Анализ языков, моделируемых конечно-нестационарными недетерминированными автоматами со случайным входом[1]

М. К. Чирков, д. ф.-м. н.,
А. С. Шевченко[2]
Санкт-Петербургский государственный университет
vakh08@mail.ru, annion@yandex.ru

Работа посвящена анализу эквивалентности стационарных стохастических автоматов и обобщенных конечно-нестационарных недетерминированных автоматов со случайным входом, и показано, что они моделируют языки, принадлежащие одному и тому же классу. Доказано, что для любого обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом может быть построен абстрактный стохастический автомат, эквивалентный по представляемому обобщенному вероятностному языку.

Ключевые слова: стохастические автоматы, вероятностные языки, конечно-нестационарные недетерминированные автоматы, моделирование вероятностных языков автоматными моделями со случайным входом.

1. Введение

В общей математической теории детерминированных и стохастических автоматов достаточно подробно исследована специальная автоматная модель, представляющая собой детерминированный автомат с дополнительным "случайным" входом и являющаяся одним из удобных способов моделирования стохастических автоматов и представляемых ими вероятностных языков. Специальные методы такого моделирования стохастического автомата подробно описаны в работах [1–5]. В развитие данных исследований в работах [6, 7] проанализирована возможность моделирования вероятностных языков с помощью стационарных недетерминированных автоматов и показано,что такие автоматы, имеющие дополнительный "случайный" вход, также представляют вероятностные языки. Кроме того, исследована обратная задача — синтез для любого заданного стохастического автомата недетерминированного автомата со случайным входом, эквивалентного исходному автомату по представляемому языку.

Вместе с тем, для автоматного моделирования совокупностей

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00310-а.

нестационарных, одновременно действующих, взаимосвязанных дискретных систем и протекающих в них процессов введена и исследована более сложная нестационарная автоматная модель — обобщенный конечно-нестационарный недетерминированный автомат [8]. Поэтому представляется естественным исследовать некоторые свойства одной из таких принципиально новых нестационарных автоматных моделей — обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом. В данной работе будет проведен необходимый анализ такой новой модели, установлена и доказана ее эквивалентность по представляемому вероятностному языку известным типам стационарных стохастических автоматных моделей.

2. Основные определения

Стохастический (вероятностный) конечный автомат $\mathcal{A}_{pr}$ задается как совокупность $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, Y, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(x_s, y_l)\}\rangle$ входного алфавита X, $|X| = n$, алфавита состояний A, $|A| = m$, и выходного алфавита Y, $|Y| = h$, начального распределения вероятностей состояний $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1})$ и системы $(m \times m)$-матриц вероятностей переходов

$$\mathbf{P}(x_s, y_l) = (P_{ij}(x_s, y_l))_{m,m}, \qquad P_{ij}(x_s, y_l) = P(a_j y_l | a_i x_s),$$

где $a_i, a_j \in A$, $x_s \in X$, $y_l \in Y$.

Детерминированный конечный автомат определяется как совокупность $\mathcal{A}_{det} = \langle X, A, Y, a_0, f, \varphi\rangle$ алфавитов X, A, Y, начального состояния $a_0 \in A$, однозначной функции переходов $f : A \times X \to A$ и однозначной функции выходов, которая в общем случае задается как функция $\varphi : A \times X \to Y$.

Детерминированный автомат со случайным входом $\mathcal{A}_{inp}$ представляет собой детерминированный конечный автомат, имеющий два входных канала, причем входные символы на один из этих каналов подаются с заданными вероятностями от источника случайных символов, и задается как система

$$\mathcal{A}_{inp} = \langle Z \times X, A, Y, a_0, \Psi, \mu\rangle,$$

где $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_{q-1}\}$, $\Psi\colon A \times Z \times X \to A \times Y$, а $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{q-1})$ есть распределение вероятностей воздействия на автомат символов из Z, не зависящее от номера такта, состояния автомата, входных символов из X и выходных из Y.

Если алфавит Y исключить из определения автомата, то в результате получается так называемый *абстрактный детерминированный автомат со случайным входом* $\mathcal{A}_{inp} = \langle Z{\times}X,\, A,\, a_0,\, \Psi,\, \mu\rangle$.

