Об эквивалентном преобразовании $\mathbb{R}$-нечетких автоматов в стохастические[1]

В. Н. Трубников,
М. К. Чирков, д. ф.-м. н.[2]
Санкт-Петербургский государственный университет
vakh08@mail.ru

Работа посвящена исследованию возможности эквивалентного преобразования заданного над полем вещественных чисел нечеткого конечного автомата в стохастический конечный автомат, который представляет тот же обобщенный язык. Доказаны достаточные условия такого преобразования и разработан соответствующий алгоритм. Приведен пример.

Ключевые слова: стохастические конечные автоматы, нечеткие конечные автоматы, обобщенные вероятностные языки, нечеткие языки, эквивалентные преобразования автоматов.

1. Введение

В течении уже нескольких десятилетий большое внимание уделяется исследованию проблем математической теории автоматных моделей различного типа. За это время понятие о таких моделях и проблематика их теории существенно расширились за счет внедрения в такие разделы математики, как теория алгоритмов, математическая логика, математическое моделирование и информатика, а также в связи с приложением автоматных моделей в разнообразных областях естествознания и техники. Важное место среди автоматных моделей занимают стохастические автоматы, при этом одной из наиболее интересных и важных, как в теоретическом, так и в прикладном плане, является проблема исследования представимости ими вероятностных языков. В принципе, этой проблеме посвящен целый цикл работ (см., например, список литературы к монографии [1]), в которых с различных позиций, в основном для случая вероятностных языков, представленных в стохастическом автомате с определенной точкой сечения, исследуются свойства таких языков. Однако, среди перечисленных работ можно выделить те работы (например [1-4]), в которых развивается специальное направление, связанное с понятиями "нечетких" языков и "нечетких" автоматов и при этом рассматривается специальный случай обоб-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00310-а.

щенных вероятностных языков, представляющих собой отображение множества слов в заданном алфавите в интервал [0, 1], и исследуются некоторые их свойства [1, 2].

Заметим, также, что в последние десятилетия существенное развитие получила теория обобщенных "нечетких" автоматных моделей, задаваемых над различными алгебраическими системами (см., например, [5]). При этом обобщенные "нечеткие" автоматы, задаваемые над полем вещественных числе $\mathbb{R}$, в определенных условиях могут оказаться эквивалентными стохастическим автоматам [3]. Поэтому важное значение имеет исследование тех условий, которым должен удовлетворять такой обобщенный $\mathbb{R}$-нечеткий автомат, чтобы представлять обобщенный вероятностный язык и, соответственно, преобразовываться в эквивалентный по представляемому языку стохастический конечный автомат. Именно этой проблеме и посвящена данная работа.

2. Стохастические автоматы

Пусть заданы *входной алфавит* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, *алфавит состояний* $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ и *выходной алфавит* $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}\}$. *Стохастический автомат общего вида* определяется как система

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X,\ A,\ Y,\ \mathbf{p},\ \{\mathbf{P}(s,l)\}\rangle \tag{1}$$

множеств $X,\ A,\ Y$, начального распределения вероятностей состояний

$$\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}), \quad \sum_i p_i = 1, \tag{2}$$

и nk квадратных матриц $\mathbf{P}(s,l)$, $x_s \in X$, $y_l \in Y$, с элементами

$$P_{ij}(s,l) = P(a_j y_l|\, a_i x_s), \tag{3}$$

заданными для каждой пары $(a_i, x_s),\ a_i \in A,\ x_s \in X$, на множестве $A \times Y$, которые характеризуют вероятность перехода автомата в состояние a_j с выдачей символа y_l при условии, что он находился в состоянии a_i и на него воздействует символ x_s.

Согласно (3) элементы матриц $\mathbf{P}(s,l)$, называемых *матрицами переходов и выходов,* для вполне определенных автоматов $\mathcal{A}_{pr}$ должны удовлетворять условиям $P_{ij}(s,l) \in [0,1]$, $\sum_{j,l} P_{ij}(s,l) = 1$.

В частном случае, когда алфавит Y отсутствует и в качества выходного алфавита выступает алфавит состояний A, автомат $\mathcal{A}_{pr}$ называют *абстрактным стохастическим автоматом.*

Для абстрактного стохастического автомата

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}\rangle \tag{4}$$

задаются только начальное распределение вероятностей состояний (2) и *матрицы вероятностей переходов* $\mathbf{P}(s)$, $x_s \in X$, с элементами $P_{ij}(s) = P(a_j|a_i x_s)$.

3. Обобщенные вероятностные языки, представимые стохастическими автоматами

Пусть X есть входной алфавит и X^* есть множество всех слов в этом алфавите. Язык Z в X, т. е. некоторое подмножество слов $Z \subseteq X^*$ в алфавите X, может быть определен своей характеристической функцией $\mu_Z : X^* \to \{0,1\}$, где $\mu_Z(\omega) = 1$ при $\omega \in Z$, и $\mu_Z(\omega) = 0$ при $\omega \notin Z$, для всех $\omega \in X^*$.

"Нечетким" языком Z *в алфавите* X называют "нечеткое" подмножество слов в X^*, задаваемое характеристической функцией (*функцией принадлежности*) $\mu_Z : X^* \to [0,1]$, где величина $\mu_Z(\omega) \in$ $\in [0,1]$ для слова $\omega \in X^*$ представляет собой *степень принадлежности* слова ω "нечеткому" языку Z.

Условимся в дальнейшем "нечеткий" язык Z, как это принято в теории "нечетких" множеств, рассматривать как множество пар $Z = \{\omega, \mu_Z(\omega)\}$, где $\omega \in X^*$, $\mu_Z(\omega) \in [0,1]$.

