Вычисление показателя Ляпунова для одной модели стохастической системы с синхронизацией[1]

Н. К. Кривулин, д. ф.-м. н.[2]
Санкт-Петербургский государственный университет
nkk@math.spbu.ru

Рассматривается стохастическая динамическая система с синхронизацией. Динамика системы описывается при помощи линейного векторного уравнения с матрицей второго порядка в идемпотентном полукольце с операциями максимума и сложения. Предполагается, что недиагональные элементы матрицы равны нулю, один диагональный элемент является случайной величиной с экспоненциальным распределением, а другой — неотрицательной константой. Решение задачи вычисления показателя Ляпунова для системы включает замену переменных, в результате которой вместо случайных координат вектора состояний системы вводятся новые случайные величины, анализ которых оказывается более удобным. Затем осуществляется построение и исследование сходимости соответствующих этим величинам последовательностей одномерных функций распределения. Показатель Ляпунова вычисляется как среднее значение предельного распределения.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, показатель Ляпунова, синхронизация событий, сходимость распределений.

1. Введение

Алгоритмы, в соответствии с которыми функционируют реальные системы в технике, экономике, управлении и других областях, нередко включают различные механизмы синхронизации событий, происходящих в системе. Во многих случаях динамика таких систем может быть описана при помощи векторных уравнений, которые являются линейными в смысле некоторого идемпотентного полукольца [1–4].

Особый интерес представляют стохастические модели систем с синхронизацией, в которых матрица уравнения является случайной. При этом целью исследования часто является определение показателя Ляпунова (средней асимптотической скорости роста вектора состояний) системы. Однако даже для простых моделей систем вычисление значения показателя Ляпунова может оказаться довольно трудной задачей. Большинство известных результатов по-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №09-01-00808).

лучены для систем с матрицей второго порядка и экспоненциальным распределением ее элементов [4–7].

В настоящей работе рассматривается задача вычисления показателя Ляпунова для системы с матрицей второго порядка, у которой недиагональные элементы равны нулю. Из двух диагональных элементов один является случайной величиной с экспоненциальным распределением, а другой — неотрицательной константой.

В последующих разделах приводятся примеры моделей систем с синхронизацией, включая модели производственно-транспортной системы и системы передачи данных. Представлены некоторые известные результаты вычисления показателя Ляпунова для систем с матрицами, у которых часть элементов являются случайными величинами, а на месте остальных стоят неотрицательные константы.

Решение поставленной задачи включает замену переменных, в результате которой вместо случайных координат вектора состояний вводятся новые случайные величины, анализ которых оказывается более удобным. Затем осуществляется построение и исследование сходимости соответствующих этим величинам последовательностей одномерных функций распределения. Показатель Ляпунова вычисляется как среднее значение предельного распределения.

2. Модели систем с синхронизацией

В этой части сначала рассматриваются примеры динамических систем, в которых наступление определенных событий подчиняется некоторым условиям синхронизации. Затем дается краткий обзор известных результатов решения задачи вычисления показателя Ляпунова для стохастических моделей таких систем в случае, когда среди элементов матрицы системы есть как случайные величины, так и константы.

2.1. Производственно-транспортная система

Рассмотрим модель производственно-транспортной системы [4], состоящей из двух предприятий-партнеров A и B, каждое из которых производит свою собственную продукцию с использованием результатов работы другого предприятия. Деятельность отдельного предприятия и системы в целом представляет собой последовательность следующих друг за другом производственных циклов.

На каждом цикле предприятие параллельно осуществляет транспортировку продукции предыдущего цикла партнеру и производство новой партии продукции на основе потребления продукции, полученной от партнера.

Для завершения текущего и начала нового производственного цикла на одном предприятии необходимо, чтобы на нем был завершен выпуск текущей партии продукции, а также осуществлена доставка на него необходимой продукции предприятия-партнера. Очередной производственный цикл всей системы считается завершенным, когда оказываются завершены соответствующие циклы на обоих предприятиях.

Предположим, что в начальный момент времени на каждом предприятии имеется готовая к отправке продукция. При условии, что задано время производства и транспортировки продукции для каждого предприятия, требуется определить среднее время производственного цикла системы, а также обратную ему величину — пропускную способность системы.

Для каждого цикла $k = 1, 2, \ldots$ введем обозначения:

$x(k)$ — время завершения цикла на предприятии A;

$y(k)$ — время завершения цикла на предприятии B;

α_k и δ_k — длительность процесса производства партии продукции на предприятиях A и B;

β_k и γ_k — продолжительность транспортировки продукции от предприятия B к A и от A к B.