Будем рассматривать алгебраическую систему (булеву решетку) $\mathfrak{D} = (\{0,1\}, \vee, \&, \leq)$, т.е. множество $\{0,1\}$ с логическими операциями дизъюнкции $\vee$ (в дальнейшем условно “сложение”), конъюнкции $\&$ (в дальнейшем условно “умножение”) и обычным упорядочением. Условимся соответственно применять следующие обозначения $\mathfrak{D}^{1,m}$, $\mathfrak{D}^{m,1}$ и $\mathfrak{D}^{m,n}$ для множеств всех m-мерных векторов-строк, векторов-столбцов и всех $(m \times n)$-матриц с элементами из $\{0,1\}$.

Обобщенным стационарным недетерминированным автоматом, заданным над $\mathfrak{D}$, называют систему

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X,\ A,\ Y,\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{D}(x_s, y_l)\},\ \mathbf{q}\rangle, \tag{1}$$

где $\mathbf{r} \in \mathfrak{D}^{1,m}$ — *вектор-строка начальных состояний (начальный вектор)*, $\mathbf{q} \in \mathfrak{D}^{m,1}$ — *вектор-столбец конечных состояний (финальный вектор)* и $\{\mathbf{D}(x_s, y_l)\}$ — совокупность *матриц переходов*, $\mathbf{D}(x_s, y_l) \in \mathfrak{D}^{m,m}$, $x_s \in X$, $y_l \in Y$.

Обобщенным недетерминированным конечным автоматом со случайным входом будем называть систему (рис.1)

$$\mathcal{A}_{snd} = \langle Z \times X,\, A,\, Y,\, \mathbf{r},\, \{\mathbf{D}(z_g,\, x_s,\, y_l)\},\, \mathbf{q},\, \mu\rangle, \tag{2}$$

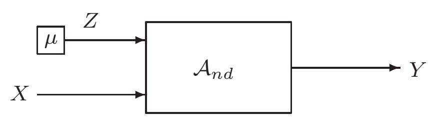

Рис. 1.

представляющую собой недетерминированный автомат, на который одновременно воздействуют пары входных символов из конечного множества $Z \times X$, где $Z = \{z_0,\, z_1, \ldots, z_{q-1}\}$,

$$\{\mathbf{D}(z_g,\, x_s,\, y_l)\} =$$

$$= \{\mathbf{D}(z_g,\, x_s,\, y_l) | \mathbf{D}(z_g,\, x_s,\, y_l) \in \mathfrak{D}^{m,m}, z_g \in Z, x_s \in X, y_l \in Y\}$$

есть совокупность qnh матриц переходов и выходов размера $(m \times \times m)$, и $\mu = (\mu_0,\, \mu_1, \ldots, \mu_{q-1})$ — распределение вероятностей воздействия на автомат различных символов из множества Z в одном такте, не зависящее от номера такта, состояния автомата, входных символов из X и выходных символов из Y. Таким образом, автомат $\mathcal{A}_{snd}$ представляет собой недетерминированный конечный автомат, имеющий два входных канала, причем входные символы на один из них подаются с заданными вероятностями $\mu_g = P(z_g),\ g = \overline{0, q-1}$.

Если алфавит Y можно исключить из определения автомата, то полученный автомат назовем *абстрактным недетерминированным автоматом со случайным входом*

$$\mathcal{A}_{snd} = \langle Z \times X,\, A,\, \mathbf{r},\, \{\mathbf{D}(z_g,\, x_s)\},\, \mathbf{q},\, \mu\rangle, \tag{3}$$

где $\{\mathbf{D}(z_g,\, x_s)\}$ – совокупность nq матриц переходов:

$$\{\mathbf{D}(z_g,\, x_s)\} = \{\mathbf{D}(z_g,\, x_s) | \mathbf{D}(z_g,\, x_s) \in \mathfrak{D}^{m,m},\ \ z_g \in Z,\ \ x_s \in X\}.$$