Теперь приведем общее определение представимости языка в стохастическом автомате [1]. Пусть $\mathcal{A}_{pr}$ есть стохастический автомат (1), выделено подмножество $Y^{(\text{к})} \subseteq Y$ его выходных символов и $P(y_l|\,\omega)$ есть вероятность выдачи автоматом буквы y_l в такте t при поступлении на вход автомата слова $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$. Тогда *обобщенным вероятностным языком* (далее просто *вероятностным языком*) Z, *представленным в автомате* $\mathcal{A}_{\mathrm{pr}}$ *подмножеством конечных выходных символов* $Y^{(\text{к})}$ называют "нечеткое" множество слов $Z = \{\omega, \mu(\omega)\}_{\omega \in X^*}$ в алфавите X, удовлетворяющее условию

$$\mu : X^* \to [0,1], \quad \mu(\omega) = \sum_{y_l \in Y^{(\text{к})}} P(y_l|\,\omega).$$

В случае, если автомат $\mathcal{A}_{pr}$ есть абстрактный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr}$ (4) с выделенным подмножеством конечных состояний $A^{(\text{к})} \subseteq A$ и $P(a_i|\,\omega)$ есть вероятность того, что автомат $\mathcal{A}_{pr}$ при поступлении входного слова $\omega = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t}$ окажется в такте t в состоянии a_i, то *вероятностным языком* Z, *представленным в абстрактном стохастическом автомате* $\mathcal{A}_{pr}$ *подмножеством конечных состояний* $A^{(\text{к})}$, называют “нечеткое” множество слов $Z = \{\omega, \mu(\omega)\}_{\omega\in X^*}$ в алфавите X такое, что

$$\mu : X^* \to [0,1], \quad \mu(\omega) = \sum_{a_i\in A^{(\text{к})}} P(a_i|\,\omega). \tag{5}$$

Для абстрактного стохастического автомата с m состояниями подмножество конечных состояний $A^{(\text{к})}$ удобно задавать m-мерным вектор-столбцом $\mathbf{e}^{(\text{к})} = (e_1^{(\text{к})}, e_2^{(\text{к})}, \ldots, e_m^{(\text{к})})^{\text{T}}$ таким, что

$$e_i^{(\text{к})} = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i \notin A^{(\text{к})}, \\ 1, & \text{если } a_i \in A^{(\text{к})}. \end{cases}$$

В таком случае выражение (5) примет вид

$$\mu(\omega) = \mathbf{p}\mathbf{P}(\omega)\mathbf{e}^{(\text{к})},$$

где

$$\mathbf{P}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{P}(e) = \mathbf{I}(m) & \text{при } t = 0, \\ \mathbf{P}(\omega) = \prod_{\nu=1}^{t}\mathbf{P}(s_\nu) & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$\omega = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t}$, и $\mathbf{I}(m)$ – единичная $(m\times m)$-матрица.

В теории стохастических автоматов известно следующее утверждение о сводимости [1].

Теорема 1. *Для любого стохастического автомата общего вида* $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, Y, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s,l)\}, Y^{(\text{к})}\rangle$, *имеющего* m *состояний и* k *выходных символов, в котором подмножеством выходных символов* $Y^{(\text{к})} \subseteq Y$ *представлен вероятностный язык* Z, *можно построить абстрактный стохастический автомат* $\mathcal{B}_{pr} = \langle X, B, \mathbf{p}', \{\mathbf{P}(s)\}, B^{(\text{к})}\rangle$, *имеющий* mk *состояний, в котором вероятностный язык* Z *представлен некоторым подмножеством* $B^{(\text{к})} \subseteq B$.

4. Обобщенные $\mathbb{R}$-нечеткие автоматы

Обобщенным $\mathbb{R}$*-нечетким автоматом* (далее, для краткости, $\mathbb{R}$*-автоматом*, где $\mathbb{R}$ есть обозначение поля вещественных чисел) будем называть систему $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s,l)\}, \mathbf{q}\rangle$, где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ – вектор-строка *весов начальных состояний* $\mathbb{R}$-автомата; $\{\mathbf{R}(s,l)\}$ – множество из nk квадратных матриц порядка m, соответствующих парам символов $(x_s, y_l) \in X \times Y$, которые назовем *матрицами переходов и выходов*, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ – вектор-столбец *весов конечных состояний* $\mathbb{R}$-автомата, т. е. $q_i, i = \overline{1,m}$, это такие числа, которые описывают с каким весом состояния принадлежат множеству конечных состояний.

$\mathbb{R}$*-автоматом с отмеченными состояниями* будем называть $\mathbb{R}$-автомат: $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}, \varphi\rangle$, где $\{\mathbf{R}(s)\}$ – множество из n квадратных матриц порядка m соответствующих символам $x_s \in X$, которые назовем *матрицами переходов*, а функция $\varphi : A \to Y$ сопоставляет каждому состоянию соответствующий выходной символ.

И, наконец, *абстрактным* $\mathbb{R}$*-автоматом* будем называть $\mathbb{R}$-автомат $\mathcal{A} = \langle X, A, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}, \rangle$.

5. Представимость $\mathbb{R}$-языков в $\mathbb{R}$-автоматах

Назовем $\mathbb{R}$*-нечетким языком* Z *в алфавите* X "нечеткое" подмножество слов в X^*, задаваемое функцией принадлежности (*весовой функцией*) $\mu_Z : X^* \to \mathbb{R}$, где величина $\mu_Z(\omega) \in \mathbb{R}$ для слова $\omega \in X^*$ представляет собой *вес* слова ω в $\mathbb{R}$-нечетком языке Z (кратко, $\mathbb{R}$*-языке*). Условимся в дальнейшем $\mathbb{R}$-нечеткий язык Z рассматривать как множество пар $Z = \{\omega, \mu_Z(\omega)\}$, где $\omega \in X^*$, $\mu_Z(\omega) \in \mathbb{R}$.

