И. В. Семушиным в работе [5] (аналогичные независимые результаты были получены Р. Хэмптоном в работе [6]) и далее использовалась для решения частных задач. Например, в работах [7, 8] метод ВФК применялся для идентификации оптимального фильтра Калмана.

В данной работе рассматривается применение метода ВФК для идентификации параметров стохастической линейной системы, причем для минимизации ВФК рассматривается возможность применения метода имитационной нормализации. Этот метод относится к группе методов “нечисленной” минимизации. В отличие от большинства численных методов, обычно применяющихся для минимизации критерия качества идентификации J , таких, как метод стохастической аппроксимации, метод стохастических градиентов, методы Ньютона-Рафсона и Гаусса-Ньютона [2, 9], метод имитационной нормализации (имитации отжига) не требует обязательного трудоемкого вычисления градиента функционала качества² по

²Прим. ред. Вместо упоминания всех “методов стохастической аппроксимации” здесь правильнее было бы сказать только про “процедуру Роббинса-Монро”, т. к. во многих современных вариантах алгоритмов стохастической аппроксимации нет трудоемкого вычисления градиента функционала качества

уравнениям чувствительности фильтра Калмана [10]. Следовательно, рассматриваемый метод позволяет решать задачу параметрической идентификации с меньшими вычислительными затратами и приемлемым качеством получаемых оценок неизвестных параметров системы.

Далее рассмотрим описание математической модели в виде стохастической линейной дискретной системы

$$x_{t+1} = \Phi x_t + \Gamma w_t, \quad (1)$$

$$z_t = H x_t + v_t, \quad (2)$$

где x_t — n -мерный вектор состояния системы, z_t — m -мерный вектор измерения, $\{w_0, w_1, \dots\}$ и $\{v_1, v_2, \dots\}$ — q -мерная и m -мерная независимые последовательности независимых и одинаково распределенных случайных векторов с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами Q и R соответственно. Эти последовательности также не зависят от случайного начального состояния системы x_0 с математическим ожиданием \bar{x}_0 и ковариационной матрицей P_0 . Предположим, что определяющие систему (1)–(2) матрицы Φ , Γ , Q , H , R могут зависеть от неизвестного многомерного параметра $\Theta \in \mathbb{R}^p$, т. е. $\Phi = \Phi(\Theta)$, $\Gamma = \Gamma(\Theta)$, $Q = Q(\Theta)$, $H = H(\Theta)$, $R = R(\Theta)$. Таким образом, возникает задача идентификации неизвестного вектора параметров $\Theta \in \mathbb{R}^p$ с целью повышения качества функционирования системы.

2. Метод вспомогательного функционала качества

Предположим, что для любого допустимого Θ выполнены следующие условия:

A1 Матрица R — положительно-определенная ($R > 0$), а матрицы P_0 и $\Gamma Q \Gamma^T$ — неотрицательно определенные ($P_0, \Gamma Q \Gamma^T \geq 0$).

A2 Пара матриц (Φ, S_w) , где S_w является квадратным корнем матрицы $\Gamma Q \Gamma^T$ (т. е. $S_w S_w^T = \Gamma Q \Gamma^T$), стабилизируемая [2], а пара

(см. Граничин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. — М.: Наука. 2003. 293 с.).

матриц (Φ, H) — полностью наблюдаемая. Последнее означает, что если для любой прямоугольной матрицы P и квадратной матрицы F соответствующих размеров

$$V(P, F, k) = [P^T | (PF)^T | \dots | (PF^{k-1})^T]^T \quad (k \geq 1),$$

то

$$\text{rank } V(H, \Phi, s) = n, \quad (3)$$

где $s = \max(p_1, p_2, \dots, p_m) \leq n$, $p_j = \text{rank } V(h_j, \Phi, n)$ — частные индексы наблюдаемости ($j = 1, 2, \dots, m$), h_j — j -ая строка матрицы H .

A3 Все частные индексы наблюдаемости p_j постоянны и известны независимо от обстоятельств.

Даже если параметр Θ известен, точное значение вектора состояния x_t получить нельзя по причине наличия в системе (1)–(2) шумов, однако при сделанных выше предположениях существует оптимальный фильтр Калмана (ОФК), который позволяет вычислить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку \hat{x}_t вектора состояния x_t . Этот фильтр определяется известными рекуррентными уравнениями [10]:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t+1} &= \Phi \hat{P}_t \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \\ \tilde{x}_{t+1} &= \Phi \hat{x}_t, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K_t &= \tilde{P}_t H^T [H \tilde{P}_t H^T + R]^{-1}, \\ \hat{P}_t &= \tilde{P}_t - K_t H \tilde{P}_t, \\ \hat{x}_t &= \tilde{x}_t + K_t (z_t - H \tilde{x}_t), \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями $\hat{P}_0 = P_0$ и $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$.