Элементарной недетерминированной автоматной структурой, заданной над $\mathfrak{D}$, условимся называть систему

$$\mathcal{A}^{(i,j)} = \langle X^{(i,j)},\ A_i,\ A_j,\ Y^{(i,j)},\ \{\mathbf{D}^{(i,j)}(x_s, y_l)\}\rangle, \tag{4}$$

где $X^{(i,j)} \subseteq X$; A_i, A_j, A – алфавиты состояний, $A_i, A_j \subseteq A; |A_i| = m_i, |A_j| = m_j; Y^{(i,j)} \subseteq Y$, и $\{\mathbf{D}^{(i,j)}(x_s, y_l)\}$ — совокупность матриц переходов $\mathbf{D}^{(i,j)}(x_s, y_l) \in \mathfrak{D}^{m_i, m_j}$ из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j, соответствующих парам (x_s, y_l), $x_s \in X^{(i,j)}$, $y_l \in Y^{(i,j)}$.

Элементарной недетерминированной автоматной структурой со случайным входом, заданной над $\mathfrak{D}$, условимся называть систему

$$\mathcal{A}^{(i,j)}_{inp} = \langle Z \times X^{(i,j)},\ A_i,\ A_j,\ Y^{(i,j)},\ \{\mathbf{D}^{(i,j)}(z_g, x_s, y_l)\},\ \mu\rangle, \tag{5}$$

где $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_{q-1}\}$, а $\mu = \{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{q-1}\}$ есть распределение вероятностей воздействия на автоматную структуру символов из Z, и $\{\mathbf{D}^{(i,j)}(z_g, x_s, y_l)\}$ — совокупность матриц переходов $\mathbf{D}^{(i,j)}(z_g, x_s, y_l) \in \mathfrak{D}^{m_i, m_j}$ из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j, соответствующих тройкам (z_g, x_s, y_l), $z_g \in Z$, $x_s \in X^{(i,j)}$, $y_l \in Y^{(i,j)}$.

Пусть задано конечное множество элементарных недетерминированных автоматных структур $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}^{(i,j)}\}$ вида (4), входной алфавит $X = \cup_{(i,j)} X^{(i,j)}$, выходной алфавит $Y = \cup_{(i,j)} Y^{(i,j)}$ и конечное упорядоченное множество финальных векторов-столбцов $Q = \{\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(k)}\}, \mathbf{q}^{(i)} \in \mathfrak{D}^{m_i, 1}, i = \overline{0, k}$, некоторые из которых могут быть “нулевыми”, т. е. не содержать элементов равных 1.

Обобщенным конечно-нестационарным недетерминированным автоматом, заданным над $\mathfrak{D}$, назовем систему

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{nd} = \langle X,\ \mathcal{A},\ Y,\ \mathbf{r},\ \mathcal{G}(G, C, c_0, f),\ Q\rangle, \tag{6}$$

где $\mathcal{G}$ есть *структурный граф автомата* (конечный, ориентированный, нагруженный граф), имеющий:
— конечное множество вершин $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_k\}$, каждой из которых $c_i \in C$, приписан соответствующий алфавит состояний A_i и финальный вектор-столбец (иначе, вектор-столбец конечных состояний) $\mathbf{q}^{(i)} \in Q,\ i = \overline{0, k}$, а также для выделенной *начальной* вершины c_0 с алфавитом состояний A_0 задан вектор-строка начальных состояний $\mathbf{r} \in \mathfrak{D}^{1, m_0}$;
— конечное множество G направленных ребер g_{ij}, соединяющих некоторые вершины графа $c_i, c_j \in C$;
— однозначную функцию $f\ :\ G \to \mathcal{A}$, приписывающую каждому ребру $g_{ij} \in G$ заданную элементарную автоматную структуру $\mathcal{A}^{(i,j)} \in \mathcal{A}$ (4).

Обобщенным конечно-нестационарным недетерминированным автоматом со случайным входом назовем, соответственно, систему (рис. 2)

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{snd} = \langle Z \times X,\ \mathcal{A},\ Y,\ \mathbf{r},\ \mathcal{G}(G, C, c_0, f),\ Q,\ \mu\rangle, \tag{7}$$

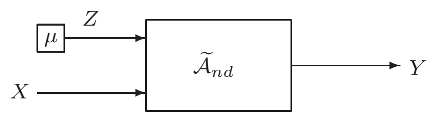

Рис. 2.