Введем общее определение представимости языка в $\mathbb{R}$-автомате. Пусть задан конечный $\mathbb{R}$-автомат $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s,l)\}, \mathbf{q}\rangle$, выделено "нечеткое" подмножество $Y^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} Y$ его выходных символов, где оператор $\underset{\mu}{\subseteq}$ используется для обозначения того, что в $Y^{(\text{к})}$ входят все символы из Y, но с некоторыми весами, т. е. $Y^{(\text{к})} = \{(y_l, \mu_{Y^{(\text{к})}}(y_l)) | \, y_l \in Y, \ \mu_{Y^{(\text{к})}}(y_l) \in \mathbb{R}\}$ и $P(y_{l_t} | \, \omega)$ есть вес такого события, что в такте t при поступлении на вход автомата слова $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$ автомат выдаст букву y_{l_t}. Тогда $\mathbb{R}$*-языком* Z*, представленным в* $\mathbb{R}$*-автомате* $\mathcal{A}$ *"нечетким" подмножеством конеч-*

ных выходных символов $Y^{(\text{к})}$ назовем "$\mathbb{R}$-нечеткое" множество слов

$$Z = \{\omega, \mu(\omega)\}_{\omega \in X^*} \tag{6}$$

в алфавите X, удовлетворяющих условию

$$\mu : X^* \to \mathbb{R}, \quad \mu(\omega) = \sum_{y_{l_t} \in Y^{(\text{к})}} R(y_{l_t} | \, \omega) \mu_{Y^{(\text{к})}}(y_{l_t})$$

для всех $\omega \in X^*$, где $\mu(\omega)$ есть вес слова ω в $\mathbb{R}$-языке Z, $\mu_{Y^{(\text{к})}}(y_{l_t})$ — вес символа y_{l_t} в "нечетком" множестве $Y^{(\text{к})}$, а $R(y_{l_t} | \, \omega)$ вычисляется по следующей формуле:

$$R(y_{l_t} | \, \omega) = \sum_{y_{l_1}, \ldots, \, y_{l_{t-1}} \in Y} \mathbf{r} \prod_{\nu=1}^{t-1} \mathbf{R}(s_\nu, l_\nu) \mathbf{R}(s_t, l_t) \mathbf{q}.$$

В случае, если автомат $\mathcal{A}$ есть абстрактный $\mathbb{R}$-автомат (4) с выделенным "нечетким" подмножеством конечных состояний $A^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} A$, т. е.

$$A^{(\text{к})} = \{(a_i, \mu_{A^{(\text{к})}}(a_i)) | \, a_i \in A, \; \mu_{A^{(\text{к})}}(a_i) \in \mathbb{R}\}$$

и $R(a_{i_t} | \, \omega)$ есть вес такого события, что автомат $\mathcal{A}$ при поступлении входного слова $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$ окажется в такте t в состоянии a_{i_t}, то $\mathbb{R}$-*языком* Z, *представленном в абстрактном* $\mathbb{R}$-*автомате* $\mathcal{A}$ *"нечетким" подмножеством конечных состояний* $A^{(\text{к})}$, будем называть "$\mathbb{R}$-нечеткое" множество слов $Z = \{\omega, \mu(\omega)\}_{\omega \in X^*}$ в алфавите X такое, что

$$\mu : X^* \to \mathbb{R}, \quad \mu(\omega) = \sum_{a_{i_t} \in A^{(\text{к})}} R(a_{i_t} | \, \omega) \mu_{A^{(\text{к})}}(a_{i_t}), \tag{7}$$

где $R(a_{i_t} | \, \omega)$ вычисляется по следующей формуле:

$$R(a_{i_t} | \, \omega) = \mathbf{r} \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{R}(s_\nu) \mathbf{q}_{i_t},$$

где $\mathbf{q}_{i_t} = (0, 0, \ldots, q_{i_t}, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$.

Для абстрактного $\mathbb{R}$-автомата с m состояниями “нечеткое” подмножество конечных состояний $A^{(\text{к})}$ удобно задавать m-мерным вектор-столбцом

$$\mathbf{a}^{(\text{к})} = (\mu_{A^{(\text{к})}}(a_0)\,,\ \mu_{A^{(\text{к})}}(a_1)\,,\ \ldots\,,\ \mu_{A^{(\text{к})}}(a_{m-1}))^{\mathrm{T}}.$$

В таком случае выражение (7) примет вид

$$\mu(\omega) = \mathbf{r}\mathbf{R}(\omega)\mathbf{c}^{(\text{к})},$$

где $\mathbf{c}^{(\text{к})}$ – результат поэлементного умножения векторов $\mathbf{a}^{(\text{к})}$ и $\mathbf{q}$, т. е.

$$\mathbf{c}^{(\text{к})} = (\mu_{A^{(\text{к})}}(a_0)q_0\,,\ \mu_{A^{(\text{к})}}(a_1)q_1\,,\ \ldots\,,\ \mu_{A^{(\text{к})}}(a_{m-1})q_{m-1}),$$

а $\mathbf{R}(\omega)$ есть

$$\mathbf{R}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{R}(e) = \mathbf{I}(m) & \text{при } t = 0, \\ \mathbf{R}(\omega) = \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{R}(s_\nu) & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$\omega = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t}$, и $\mathbf{I}(m)$ – единичная $(m \times m)$-матрица.

6. Сводимость к абстрактным $\mathbb{R}$-автоматам

Докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Для любого обобщенного $\mathbb{R}$-автомата*

$$\mathcal{A} = \langle X,\ A,\ Y,\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{R}(s,l)\},\ \mathbf{q}\rangle, \tag{8}$$

имеющего m состояний и k выходных символов, в котором “нечетким” подмножеством выходных символов $Y^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} Y$ представлен $\mathbb{R}$-язык Z (6), можно построить такой абстрактный $\mathbb{R}$-автомат

$$\mathcal{B} = \langle X,\ B,\ \mathbf{r}',\ \{\mathbf{R}(s)\},\ \mathbf{q}''\rangle, \tag{9}$$