В случае, если параметр Θ неизвестен, то применять ОФК нельзя, так как полученная оценка вектора состояния не будет оптимальной в среднеквадратическом смысле, то есть не будет доставлять минимум исходному функционалу качества (ИФК)

$$J_{\text{ИФК}} = E\{|e_t|^2\}, \quad (6)$$

область определения которого включает в себя все одношаговые оценки предсказания \tilde{y}_t и фильтрации \hat{y}_t вектора состояния x_t , полученные по доступным измерениям $Z_1^t = [z_1 | z_2 | \dots | z_t]^T$, $e_t = x_t - y_t$

— ошибки предсказания (если $y_t = \tilde{y}_t$) или фильтрации (если $y_t = \hat{y}_t$). Минимум (6) достигается тогда и только тогда, когда $\tilde{y}_t = \tilde{x}_t$ и $\hat{y}_t = \hat{x}_t$, т. е. когда оценки вектора состояния совпадают с оценками, полученными с помощью ОФК по уравнениям (4)–(5). Однако, функционал (6) не подходит для минимизации известными методами ввиду недоступности величин e_t . Поэтому подход к решению задачи заключается в формировании вспомогательного функционала качества

$$J_{\text{ВФК}} = E\{|\varepsilon_t|^2\}, \quad (7)$$

который зависит только от наблюдаемых величин и достигает минимума одновременно с ИФК на множестве значений параметра Θ . Здесь ε_t — некоторый вспомогательный процесс, доступный наблюдению.

Для построения ВФК перейдем от представления системы в виде (1)–(2) к стандартной наблюдаемой модели, т. е. выполним соответствующее преобразование базиса в пространстве состояний с $n \times n$ -матрицей преобразования

$$W = [h_1^T \dots (h_1 \Phi^{p_1-1})^T | \dots | h_m^T \dots (h_m \Phi^{n - \sum_{k=1}^{m-1} p_k - 1})^T]^T. \quad (8)$$

Получим новое представление вектора состояния $x_* = Wx$ в инвариантном описании измерений, получаемом из (1) и (2) (что соответствует стандартной наблюдаемой модели)

$$x_{t+1}^* = \Phi_* x_t^* + \Gamma_* w_t, \quad z_t = H_* x_t^* + v_t, \quad (9)$$

$$\Phi_* = W\Phi W^{-1}, \quad \Gamma_* = W\Gamma, \quad H_* = HW^{-1}, \quad (10)$$

где $H_* = [h_{ij}^*]$ — матрица размера $m \times n$, в которой $h_{ij}^* = 1$ при $j = p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + 1$ и $h_{ij}^* = 0$ при других j . Φ_* — блочная сопровождающая матрица, содержащая не более, чем mn ненулевых элементов, лежащих в строках с номерами $p_1, p_1 + p_2, \dots, p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1}, n$.

Аналогичное преобразование базиса проведем в уравнениях (4)–(5). В результате получим стандартную наблюдаемую форму фильтра Калмана:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{t+1} &= \Phi_* \hat{P}_t \Phi_*^T + \Gamma_* Q \Gamma_*^T, \\ \tilde{x}_{t+1}^* &= \Phi_* \hat{x}_t^*,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}K_t^* &= \tilde{P}_t H_*^T [H_* \tilde{P}_t H_*^T + R]^{-1}, \\ \hat{P}_t &= \tilde{P}_t - K_t^* H_* \tilde{P}_t, \\ \hat{x}_t^* &= \tilde{x}_t^* + K_t^* (z_t - H_* \tilde{x}_t^*).\end{aligned}\quad (12)$$

Далее, используя результаты работ [7, 11, 12], построим вспомогательный функционал в виде (7), а вспомогательный процесс определим следующим образом:

$$\varepsilon_t = \varphi(Z_{t+1-s}^t) - \tilde{x}_{t+1-s}, \quad (13)$$

где преобразование $\varphi(Z_{t+1-s}^t)$ определено в [11], \tilde{x}_{t+1-s} — оценка предсказания, полученная от адаптивного фильтра.

Т е о р е м а 1. [7] Пусть задан исходный функционал качества в виде (6). Тогда существует вспомогательный функционал качества в виде (7), который зависит только от наблюдаемого процесса (13), и при этом выполняется условие

$$J_{ВФК} = J_{ИФК} + \text{const},$$

в котором const не зависит от параметров фильтра и, следовательно, ВФК достигает минимума одновременно с ИФК на множестве значений параметра Θ .