где каждому ребру графа G приписывается заданная элементарная автоматная структура со случайным входом $\mathcal{A}^{(i,j)}_{inp}$ (5).

Если же алфавит Y можно исключить из определения автомата, то полученный автомат назовем *абстрактным конечно-нестационарным недетерминированным автоматом со случайным входом*

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{snd} = \langle Z \times X,\ \mathcal{A},\ \mathbf{r},\ \mathcal{G}(G, C, c_0, f),\ Q,\ \mu\rangle. \tag{8}$$

3. Языки, представимые стационарными автоматами $\mathcal{A}_{nd}$ и $\mathcal{A}_{snd}$

Пусть задан обобщенный стационарный недетерминированный автомат $\mathcal{A}_{nd}$ (1). Обозначим (w,v) пару слов длины t в алфавитах X, Y, $w = x_{s_1}x_{s_2}\dots x_{s_t}$, $v = y_{l_1}y_{l_2}\dots y_{l_t}$, и X^*, Y^* — множество всех слов в соответствующих алфавитах. *Обобщенным недетерминированным отображением*, индуцируемым автоматом $\mathcal{A}_{nd}$, называют отображение $\Phi_{nd} : X^* \times Y^* \to \{0,1\}$, определяемое выражением

$$\Phi_{nd}(w,v) = \begin{cases} \mathbf{r}_A \prod\limits_{\tau=1}^{t} \mathbf{D}_A(x_{s_\tau}, y_{l_\tau})\mathbf{q}_A & \text{при } \ w = v = t, \\ 0 & \text{при } \ w \neq v, \end{cases} \tag{9}$$

где $t = 0, 1, 2, \dots$, под сложением и умножением элементов матриц и векторов понимаются операции $\vee$ и $\&$.

В теории обобщенных автоматов, задаваемых над каким-либо частично упорядоченным полукольцом $(R, +, \cdot, \leq)$ [9], *обобщенным языком* (кратко *R-языком*) в алфавите X называют однозначное отображение $Z : X^* \to R$, задаваемое характеристической функцией Φ_Z со значениями $\Phi_Z(w) \in R$, $w \in X^*$. В рассматриваемом нами частном случае полукольца — булевой решетке $\mathfrak{D} = (\{0,1\}, \vee, \&, \leq)$, значения характеристической функции $\Phi_Z(w) \in \{0,1\}, w \in X^*$, задают подмножество слов $Z \subseteq X^*$, т. е. обычно определяемый в теории автоматов "четкий" язык Z в алфавите X.

Пусть для автомата $\mathcal{A}_{nd}$ выделено подмножество $Y^{(K)}$ его выходных символов. Говорят, что *автомат $\mathcal{A}_{nd}$ представляет подмножеством конечных выходных символов $Y^{(K)}$ язык Z*, если для характеристической функции подмножества Z выполняется

$$\Phi_Z(w) = \begin{cases} \bigvee\limits_{v' \in Y^{t-1}} \bigvee\limits_{y_l \in Y^{(K)}} \Phi_{nd}(w, v'y_l), & \text{при } |w| = |v'y_l| = t, \\ 0, & \text{при } |w| \neq |v'y_l|, \end{cases} \tag{10}$$

при всех $w \in X^*, |w| = t = 0, 1, \dots$

Приведем здесь некоторые результаты работы [6]. Пусть задан обобщенный недетерминированный автомат со случайным входом $\mathcal{A}_{snd} = \langle Z \times X,\, A,\, Y,\, \mathbf{r},\, \{\mathbf{D}(z_g,\, x_s,\, y_l)\},\, \mathbf{q},\, \mu\rangle$, и выделено подмножество $Y^{(K)} \subseteq Y$ его выходных символов. Условимся говорить, что обобщенный язык $\mathcal{Z}$, определяемый характеристической функцией $\Phi_{\mathcal{Z}} : X^* \to [0,\,1]$, *представлен в* $\mathcal{A}_{snd}$ *подмножеством* $Y^{(K)}$ (иначе, *представлен недетерминированным автоматом со случайным входом* $\mathcal{A}_{snd}$), если выполняется