имеющий mk состояний, в котором $\mathbb{R}$-язык Z представлен некоторым “нечетким” подмножеством $B^{(\text{к})} \underset{\mu}{\subseteq} B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя следующий алгоритм можно по заданному обобщенному $\mathbb{R}$-автомату (8) построить $\mathbb{R}$-автомат с отмеченными состояниями

$$\mathcal{B}' = \langle X,\ B,\ Y,\ \mathbf{r}',\ \{\mathbf{R}(s)\},\ \mathbf{q}',\ \varphi\rangle. \tag{10}$$

В качестве алфавита состояний B возьмем элементы множества $A \times Y$, т. е. $B = \{b_{jl}\}$, где $b_{jl} = (a_j, y_l) \in A \times Y$. Таким образом $\mathbb{R}$-автомат $\mathcal{B}'$ будет иметь mk состояний. В качестве начального распределения весов по состояниям $\mathbb{R}$-автомата $\mathcal{B}'$ выберем любой вектор-строку $\mathbf{r}' = (r'_{00}, r'_{01}, \ldots, r'_{m-1k-1})$, удовлетворяющий условию: для каждого $i_0 = \overline{0, m-1}$

$$\sum_{l=0}^{k-1} r'_{i_0 l} = r_{i_0}, \tag{11}$$

где r_{i_0} есть i_0-й элемент вектора $\mathbf{r}$.

Аналогично в качестве конечного распределения весов по состояниям автомата $\mathcal{B}'$ выберем любой вектор-столбец $\mathbf{q}' = (q'_{00}, q'_{01}, \ldots, q'_{m-1k-1})^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющий условию: для каждого $i_0 = \overline{0, m-1}$

$$q'_{i_0 l} = q_{i_0}, \quad l = \overline{0, k-1}, \tag{12}$$

где q_{i_0} есть i_0-й элемент вектора $\mathbf{q}$.

Элементы матриц вероятностей переходов автомата $\mathcal{B}'$ определяются соотношением

$$R'_{(ig)(jl)}(s) = R_{ij}(s, l), \quad i, j = \overline{0, m-1}, \quad g, l = \overline{0, k-1}.$$

Функция φ отметки состояний автомата $\mathcal{B}'$ имеет следующие значения:

$$\varphi(b_{j\,l}) = y_l, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad l = \overline{0, k-1}. \tag{13}$$

Для автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}'$ выполняется равенство

$$R'(b_{i_\nu l_\nu} \,|\, b_{i_{\nu-1} g_{\nu-1}} x_{s_\nu}) = R'_{(i_{\nu-1} g_{\nu-1})(i_\nu l_\nu)}(s_\nu) = \tag{14}$$

$$= R_{i_{\nu-1} i_\nu}(s_\nu, l_\nu) = R(a_{i_\nu} y_{l_\nu} \,|\, a_{i_{\nu-1}} x_{s_\nu})$$

при всех $g_{\nu-1} = \overline{0, k-1}$. При этом, учитывая значения функции φ (13), отмечающей состояния автомата $\mathcal{B}'$, для него справедливо соотношение

$$R'(b_{i_\nu g_\nu} y_{l_\nu} \,|\, b_{i_{\nu-1} g_{\nu-1}} x_{s_\nu}) = \begin{cases} R'(b_{i_\nu l_\nu} \,|\, b_{i_{\nu-1} g_{\nu-1}} x_{s_\nu}) & \text{при } g_\nu = l_\nu, \\ 0 & \text{при } g_\nu \neq l_\nu. \end{cases} \tag{15}$$

В таком случае, учитывая выражения (11)-(15), находим для слов $x^{(d)} = x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_d}$, $y^{(d)} = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_d}$ значения

$$R_{\mathcal{B}'}(y^{(d)} | \, x^{(d)}) =$$

$$= \sum_{i_0,\, g_0} r'_{i_0 g_0} \sum_{i_1,\, g_1} \dots \sum_{i_d,\, g_d} \prod_{\nu=1}^{d} R'(b_{i_\nu g_\nu} y_{l_\nu} | \, b_{i_{\nu-1} g_{\nu-1}} x_{s_\nu}) q'_{i_d g_d} =$$

$$= \sum_{i_0,\, l_0} r'_{i_0 l_0} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_d} \prod_{\nu=1}^{d} R'(b_{i_\nu l_\nu} | \, b_{i_{\nu-1} g_{\nu-1}} x_{s_\nu}) q'_{i_d l_d} =$$

$$= \sum_{i_0,\, l_0} r'_{i_0 l_0} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_d} \prod_{\nu=1}^{d} R(a_{i_\nu} y_{l_\nu} | \, a_{i_{\nu-1}} x_{s_\nu}) q'_{i_d l_d} =$$

$$= \sum_{i_0} \dots \sum_{i_d} r_{i_0} \prod_{\nu=1}^{d} R(a_{i_\nu} y_{l_\nu} | \, a_{i_{\nu-1}} x_{s_\nu}) q_{i_d} = R_{\mathcal{A}}(y^{(d)} | \, x^{(d)}).$$

Таким образом для исходного обобщенного $\mathbb{R}$-автомата (8), имеющего m состояний и k выходных символов построен $\mathbb{R}$-автомат с отмеченными состояниями $\mathcal{B}'$ (10) такой, что для всех пар слов $(x^{(d)}, y^{(d)}) \in X^* \times Y^*$ выполняется

$$R_{\mathcal{B}'}(y^{(d)} | x^{(d)}) = R_{\mathcal{A}}(y^{(d)} | x^{(d)}).$$

Искомый абстрактный $\mathbb{R}$-автомат (9) получается из построенного $\mathbb{R}$-автомата с отмеченными состояниями (10) при помощи следующей процедуры:

1) По отмечающей функции (13) φ и "нечеткому" подмножеству выходных символов $Y^{(\text{к})}$ определяется "нечеткое" подмножество конечных состояний $B^{(\text{к})}$ по следующей схеме:

$$B^{(\text{к})} = \{(b_{j\,l}, \mu_{B^{(\text{к})}}(b_{j\,l})) | \, b_{j\,l} \in B, \mu_{B^{(\text{к})}}(b_{jl}) \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbf{q}'' = (\mu_{B^{(\text{к})}}(b_{0\,0}), \mu_{B^{(\text{к})}}(b_{0\,1}), \dots, \mu_{B^{(\text{к})}}(b_{m-1\,k-1}))^{\mathrm{T}},$$

где

$$\mu_{B^{(\text{к})}}(b_{j\,l}) = \mu_{Y^{(\text{к})}}(\varphi(b_{j\,l})) q_{j\,l} = \mu_{Y^{(\text{к})}}(y_l) q_{j\,l}, \;\; j = \overline{0, m-1}, \;\; l = \overline{0, k-1}.$$

2) Из $\mathbb{R}$-автомата с отмеченными состояниями (10) удаляются множество выходных символов Y, а вектор $\mathbf{q}$ заменяется на вектор $\mathbf{q}''$.