Динамику системы при всех $k = 1, 2, \ldots$ можно описать с помощью уравнений

$$
\begin{aligned}
x(k) &= \max(x(k-1) + \alpha_k, y(k-1) + \beta_k), \\
y(k) &= \max(x(k-1) + \gamma_k, y(k-1) + \delta_k)
\end{aligned}
$$

при условии, что

$$x(0) = y(0) = 0.$$

Определение среднего времени производственного цикла системы сводится к нахождению предела

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max(x(k), y(k)).$$

В ряде случаев оказывается удобным записывать уравнения системы в терминах идемпотентного полукольца со скалярными операциями вычисления максимума в роли сложения $\oplus$ и арифметического сложения в роли умножения $\otimes$ в виде

$$
\begin{aligned}
x(k) &= \alpha_k \otimes x(k-1) \oplus \beta_k \otimes y(k-1), \\
y(k) &= \gamma_k \otimes x(k-1) \oplus \delta_k \otimes y(k-1).
\end{aligned}
$$

Введем переходную матрицу и вектор состояний системы

$$
A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}.
$$

Динамику системы теперь можно представить в компактной векторной форме в виде линейного уравнения

$$
\boldsymbol{z}(k) = A(k) \otimes \boldsymbol{z}(k-1).
$$

Среднее время производственного цикла в терминах идемпотентного полукольца записывается в виде

$$
\lambda = \lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{z}(k)\|^{1/k}
$$

и имеет смысл средней скорости роста вектора состояний системы, которую обычно называют показателем Ляпунова.

Заметим, что в реальных системах затраты времени, например, на производство или транспортировку продукции для одного из предприятий могут оказаться несущественными по сравнению с другими временными интервалами. Ясно, что без потери точности модели такие затраты можно считать равными нулю и рассматривать динамические системы, для которых матрица системы имеет нулевые элементы.

2.2. Система передачи данных

Пусть имеется система передачи данных, состоящая из двух узлов A и B, которые обмениваются сообщениями через некоторую подсеть связи. В каждом из узлов после отправки одного сообщения немедленно начинается формирование следующего сообщения. Сформированное сообщение отправляется в другой узел, как только из этого узла будет получено очередное сообщение.

Работа каждого узла и системы в целом представляет собой последовательность сеансов связи. Очередной сеанс в узле начинается сразу после отправки очередного сообщения и продолжается до отправки следующего сообщения. Сеанс связи системы начинается, как только оба узла завершат свой предыдущий сеанс и продолжается до завершения ими текущего сеанса.

Предположим, что задано время формирования сообщений в каждом узле и время передачи сообщений между узлами. Для рассматриваемой модели представляет интерес вычисление средней продолжительности сеанса связи системы, а также обратной ей величины — пропускной способности системы.

Для каждого сеанса $k = 1, 2, \ldots$ введем обозначения:

$x(k)$ — время завершения сеанса в узле A;

$y(k)$ — время завершения сеанса в узле B;

α_k и δ_k — длительность формирования сообщения в узлах A и B;

β_k и γ_k — продолжительность передачи сообщения от узла B к A и от узла A к B.

Легко видеть, что для рассматриваемой системы динамические уравнения имеют такой же вид, как в предыдущем примере. Задача определения средней длины сеанса связи снова сводится к вычислению средней скорости роста вектора состояний (показателя Ляпунова) системы.

2.3. Стохастические модели систем

Решение задачи вычисления показателя Ляпунова представляет особый интерес в случае стохастических моделей систем с синхронизацией, в которых матрица системы является случайной. Наиболее изученными являются системы с экспоненциальным распределением элементов переходной матрицы.

Предположим, что в рассмотренных выше примерах последовательности элементов матрицы $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ и $\{\delta_k\}$ состоят из независимых случайных величин и сами являются независимыми. Элементы каждой последовательности имеют общее экспоненциальное распределение, параметры которых обозначим через μ, ν, σ и τ. Вычисления показателя Ляпунова для такой системы может быть осуществлено на основе алгебраического подхода в [4], при котором задача сводится к нахождению решения системы линейных уравнений с последующим вычислением некоторого линейного функционала от полученного решения.