Таким образом, теорема 1 дает возможность применять вместо недоступного наблюдению ИФК реализуемый ВФК. Для его минимизации воспользуемся методом имитационной нормализации.

Метод имитационной нормализации.

Метод *имитационной нормализации*³ (имитации отжига, модельной закалки) является разновидностью широко известного метаэвристического алгоритма локального поиска⁴. Свое название алгоритм получил за схожесть с технологическим процессом получения твердого тела с низкоэнергетическим состоянием путем нагрева с последующим постепенным охлаждением, называемым отжигом.

³англ. Simulated Annealing (SA)

⁴прим. ред. Достаточно часто этот метод используется и для поиска глобального минимума.

Важным понятием большинства метаэвристических алгоритмов является *стоимость* решения, характеризующая его качество. В алгоритмах локального поиска процесс получения решения может быть описан, как последовательный переход от текущего допустимого решения, к некоторому решению из его окрестности, обладающему лучшей (например, меньшей) стоимостью. Очевидным недостатком подобных алгоритмов является возможность застревания в локальных оптимумах. В отличие от алгоритмов локального поиска, в методе имитационной нормализации разрешаются временные “ухудшения” решений, что позволяет обойти указанную проблему.

Одной из основных особенностей алгоритма является использование управляющего параметра — *температуры*, который отвечает за вероятность перехода к “плохим” решениям. С течением времени температура убывает согласно некоторому закону, называемому *схемой охлаждения*,⁵ пока не достигнет нулевого или близкого к нулю значения. Чем выше температура, тем выше вероятность замены текущего решения на решение с худшей стоимостью. Таким образом, вероятность выхода из локальных оптимумов в начале работы алгоритма выше, чем в конце.

Псевдокод общей схемы алгоритма имитационной нормализации приведен на рис. 1.

В начале работы алгоритма генерируется начальное решение (строка 1). Затем это решение и его стоимость запоминаются (строки 2 и 3), выбирается начальная температура (строка 4), а счетчик числа итераций устанавливается равным нулю (строка 5).

Заметим, что выбор начальной температуры представляет собой отдельную ответственную задачу. От правильного выбора начальной температуры зависит то, насколько долгим и успешным будет процесс поиска решения. Слишком высокие значения начальной температуры могут неоправданно затянуть вычисления, если охлаждение происходит медленно, а ограничения на время вычислений отсутствуют, либо привести к получению решения низкого качества, если эти ограничения являются слишком жесткими. Слишком низкие значения начальной температуры скорее всего не позволят найти хорошего решения.

Уточнение решения происходит в цикле (строки 6–16) до выполнения условия остановки процесса вычислений `StopCondition()`. Критерии остановки алгоритма (помимо стандартных ограничений

⁵англ. cooling schedule, annealing schedule

```

1:  $Solution \leftarrow InitialSolution()$ 
2:  $BestSolution \leftarrow Solution$ 
3:  $BestCost \leftarrow Cost(Solution)$ 
4:  $T \leftarrow InitialTemperature()$ 
5:  $k \leftarrow 0$ 
6: while not StopCondition() do
7:    $NewSolution \leftarrow Neighbor(Solution)$ 
8:    $NewCost \leftarrow Cost(NewSolution)$ 
9:   if  $NewCost < BestCost$  then
10:     $BestSolution \leftarrow NewSolution$ 
11:     $BestCost \leftarrow NewCost$ 
12:   end if
13:    $Solution \leftarrow AcceptWithProbability(Solution, NewSolution, T)$ 
14:    $k \leftarrow k + 1$ 
15:    $T \leftarrow UpdateTemperature(T, k)$ 
16: end while
Выход:  $BestSolution$ 

```

Рис. 1: Общая схема алгоритма имитационной нормализации.

на число итераций и время вычислений) могут быть разными. Например, вычисления можно продолжать пока температура T не станет равной или достаточно близкой к нулю, либо пока стоимость текущего решения не достигнет некоторого порогового значения.

На каждой итерации алгоритма выбирается случайное решение $NewSolution$ из окрестности текущего решения (строка 7) и вычисляется его стоимость (строка 8). Если это решение является лучшим на текущий момент, то оно сохраняется (строки 9–12). Заметим, что в “классических” вариантах алгоритма лучшее решение и его стоимость не запоминаются (то есть строки 9–12 в них отсутствуют), а в качестве возвращаемого значения используется переменная $Solution$, а не $BestSolution$.