Теорема доказана.

7. Общая теорема об эквивалентном преобразовании

Из теорем 1 и 2 следует, что в принципе задачу эквивалентного преобразования можно рассматривать для абстрактных $\mathbb{R}$-нечетких и стохастических автоматов.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть задан абстрактный $\mathbb{R}$-автомат*

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \langle X,\ \widetilde{A},\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{R}(s)\},\ \mathbf{q}\rangle, \tag{16}$$

где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\widetilde{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, и выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{r} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$;

2) $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$, $q_j \in [0,1]$, $j = \overline{1,m}$;

3) $\mathbf{R}(s) = (R_{ij}(s))_{m,m}$, $R_{ij}(s) \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{m} R_{ij}(s) \leqslant 1$, *для всех* $i = \overline{1,m}$ *и* $s = \overline{1,n}$.

Тогда можно построить эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}, \mathbf{e}^{(\text{к})}\rangle$, имеющий не более $2m+2$ состояний и такой, что для всех $\omega \in X^*$ выполняется

$$\mathbf{p}\mathbf{P}(\omega)\mathbf{e}^{(\text{к})} = \mathbf{r}\mathbf{R}(\omega)\mathbf{q}. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для начала построим абстрактный автомат $\mathcal{A}_{pr}$, а затем установим его эквивалентность автомату (16). Автомат $\mathcal{A}_{pr}$ строится в соответствии со следующим алгоритмом:

Шаг 1: По $\mathbb{R}$-автомату (16) строится $\mathbb{R}$-автомат $\mathcal{A}_1 = \langle X, A^{(1)}, \mathbf{r}^{(1)}, \{\mathbf{R}^{(1)}(s)\}, \mathbf{q}^{(1)}\rangle$. Множество состояний на этом шаге остается неизменным $A^{(1)} = \widetilde{A}$ и производится “процедура наложения” несколько измененного вектора $\mathbf{q}$ на строки матриц. Формально данный шаг описывается следующим образом:

а) $A^{(1)} = \widetilde{A}$;

б) $q_{max} = \max\limits_{j=\overline{1,m}} q_j$ (где $q_j \leqslant 1$ по условию на вид вектора $\mathbf{q}$);

в) $\mathbf{r}^{(1)} = q_{max}\,\mathbf{r}$;

г) $\widehat{\mathbf{q}} = (q_{max})^{-1}\mathbf{q}$;

д) $\mathbf{R}^{(1)}(s) = \left(R_{ij}^{(1)}(s)\right)_{m,m}$, где $R_{ij}^{(1)}(s) = R_{ij}(s)\widehat{q}_j$ (из определений вектора $\widehat{\mathbf{q}}$ и начальной матрицы $\mathbf{R}(s)$ очевидно, что каждый элемент новой матрицы $\mathbf{R}^{(1)}(s)$ будет больше либо равен 0, а сумма элементов в каждой строке не будет превосходить 1);

е) $\mathbf{q}^{(1)} = (q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \ldots, q_m^{(1)})^{\mathrm{T}}$, где $q_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } q_i > 0, \\ 0, & \text{если } q_i = 0. \end{cases}$

Шаг 2: Строится автомат $\mathcal{A}_2 = \langle X, A^{(2)}, \mathbf{r}^{(2)}, \{\mathbf{R}^{(2)}(s)\}, \mathbf{q}^{(2)}\rangle$ по следующим правилам:
а) $A^{(2)} = A^{(1)} \cup \{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{2m}\}$;
б) $\mathbf{r}^{(2)} = (\mathbf{r}^{(1)}, 0, 0, \ldots, 0)$;
в) $\mathbf{q}^{(2)} = (\mathbf{q}^{(1)^{\mathrm{T}}}, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$;
г) $\mathbf{R}^{(2)}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(1)}(s) & \mathbf{R}(s) - \mathbf{R}^{(1)}(s) \\ \mathbf{R}^{(1)}(s) & \mathbf{R}(s) - \mathbf{R}^{(1)}(s) \end{pmatrix}$ (очевидно, что новая матрица также будет состоять из неотрицательных элементов, а сумма по каждой строке не будет превосходить 1).

Шаг 3: Если на предыдущем шаге был получен стохастический автомат, то этот шаг пропускается. В противном случае строится автомат $\mathcal{A}_3 = \langle X, A^{(3)}, \mathbf{r}^{(3)}, \{\mathbf{R}^{(3)}(s)\}, \mathbf{q}^{(3)}\rangle$ по следующим правилам:
а) $A^{(3)} = A^{(2)} \cup \{a_{2m+1}\}$;
б) $\mathbf{r}^{(3)} = \left(\mathbf{r}^{(2)},\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{2m} r_i^{(2)}\right)$;
в) $\mathbf{q}^{(3)} = (\mathbf{q}^{(2)^{\mathrm{T}}}, 0)^{\mathrm{T}}$;
г) $\mathbf{R}^{(3)}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(2)}(s) & \mathbf{1} - \sum\limits_{j=1}^{m} R_{\cdot j}^{(2)}(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\sum\limits_{j=1}^{m} R_{\cdot j}^{(2)}(s)$ – вектор-столбец равный сумме всех столбцов матрицы $\mathbf{R}^{(2)}(s)$.