Если часть элементов матрицы системы является неотрицательными константами, то решение может быть найдено в явном виде. В частности, для систем с матрицей с нулевыми константами в работе [4] получены следующие результаты:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\mu^4 + \mu^3\tau + \mu^2\tau^2 + \mu\tau^3 + \tau^4}{\mu\tau(\mu+\tau)(\mu^2+\tau^2)};$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{4\nu^2 + 7\nu\sigma + 4\sigma^2}{6\nu\sigma(\nu+\sigma)};$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{2\mu^4 + 7\mu^3\nu + 10\mu^2\nu^2 + 11\mu\nu^3 + 4\nu^4}{\mu\nu(\mu+\nu)^2(3\mu+4\nu)}.$$

Для случая системы с матрицей, среди элементов которой есть произвольная константа $c \geq 0$, имеется результат [7]

$$A(k) = \begin{pmatrix} c & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = c + \frac{2e^{-2\nu c}}{\nu(2+e^{-2\nu c})}.$$

3. Стохастическая динамическая система

Рассмотрим стохастическую динамическую систему, эволюция которой описывается при помощи уравнения

$$\boldsymbol{z}(k) = A(k) \otimes \boldsymbol{z}(k-1),$$

где $\boldsymbol{z}(k)$ — двумерный вектор состояний, $A(k)$ — переходная матрица системы, $\otimes$ — знак операции умножения матрицы на вектор в полукольце со скалярными операциями максимума и сложения.

Будем решать задачу вычисления показателя Ляпунова системы при условии, что переходная матрица имеет вид

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

где c — некоторая неотрицательная константа, $\{\alpha_k\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения и плотности

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0, \\ 1 - e^{-\mu t}, & \text{если } t > 0; \end{cases} \qquad f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \mu e^{-\mu t}, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

Векторное уравнение системы можно представить с использованием операций полукольца в виде скалярных уравнений

$$x(k) = \alpha_k \otimes x(k-1) \oplus y(k-1),$$
$$y(k) = x(k-1) \oplus c \otimes y(k-1),$$

или с применением обычных арифметических операций в виде

$$x(k) = \max(x(k-1) + \alpha_k, y(k-1)),$$
$$y(k) = \max(x(k-1), y(k-1) + c).$$

Показатель Ляпунова системы определяется в терминах идемпотентного полукольца как предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{z}(k)\|^{1/k}$$

или с использованием обычных обозначений как предел

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max(x(k), y(k)).$$

Применяя эргодическую теорему из [4], нетрудно показать, что для рассматриваемой системы указанный предел существует с вероятностью 1, а также выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} \max(x(k), y(k)) = \lambda.$$

В некоторых случаях показатель Ляпунова находится без особого труда. Предположим, что $c = 0$. Тогда в силу неравенства

$$x(k) = \max(x(k-1) + \alpha_k, y(k-1)) \geq \max(x(k-1), y(k-1)) = y(k)$$

решение сводится к определению величины

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} x(k).$$

Кроме того, из первого уравнения получаем

$$x(k) = x(k-1) + \alpha_k = \cdots = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k,$$

откуда следует, что

$$\lambda = \mathsf{E}\alpha_1 = 1/\mu.$$

Возьмем теперь систему с матрицей, в которой на месте случайных величин α_k стоят нули, $c \geq 0$. Заметим, что такую модель можно рассматривать в определенном смысле как предельный случай общей модели системы при условии, что $\mu \to \infty$. Очевидно, что для такой системы

$$\lambda = c.$$

4. Нахождение показателя Ляпунова

Предположим, что $c > 0$. Покажем, что решение задачи может быть сведено к анализу сходимости некоторых последовательностей одномерных функций распределения с последующим вычислением математического ожидания для предельного распределения.

4.1. Преобразование модели

Воспользуемся заменой переменных, предложенной в работе [5],

$$\begin{aligned} X(k) &= x(k) - x(k-1), \\ Y(k) &= y(k) - x(k). \end{aligned}$$

Скалярные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(\alpha_k, Y(k-1)), \\ Y(k) &= \max(0, Y(k-1) + c) - \max(\alpha_k, Y(k-1)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$x(k) = X(1) + \cdots + X(k),$$

и, кроме того, выполняются неравенства

$$X(k) \geq 0, \qquad Y(k) \leq c.$$

Показатель Ляпунова теперь можно представить в виде

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E} \max(0, Y(k)) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E} X(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E} X(k).$$

Введем функции распределений

$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{X(k) < t\}, \qquad \Psi_k(t) = \mathsf{P}\{Y(k) < t\}.$$

Нетрудно видеть, что эти функции связаны соотношением

$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{\max(\alpha_k, Y(k-1)) < t\} = F_\alpha(t)\Psi_{k-1}(t).$$