$$\Phi_{\mathcal{Z}}(w) = \sum_{y_l \in Y^{(K)}} \mathbf{P}(y_l|w),$$

для всех $w \in X^*$, $|w| = t$, $t = 0,\,1,\,\ldots$, где $\mathbf{P}(y_l|w)$ есть вероятность выдачи автоматом $\mathcal{A}_{snd}$ в последнем такте t символа y_l при входном слове w длины t с учетом μ.

В случае абстрактного недетерминированного автомата со случайным входом $\mathcal{A}_{snd} = \langle Z \times X,\, A,\, \mathbf{r},\, \{\mathbf{D}(z_g,\, x_s),\, \mathbf{q},\, \mu\}\rangle$ обобщенный язык $\mathcal{Z}$, представленный автоматом, определяется характеристической функцией $\Phi_{\mathcal{Z}} : X^* \to [0,\,1]$, где

$$\Phi_{\mathcal{Z}}(w) = \sum_{i} \mathbf{P}(a_i|w) q_i$$

для всех $w \in X^*$, $|w| = y$, $t = 0, 1, \ldots$, где $\mathbf{P}(a_i|w)$ есть вероятность перехода автомата $\mathcal{A}_{snd}$ в последнем такте t в состояние a_i с учетом распределения вероятностей μ, а q_i — i-ый элемент финального вектора $\mathbf{q}$.

4. Отображение, индуцируемое конечно-нестационарным автоматом $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$

Пусть задан обобщенный конечно-нестационарный недетерминированный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ (6). Выделим в его структурном графе $\mathcal{G}$ какую-либо вершину c_i и пусть этой вершине приписан финальный вектор $\mathbf{q}^{(i)} \in Q$. Рассмотрим один из путей Ω_{0i}, ведущий из начальной вершины c_0 в вершину $c_i \in C$ графа и проходящий через вершины $c_{i_0} = c_0,\ c_{i_1}, \ldots, c_{i_t} = c_i$. Выпишем последовательность элементарных автоматных структур, отмечающих ребра, образующие этот путь. Пусть это будут $\mathcal{A}^{(i_0,i_1)}$, $\mathcal{A}^{(i_1,i_2)}$, $\ldots$, $\mathcal{A}^{(i_{t-1},i_t)}$, то есть путь проходит через t отмеченных ребер графа. Рассмотрим любую пару слов $(w, v), w = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t},\, x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1},i_\nu)},\, v = {}$ $= y_{l_1}y_{l_2}\ldots y_{l_t},\, y_{l_\nu} \in Y^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$, одной длины t в алфавитах $X^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$ и $Y^{(i_{\nu-1},i_\nu)}, \nu = \overline{1,t}$. Множество всех пар таких слов назовем *множеством допустимых пар слов для пути* Ω_{0i} и обозначим ${Z_{\text{доп}}}^{(i)}$

(при этом считается что “пустые” слова e, не содержащие ни одной буквы, всегда допустимы, то есть $(e, e) \in Z_{\text{доп}}{}^{(0)}$). *Весом* отображения слова w в слово v, порождаемого путем Ω_{0i} структурного графа $\mathcal{G}$ автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ при заданном $\mathbf{r} \in \mathfrak{D}^{1,m_0}$, назовем величину

$$\Phi_{nd}^{(i)}(w,v) = \begin{cases} \mathbf{r} \prod\limits_{\nu=1}^{t} \mathbf{D}^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(x_{s_\nu}, y_{l_\nu}) \mathbf{q}^{(i_t)} & \text{при } (w,v) \in Z_{\text{доп}}{}^{(i)}, \\ 0 & \text{при } (w,v) \overline{\in} Z_{\text{доп}}{}^{(i)}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь всевозможные вершины структурного графа. Пусть $\widetilde{\Omega}(w,v)$ есть множество всех путей Ω_{0i} в структурном графе из начальной вершины c_0 в какие-либо вершины $c_i \in C$, для которых пара слов (w,v) является допустимой. Множество всех таких пар слов $(w,v) \in X^* \times Y^*$, для которых $\widetilde{\Omega}(w,v)$ не пусто, условимся называть *множеством допустимых для автомата* $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ *пар слов* и обозначать его $Z_{\text{доп}}$.