Шаг 4: Цель этого шага — задать пустому слову $e \in X^*$ такую же степень принадлежности, что и в автомате $\widetilde{\mathcal{A}}$. Требуемый автомат $\mathcal{A}_{pr}$ получается из автомата $\mathcal{A}_3$ добавлением еще одного состояния по следующей схеме:
а) $A = A^{(3)} \cup \{a_0\}$;
б) $\mathbf{p} = (r_1^{(3)} - q_1,\ q_1,\ r_2^{(3)}, \ldots, r_{2m+1}^{(3)})$;
в) $\mathbf{e}^{(\text{к})} = (0, \mathbf{q}^{(3)^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}$;
г) $\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{R}_{1\cdot}^{(3)}(s) \\ 0 & \mathbf{R}^{(3)}(s) \end{pmatrix}$, где $\mathbf{R}_{1\cdot}^{(3)}(s)$ – первая строка матрицы $\mathbf{R}^{(3)}(s)$.

В соответствии с описанной выше процедурой по автомату $\widetilde{\mathcal{A}}$ будет построен автомат $\mathcal{A}_{pr}$. То что он будет являться стохастическим следует из самой процедуры построения, так как на первом шаге начальный вектор $\mathbf{p}$ домножается на $q_{max} \in [0,1]$, а значит его элементы останутся в пределах интервала $[0,1]$. В векторе $\mathbf{q}$ сначала все элементы делятся на q_{max}, а затем все ненулевые элементы заменяются на 1, а нулевые такими и остаются. Матрицы переходов построчно и поэлементно домножаются на вектор $q_{max}^{-1}\mathbf{q}$, а так как у этого вектора и у этих матриц все элементы лежат в интервале $[0,1]$, то и все элементы новых матриц будут лежать в этом интервале, причем суммы по строкам могут лишь уменьшиться. На втором шаге векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ дополняются нулями, а матрицы переходов изменяются таким образом, что отрицательных элементов и элементов больше единицы они не содержат, а суммы по соответствующим строкам останутся в интервале $[0,1]$. Шаги 3 и 4 дополняют автомат состояниями, не нарушая условие принадлежности всех элементов интервалу $[0,1]$ и дополняя суммы по строкам матриц переходов и сумму по элементам начального вектора до единицы, т. е. делая их стохастическими.

Остается доказать, что для любого слова $\omega = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t} \in X^*$ выполняется равенство (17), т. е. что

$$\mathbf{p}\prod_{\nu=1}^{t}\mathbf{P}(s_\nu)\mathbf{e}^{(\text{к})} = \mathbf{r}\prod_{\nu=1}^{t}\mathbf{R}(s_\nu)\mathbf{q}. \tag{18}$$

Сначала проверим выполнение этого равенства для пустого слова $e \in X^*$. Для него левая часть равенства (18) преобразуется следующим образом (учитывая, что в векторе $\mathbf{p}$ по построению только первая, вторая и последняя компоненты могут быть больше нуля; что $e_0^{(\text{к})} = 0$, $e_{2m+1}^{(\text{к})} = 0$; что $e_1^{(\text{к})} = 0$ только если $q_1 = 0$; а также учитывая определения p_1 и $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{p}\mathbf{e}^{(\text{к})} = \sum_{i=0}^{2m+1} p_i e_i^{(\text{к})} = p_0 e_0^{(\text{к})} + p_1 e_1^{(\text{к})} + p_{2m+1} e_{2m+1}^{(\text{к})} =$$

$$= p_1 e_1^{(\text{к})} = q_1 e_1^{(\text{к})} = q_1 = \mathbf{r}\mathbf{q}.$$

Теперь докажем, что для непустого слова $\omega = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t} \in X^*$ выполняется равенство (18). Выпишем в явном виде матрицы $\mathbf{P}(s)$ в терминах элементов матриц $\mathbf{R}(s)$ и вектора $\widehat{\mathbf{q}}$.

$$
\mathbf{P}(s)=\begin{pmatrix}
0 & R_{11}(s)\widehat{q}_1 & \dots & R_{1m}(s)\widehat{q}_m & R_{11}(s)(1-\widehat{q}_1) & \dots & R_{1m}(s)(1-\widehat{q}_m) & 1-\sum\limits_{i=1}^{m} R_{1i}(s)\\
0 & R_{11}(s)\widehat{q}_1 & \dots & R_{1m}(s)\widehat{q}_m & R_{11}(s)(1-\widehat{q}_1) & \dots & R_{1m}(s)(1-\widehat{q}_m) & 1-\sum\limits_{i=1}^{m} R_{1i}(s)\\
0 & R_{21}(s)\widehat{q}_1 & \dots & R_{2m}(s)\widehat{q}_m & R_{21}(s)(1-\widehat{q}_1) & \dots & R_{2m}(s)(1-\widehat{q}_m) & 1-\sum\limits_{i=1}^{m} R_{2i}(s)\\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill}\\
0 & R_{m1}(s)\widehat{q}_1 & \dots & R_{mm}(s)\widehat{q}_m & R_{m1}(s)(1-\widehat{q}_1) & \dots & R_{mm}(s)(1-\widehat{q}_m) & 1-\sum\limits_{i=1}^{m} R_{mi}(s)\\
0 & R_{11}(s)\widehat{q}_1 & \dots & R_{1m}(s)\widehat{q}_m & R_{11}(s)(1-\widehat{q}_1) & \dots & R_{1m}(s)(1-\widehat{q}_m) & 1-\sum\limits_{i=1}^{m} R_{1i}(s)\\
0 & R_{21}(s)\widehat{q}_1 & \dots & R_{2m}(s)\widehat{q}_m & R_{21}(s)(1-\widehat{q}_1) & \dots & R_{2m}(s)(1-\widehat{q}_m) & 1-\sum\limits_{i=1}^{m} R_{2i}(s)\\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill}\\
0 & R_{m1}(s)\widehat{q}_1 & \dots & R_{mm}(s)\widehat{q}_m & R_{m1}(s)(1-\widehat{q}_1) & \dots & R_{mm}(s)(1-\widehat{q}_m) & 1-\sum\limits_{i=1}^{m} R_{mi}(s)\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Докажем по индукции, что любое произведение матриц $\prod\limits_{\nu=1}^{t}\mathbf{P}(s_\nu)$ имеет вид