Один из основных элементов алгоритма — это обновление текущего решения (строка 13). Текущее решение $Solution$ заменяется на новое решение $NewSolution$ с некоторой вероятностью P , которая вычисляется по формуле:

$$P = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \leq 0; \\ e^{-\frac{\Delta}{T}}, & \text{если } \Delta > 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $\Delta = \text{Cost}(NewSolution) - \text{Cost}(Solution)$. Таким образом, согласно формуле (14) “неухудшающие” ходы делаются данным алгоритмом всегда, в то время как “ухудшающие” ходы делаются с некоторой вероятностью, которая тем выше, чем меньше отличаются стоимости нового и текущего решений. С уменьшением T вероятность ухудшения решения стремится к нулю (метод начинает вести себя аналогично алгоритму локального поиска).

В строке 14 увеличивается счетчик числа итераций, а в строке 15 происходит изменение температуры. Как уже отмечалось, изменение температуры происходит в соответствии со схемой охлаждения. Эти схемы могут быть самыми разными. Самым простым способом понижения температуры является умножение T через определенное число итераций на коэффициент $\alpha \in (0; 1)$.

Более подробное обсуждение данного алгоритма можно найти, например, в [13]. В настоящее время доступно большое число реализаций данного алгоритма для различных языков программирования и вычислительных платформ (например, [14, 15]).

3. Практический пример

Рассмотрим стохастическую линейную дискретную систему, уравнение состояния которой задано в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_t. \quad (15)$$

Вектор состояния x измеряется в каждый момент времени $t = 1, 2, \dots, N$ с ошибкой v :

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + v_t. \quad (16)$$

Пусть в данной модели $P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = 1$, $R = 0.1$, $\bar{x}_0 = 0$.

Для идентификации вектора $\Theta = (\theta_1; \theta_2)^T$ — неизвестных параметров рассматриваемой модели, использовался метод ВФК, минимизация которого выполнялась методом имитационной нормализации. Вычислительные эксперименты проводились в MatLab 7.0.1.

В качестве функции стоимости была выбрана следующая оценка ВФК:

$$\hat{J}_{\text{ВФК}} = \frac{1}{2N} \sum_{k=t-N+1}^t \varepsilon_k^T \varepsilon_k.$$

Всего было проведено 100 экспериментов, методика которых состояла в следующем: сначала выполнялось компьютерное моделирование поведения системы при истинных значениях параметров $\Theta_* = (0,3; 0,68)^T$ для получения последовательности измерений $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ ($N = 200$), затем строился ВФК и проводилась его минимизация по Θ с помощью метода имитационной нормализации. Результаты минимизации (история поиска решения) для каждого эксперимента сохранялись. По окончании экспериментов полученные результаты усреднялись и по ним строились графики сходимости полученных оценок и невязки.

Программная реализация метода имитационной нормализации в системе MatLab была выполнена на основе [15]. В нее были добавлены возможность сохранения истории поиска и ограничение на общее число итераций алгоритма. Основные параметры метода, установленные для экспериментов: общее число итераций — 5000, начальная температура — 2, схема охлаждения — $0,85 T$, вектор начальных значений — $\Theta_0 = (0; 0)^T$.

На рис. 2 представлен усредненный график сходимости оценок неизвестных параметров θ_1 и θ_2 модели.

На рис. 3 представлен график сходимости невязки оценки вектора параметров, которая вычислялась для каждой итерации i алгоритма по формуле $r = \sqrt{(\Theta_i - \Theta_*)^T (\Theta_i - \Theta_*)}$.

Результаты эксперимента позволяют сделать вывод о том, что для решения задачи идентификации параметров стохастических линейных систем может применяться метод имитационной нормализации, который не требует больших вычислительных затрат и одновременно позволяет получить приемлемые результаты.

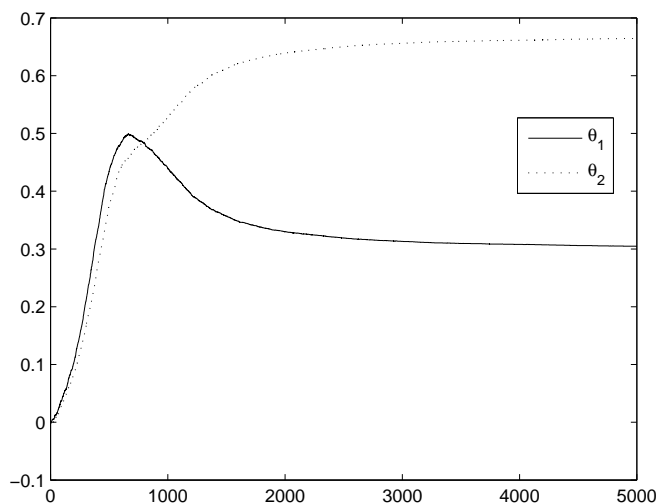


Рис. 2: Усредненный график сходимости оценок параметров.