Рассмотрим функцию распределения Ψ_k. По формуле полной вероятности запишем

$$\Psi_k(t) = \int_0^\infty \mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u\} f_\alpha(u) du.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{Y(k) < t | \alpha_k = u\} = \\
&\qquad = \mathsf{P}\{\max(0, Y(k-1)+c) - \max(u, Y(k-1)) < t\} = \\
&\qquad\qquad = \begin{cases} 0, & \text{если } u \le -t,\ t \le c, \\ \Psi_{k-1}(u-c+t), & \text{если } u > -t,\ t \le c, \\ 1 - \Psi_{k-1}(-t), & \text{если } u \le -t,\ t > c, \\ 1, & \text{если } u > -t,\ t > c; \end{cases}
\end{aligned}$$

имеем рекуррентное уравнение

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-c) f_\alpha(u-t) du, & \text{если } t \le 0, \\ \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-c+t) f_\alpha(u) du, & \text{если } 0 < t \le c, \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Подставляя выражение для плотности экспоненциального распределения, приходим к уравнению в виде

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} \mu e^{\mu t} \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-c) e^{-\mu u} du, & \text{если } t \le 0, \\ \mu \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(u-c+t) e^{-\mu u} du, & \text{если } 0 < t \le c, \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

4.2. Сходимость последовательностей распределений

Исследуем сходимость последовательностей функций распределения $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$. Введем обозначения

$$a_k = \mu \int_{-c}^0 \Psi_k(u) e^{-\mu u} du, \qquad b_k = \mu \int_0^c \Psi_k(u) e^{-\mu u} du.$$

Положим $C = e^{-\mu c}$ и представим рекуррентное уравнение в виде

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} C(a_{k-1} + b_{k-1} + C)e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ C\left(\frac{c-t}{c} a_{k-1} + b_{k-1} + C\right) e^{\mu t}, & \text{если } 0 < t \le c, \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Ясно, что имеется взаимно однозначное соответствие между последовательностями функций $\{\Psi_k\}$ и векторов $\{(a_k, b_k)^T\}$.

Вычисление соответствующих интегралов от функции Ψ_k приводит к системе уравнений

$$a_k = \mu c C a_{k-1} + \mu c C b_{k-1} + \mu c C^2,$$
$$b_k = \frac{\mu c C}{2} a_{k-1} + \mu c C b_{k-1} + \mu c C^2.$$

Матрица системы имеет собственные числа

$$\mu c C \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mu c e^{-\mu c} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Учитывая, что $0 \le x e^{-x} \le e^{-1}$ при всех $x \ge 0$, нетрудно проверить, что оба числа по абсолютной величине меньше единицы.

Следовательно, итерационный процесс, который задает эта система уравнений, сходится. Координаты предельного вектора (a, b) находятся из уравнений

$$(1 - \mu c C)a - \mu c C b = \mu c C^2,$$
$$-\frac{\mu c C}{2} a + (1 - \mu c C)b = \mu c C^2.$$

Решение уравнений дает следующий результат

$$a = \frac{2\mu c C^2}{2 - 4\mu c C + \mu^2 c^2 C^2}, \qquad b = \frac{(2 - \mu c C)\mu c C^2}{2 - 4\mu c C + \mu^2 c^2 C^2}.$$

Из сходимости последовательности векторов $\{(a_k, b_k)^T\}$ следует сходимость последовательности функций распределения $\{\Psi_k\}$. Предельная функция принимает вид

$$\Psi(t) = \begin{cases} C(a + b + C)e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ C(\frac{a}{c}(c - t) + b + C)e^{\mu t}, & \text{если } 0 < t \le c, \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

После подстановки значений a и b получим

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{2C^2}{2-4\mu cC+\mu^2c^2C^2} e^{\mu t}, & \text{если } t \le 0, \\ \frac{2C^2}{2-4\mu cC+\mu^2c^2C^2} \left(e^{\mu t} - \mu C t e^{\mu t}\right), & \text{если } 0 < t \le c, \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Последовательность $\{\Phi_k\}$ также сходится к функции

$$\Phi(t) = F_\alpha(t)\Psi(t) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0, \\ \frac{2C^2}{2-4\mu cC+\mu^2c^2C^2}(-1 + \mu C t + e^{\mu t} - \mu C t e^{\mu t}), & \text{если } 0 < t \le c, \\ 1 - e^{-\mu t}, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Легко видеть, что Φ является функцией распределения некоторой случайной величины X. Заметим, что $\mathsf{P}\{X = c\} > 0$, причем константа c является единственным значением, которое случайная величина X принимает с положительной вероятностью.