$$
\prod_{\nu=1}^{t}\mathbf{P}(s_\nu)=\begin{pmatrix}
0 & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\ i_t=1}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\ i_t=m}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m & * & \dots & *\\
0 & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\ i_t=1}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\ i_t=m}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m & * & \dots & *\\
0 & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=2,\ i_t=1}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=2,\ i_t=m}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m & * & \dots & *\\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill}\\
0 & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=m,\ i_t=1}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=m,\ i_t=m}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m & * & \dots & *\\
0 & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\ i_t=1}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\ i_t=m}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m & * & \dots & *\\
0 & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=2,\ i_t=1}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=2,\ i_t=m}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m & * & \dots & *\\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill}\\
0 & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=m,\ i_t=1}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{t-1}=1\\ i_0=m,\ i_t=m}}^{m}\prod\limits_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m & * & \dots & *\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},
$$

где $*$ — элементы матрицы, явный вид которых нам не важен, и использовано обозначение

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=\alpha,\ i_t=\beta}}^{m} = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\ldots\sum_{i_{t-1}=1}^{m}$$

при фиксированных $i_0 = \alpha$ и $i_t = \beta$.

• База индукции $n = 1$. Очевидно, что явное представление матриц $\mathbf{P}(s)$ имеет требуемый вид.

• Предположение индукции $n = t$. Пусть любое произведение t матриц $\prod\limits_{\nu=1}^{t} \mathbf{P}(s_\nu)$ имеет требуемый вид.

• Шаг индукции $n = t+1$. Рассмотрим произведение $t+1$ матрицы $\prod\limits_{\nu=1}^{t+1} \mathbf{P}(s_\nu)$, представив его в виде

$$\prod_{\nu=1}^{t+1} \mathbf{P}(s_\nu) = \mathbf{P}(s_1)\prod_{\nu=2}^{t+1} \mathbf{P}(s_\nu).$$

Заметим, что в представлении произведения матриц $\prod\limits_{\nu=2}^{t+1} \mathbf{P}(s_\nu)$ каждый элемент содержит в качестве множителя следующий коэффициент $\sum\limits_{\substack{i_2,\ldots,i_t=1\\ i_1=\alpha,\ i_{t+1}=\beta}}^{m} \prod\limits_{\nu=2}^{t+1} R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)$. Обозначим

$$c_{\alpha\beta}(i^{(t)}) = \sum_{\substack{i_2,\ldots,i_t=1\\ i_1=\alpha,\ i_{t+1}=\beta}}^{m} \prod_{\nu=2}^{t+1} R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu),$$

где $i^{(t)}$ – мультииндекс $i^{(t)} = (i_2, i_3, \ldots, i_{t+1})$. Тогда произведение $\mathbf{P}(s_1) \cdot \prod\limits_{\nu=2}^{t+1} \mathbf{P}(s_\nu)$ будет представлять собой после элементарных преобразований следующую матрицу:

$$\mathbf{P}(s_1)\prod_{\nu=2}^{t+1}\mathbf{P}(s_\nu)=\begin{pmatrix}
0 & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{1i_1}(s_1)c_{i_1 1}(i^{(t)})\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{1i_1}(s_1)c_{i_1 m}(i^{(t)})\widehat{q}_m & * & \dots & * \\
0 & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{1i_1}(s_1)c_{i_1 1}(i^{(t)})\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{1i_1}(s_1)c_{i_1 m}(i^{(t)})\widehat{q}_m & * & \dots & * \\
0 & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{2i_1}(s_1)c_{i_1 1}(i^{(t)})\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{2i_1}(s_1)c_{i_1 m}(i^{(t)})\widehat{q}_m & * & \dots & * \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
0 & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{mi_1}(s_1)c_{i_1 1}(i^{(t)})\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{mi_1}(s_1)c_{i_1 m}(i^{(t)})\widehat{q}_m & * & \dots & * \\
0 & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{1i_1}(s_1)c_{i_1 1}(i^{(t)})\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{1i_1}(s_1)c_{i_1 m}(i^{(t)})\widehat{q}_m & * & \dots & * \\
0 & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{2i_1}(s_1)c_{i_1 1}(i^{(t)})\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{2i_1}(s_1)c_{i_1 m}(i^{(t)})\widehat{q}_m & * & \dots & * \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
0 & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{mi_1}(s_1)c_{i_1 1}(i^{(t)})\widehat{q}_1 & \dots & \sum\limits_{i_1=1}^{m}R_{mi_1}(s_1)c_{i_1 m}(i^{(t)})\widehat{q}_m & * & \dots & * \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}.$$

Остается доказать, что $\sum\limits_{i_1=1}^{m} R_{\alpha i_1}(s_1)c_{i_1\beta}(i^{(t)}) = \sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_t=1\\ i_0=\alpha,i_{t+1}=\beta}}^{m} \prod\limits_{\nu=1}^{t+1} R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)$.

Действительно

$$\sum_{i_1=1}^{m}R_{\alpha i_1}(s_1)c_{i_1\beta}(i^{(t)})=\sum_{i_1=1}^{m}R_{\alpha i_1}(s_1)\sum_{\substack{i_2,\dots,i_t=1\\ i_1=i_1,\ i_{t+1}=\beta}}^{m}\prod_{\nu=2}^{t+1}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_t=1\\ i_1=i_1,\ i_{t+1}=\beta}}^{m}R_{\alpha i_1}(s_1)\prod_{\nu=2}^{t+1}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_t=1\\ i_0=\alpha,\ i_{t+1}=\beta}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t+1}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\,.$$

Таким образом доказано, что матрицы $\prod\limits_{\nu=1}^{t}\mathbf{P}(s_\nu)$ имеют указанный выше вид.