4. Заключение

В работе с помощью методов вспомогательного функционала качества и имитационной нормализации получено решение задачи параметрической идентификации для стохастических линейных систем, описываемых моделями в пространстве состояний. Применение метода ВФК актуально для систем с неполными зашумленными измерениями вектора состояния, когда исходный функционал качества является недоступным наблюдению. Применение метода имитационной нормализации позволяет построить алгоритм идентификации, требующий меньше вычислительных затрат по сравнению с численными методами минимизации, и вместе с этим позволяет получить приемлемое качество оценок неизвестных параметров.

Список литературы

- [1] *Саридис Дж.* Самоорганизующиеся стохастические системы

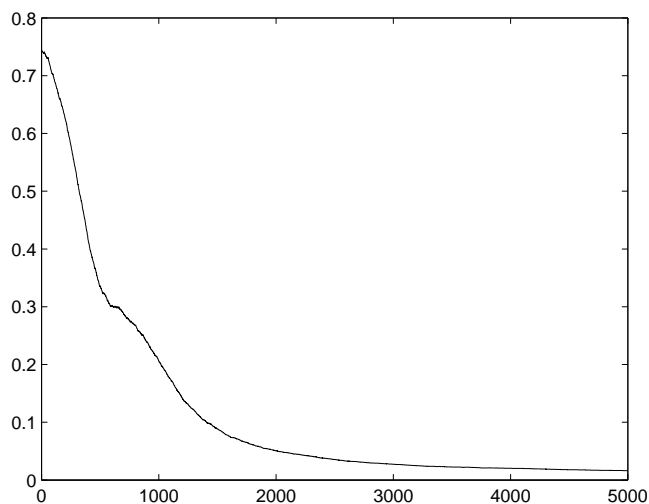


Рис. 3: График сходимости невязки оценки.

управления. — М.: Наука. 1980.

- [2] *Mosca E.* Optimal, predictive and adaptive control. — Prentice-Hall, Inc. 1995.
- [3] *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. — М.: Мир. 1975.
- [4] *Ljung L.* Convergence analysis of parametric identification methods // IEEE Trans. on Automatic Control. 1978. Vol. **AC-23**. No. 5. P. 770–773.
- [5] *Семущин И.В.* Использование активного принципа фильтрации нестационарных случайных процессов // Сб. тез. докл. III НТК. Новгород: Новгородский филиал ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина). — Новгород: филиал ЛЭТИ. 1968. С. 64.
- [6] *Hampton R.L.T.* On unknown state-dependent noise, modeling errors, and adaptive filtering // Comput. & Elect. Engng. 1975. ol. **2**. P. 195–201.

- [7] *Semoushin I.V., Tsyganova J.V.* Auxiliary Performance Functional Approach to Adaptive and Learning Filtering and Control // Proc. of European Control Conference ECC'99. Karlsruhe. Germany. 31 August–3 September 1999.
- [8] *Semoushin I.V., Tsyganova J.V.* Indirect Error Control for Adaptive Filtering // Proc. of the Third European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications. ENUMATH'99. Jyväskylä. Finland. July 26–30 1999. World Scientific. Singapore. 2000. P. 333–340.
- [9] *Gupta N. K., Mehra R. K.* Computational Aspects of Maximum Likelihood Estimation and Reduction in Sensitivity Function Calculations // IEEE Trans. on Automatic Control. 1974. Vol. **AC-19**. No. 6. P. 774–783.
- [10] *Grewal M.S.* Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, Second Edition / M. S. Grewal, A. P. Andrews. — John Wiley&Sons, Inc. 2001.
- [11] *Семущин И. В.* Адаптивное управление стохастическим линейным объектом в условиях неопределенности // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление: Сборник трудов. — М.: ИСА РАН. 1994. Вып. 2. С. 104–110.
- [12] *Семущин И.В.* Идентификация линейных стохастических объектов по неполным зашумленным измерениям вектора состояния // Автоматика и телемеханика. 1985. № 8. С. 61–71.
- [13] *Hromkovič J.* Algorithmics for hard problems. Introduction to combinatorial optimization, randomization, approximation, and heuristics. 2nd edition. — Springer. 2004.
- [14] *Цыганов А.В., Булычев О.И.* HeO: библиотека метаэвристик для задач дискретной оптимизации // Программные продукты и системы. 2009. № 4. С. 148–151.
- [15] *Vandekerckhove J.* General simulated annealing algorithm [Online]. Available: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10548>.