4.3. Вычисление показателя Ляпунова

Заметим, что из сходимости последовательности функций распределения $\{\Phi_k\}$ вытекает сходимость средних $\mathsf{E}X(k) \to \mathsf{E}X$. Тогда

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}X(k) = \mathsf{E}X.$$

Чтобы вычислить математическое ожидание, сначала определим функцию

$$\phi(t) = \Phi'(t) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \frac{2\mu C^2}{2-4\mu cC+\mu^2c^2C^2} \left(C + (1-C)e^{\mu t} - \mu C t e^{\mu t}\right), & \text{если } 0 < t < c, \\ \mu e^{-\mu t}, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Найдем вероятность

$$p = \mathsf{P}\{X = c\} = 1 - \int_0^\infty \phi(t)dt =$$
$$= 1 - \frac{C(4 - 6\mu cC + \mu^2c^2C^2 - 2C + 2\mu cC^2)}{2 - 4\mu cC + \mu^2c^2C^2}.$$

Вычисление математического ожидания дает

$$\lambda = cp + \int_0^\infty t\phi(t)dt = c + \frac{2C^3}{\mu(2 - 4\mu c C + \mu^2 c^2 C^2)}.$$

После подстановки $C = e^{-\mu c}$ окончательно получим

$$\lambda = c + \frac{2e^{-3\mu c}}{\mu(2 - 4\mu c e^{-\mu c} + \mu^2 c^2 e^{-2\mu c})}.$$

Проверим, что этот результат согласуется с результатами анализа двух частных случаев, рассмотренных выше. Действительно, при $c = 0$ получаем $\lambda = 1/\mu$. Кроме того, если $\mu \to \infty$, то $\lambda \to c$.

Графики зависимости величины λ от c и μ представлены на рис. 1.

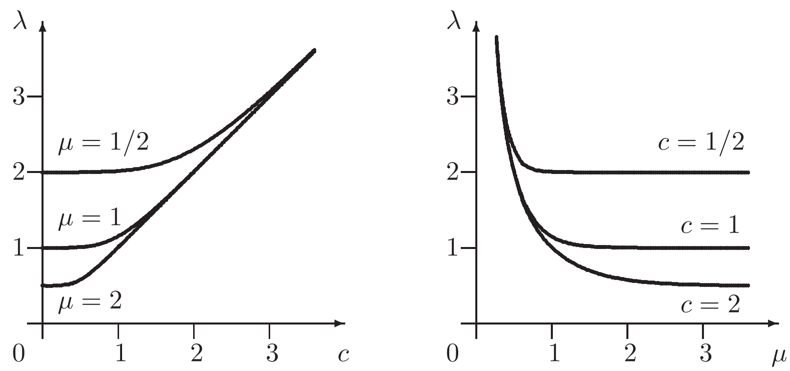

Рис. 1: Зависимость показателя Ляпунова λ от величины c и μ.

В заключение заметим, что при $c = 1/\mu$ имеем

$$\lambda = \frac{C_1}{\mu},$$

где

$$C_1 = 1 + \frac{2e^{-3}}{2 - 4e^{-1} + e^{-2}} \approx 1{,}1500.$$

Список литературы

[1] *Baccelli F., Cohen G., Olsder G.J., Quadrat J.-P.* Synchronization and linearity: An algebra for discrete event systems. — Chichester: Wiley. 1992. 514 p.

[2] *Маслов В.П., Колокольцов В.Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Физматлит. 1994. 144 с.

[3] *Heidergott B., Olsder G.J., van der Woude J.* Max-Plus at work: Modeling and analysis of synchronized systems. — Princeton: Princeton University Press. 2006. 226 p.

[4] *Кривулин Н.К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009. 256 с.

[5] *Olsder G.J., Resing J.A.C., De Vries R.E., Keane M.S., Hooghiemstra G.* Discrete event systems with stochastic processing times // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. Vol. **35**, No. 3. P. 299–302.

[6] *Jean-Marie A.* Analytical computation of Lyapunov exponents in stochastic event graphs // Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems. Solution Methods: Proc. 3rd QMIPS Workshop. Amsterdam: CWI. 1994. P. 309–341. (CWI Tracts, Vol. 106.)

[7] *Кривулин Н.К.* Вычисление показателя Ляпунова для одной модели обобщенной линейной стохастической динамической системы // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 10. Сб. науч. статей / Под ред. М.К. Чиркова. СПб.: ВВМ. 2009. С. 105-110.