Также, проследив по алгоритму за изменениями начального вектора $\mathbf{p}$, можно убедиться, что он имеет вид

$$\mathbf{p}=(q_{max}-q_1,\ q_1,\ 0,\ 0,\dots,0,\ 1-q_{max}).$$

Теперь, перейдем непосредственно к проверке равенства (18). Учитывая, что $e_i^{(\text{к})}=0$, для $i=\overline{m+1,2m+2}$; что $e_i^{(\text{к})}=0\Leftrightarrow q_i=0$ для $i=\overline{1,m}$, и что $q_{max}\widehat{q}_j=q_j$, имеем:

$$\mathbf{p}\prod_{\nu=1}^{t}\mathbf{P}(s_\nu)\mathbf{e}^{(\kappa)} =$$

$$= \Bigg(0, q_{max}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=1}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_1, q_{max}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=2}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_2, \ldots,$$

$$q_{max}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=m}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_m, *, \ldots, *\Bigg)\mathbf{e}^{(\kappa)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_{max}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=j}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\widehat{q}_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=j}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)q_j =$$

$$= \Bigg(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=1}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu), \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=2}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu), \ldots,$$

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{t-1}=1\\ i_0=1,\, i_t=m}}^{m}\prod_{\nu=1}^{t}R_{i_{\nu-1}i_\nu}(s_\nu)\Bigg)\mathbf{q} = \mathbf{r}\prod_{\nu=1}^{t}\mathbf{R}(s_\nu)\mathbf{q}.$$

Теорема доказана.

8. Пример

Поясним алгоритм перехода от $\mathbb{R}$-автомата $\widetilde{\mathcal{A}}$ к эквивалентному по представляемому языку стохастическому автомату $\mathcal{A}_{pr}$ на следующем примере. Пусть задан $\mathbb{R}$-автомат $\widetilde{\mathcal{A}}$ (16), где $X = \{x_1, x_2\}$, $\widetilde{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$,

$$\mathbf{r} = (1,\ 0,\ 0), \qquad \mathbf{q} = (0.3,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{R}(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.03 & 0.43 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(2) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.03 & 0.27 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним все шаги алгоритма, использованного для доказательства теоремы 3.

Шаг 1: Строим автомат $\mathcal{A}_1 = \langle X, A^{(1)}, \mathbf{r}^{(1)}, \{\mathbf{R}^{(1)}(s)\}, \mathbf{q}^{(1)}\rangle$. Множество состояний на этом шаге остается неизменным $A^{(1)} = \widetilde{A}$. Далее находим $q_{max} = 1$, получаем $\mathbf{r}^{(1)} = (1, 0, 0)$, а затем “накладываем" вектор $\mathbf{q}$ на строки матриц переходов

$$\mathbf{R}^{(1)}(1) = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}^{(1)}(2) = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом сам вектор $\mathbf{q}^{(1)}$ будет выглядеть как $\mathbf{q}^{(1)} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 2: Строим автомат $\mathcal{A}_2 = \langle X, A^{(2)}, \mathbf{r}^{(2)}, \{\mathbf{R}^{(2)}(s)\}, \mathbf{q}^{(2)}\rangle$.

$$A^{(2)} = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_6\},$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0), \qquad \mathbf{q}^{(2)} = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{R}^{(2)}(1) = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.03 & 0 & 0.14 & 0 & 0.43 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.06 & 0.03 & 0 & 0.14 & 0 & 0.43 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}^{(2)}(2) = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0 & 0.27 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0 & 0.27 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3: Поскольку полученный автомат $\mathcal{A}_2$ не является стохастическим, строим автомат $\mathcal{A}_3 = \langle X, A^{(3)}, \mathbf{r}^{(3)}, \{\mathbf{R}^{(3)}(s)\}, \mathbf{q}^{(3)}\rangle$, где

$$A^{(3)} = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0), \quad \mathbf{q}^{(3)} = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{R}^{(3)}(1) = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.03 & 0 & 0.14 & 0 & 0.43 & 0.34 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.06 & 0.03 & 0 & 0.14 & 0 & 0.43 & 0.34 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}^{(3)}(2) = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0 & 0.27 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.03 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0 & 0.27 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4: В результате выполнения этого шага получим абстрактный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}, \mathbf{e}^{(\text{к})}\rangle$, где

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_8\},$$

$$\mathbf{p} = (0.7,\ 0.3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0), \quad \mathbf{e}^{(\text{к})} = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0.06 & 0.03 & 0 & 0.14 & 0 & 0.43 & 0.34 \\ 0 & 0.06 & 0.03 & 0 & 0.14 & 0 & 0.43 & 0.34 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.06 & 0.03 & 0 & 0.14 & 0 & 0.43 & 0.34 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0.03 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0 & 0.27 & 0.6 \\ 0 & 0.03 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0 & 0.27 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.03 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0 & 0.27 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] *Чирков М.К., Пономарева А.Ю.* Стационарные детерминированные и вероятностные автоматы (Теория автоматных моделей). — СПб.: изд. СПбГУ. 2008. 248 с.

[2] *Masakazu N., Namio H.* Fuzzy events realized by probabilistic automata // Inform. and Control. 1968. Vol. **12**. No. 15. P. 284–303.

[3] *Чирков М.К., Наср Я.* О стохастических и нестохастических минимальных формах стохастических автоматов // Теория и приложения дискретных систем. — СПб.: изд. СПбГУ. 1995. С. 37–67.

[4] *Gelenbe S.E.* On languages defined by probabilistic automata // Inform. and Control. 1970. Vol. **16**. No. 5. P. 487–501.

[5] *Шестаков А.А., Чирков М.К.* Обобщенные конечные автоматы: Поведенческая эквивалентность и проблемы оптимизации. — Апатиты: изд. КНЦ РАН. 1992. 160 с.