Обобщенным отображением, индуцируемым автоматом $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ при заданном $\mathbf{r}$, назовем отображение $\Phi_{nd} : X^* \times Y^* \to \{0,1\}$, определяемое выражением

$$\Phi_{nd}(w,v) = \bigvee_{\widetilde{\Omega}(w,v)} \Phi_{nd}^{(i)}(w,v) \qquad (11)$$

где логическое суммирование берется по всем путям (последовательностям вершин $c_{i_0}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_t}$) $\Omega_{0i_t} \in \widetilde{\Omega}(w,v)$.

5. Постановка задачи

Условимся в дальнейшем под эквивалентностью автоматов подразумевать их эквивалентность по представляемому языку, т. е. в общем случае будем говорить, что автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ представляющие, соответственно, языки $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{B}}$, *эквивалентны*, если они представляют один и тот же язык, т. е. $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{B}}$.

В п. 2 определена новая модель — обобщенный конечно-нестационарный недетерминированный автомат со случайным входом (7). Требуется установить и доказать эквивалентность этого автомата и обобщенного стационарного недетерминированного автомата со случайным входом, и далее доказать его эквивалентность стационарному стохастическому автомату. Также требуется предложить алгоритм преобразования обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом в абстрактный стохастический автомат и привести достаточно простой, но подробный, пример такого преобразования.

6. Эквивалентность автоматов

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ (7) может быть построен эквивалентный ему обобщенный стационарный недетерминированный автомат со случайным входом $\mathcal{B}_{snd}$ (2), имеющий $m = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$ состояний.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из теоремы, изложенной в работе [8], для каждого обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ может быть построен эквивалентный ему обобщенный стационарный недетерминированный автомат $\mathcal{A}_{nd}$, имеющий $m = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$ состояний. В случае автомата со случайным входом доказательство в основном аналогично доказательству вышеуказанной теоремы. Пусть задан автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ (7). Произведем следующие преобразования: определим новый алфавит состояний $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m\} = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$, где $|B_i| = |A_i| = m_i$, $i = \overline{0, k}$, и построим автомат

$$\mathcal{B}_{snd} = \langle Z \times X,\, B,\, Y,\, \mathbf{r}_B,\, \{\mathbf{D}_B(z_g,\, x_s,\, y_l)\},\, \mathbf{q}_B,\, \mu \rangle$$

таким образом, что его начальный и финальный вектора имеют вид:

$$\mathbf{r}_B = (\mathbf{r}_A, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-m_0}), \qquad \mathbf{q}_B = ((\mathbf{q}_A^{(0)})^T, (\mathbf{q}_A^{(1)})^T, \dots, (\mathbf{q}_A^{(k)})^T)^T.$$

Определим пустой элемент ε и функцию $\tilde{f}_A$ такую, что

$$\tilde{f}_A : C \times C \to \mathcal{A} \cup \{\varepsilon\}. \tag{12}$$

При этом $\tilde{f}_A(c_i, c_j) = \widehat{\mathcal{A}}^{(i,j)} = \varepsilon$, если в структурном графе $\mathcal{G}_A$ отсутствует ребро g_{ij}, и $\tilde{f}_A(c_i, c_j) = \widehat{\mathcal{A}}^{(i,j)} = f_A(c_i, c_j) = \mathcal{A}^{(i,j)}$, если ребро g_{ij} присутствует, т.е. $g_{ij} \in G$. Структурному графу автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ с учетом (12) соответствует матрица графа (см. табл. 1), где все $\widehat{\mathcal{A}}^{(i,j)} \in \mathcal{A} \cup \{\varepsilon\}$.

Таблица 1. Матрица графа $\mathcal{G}_A$.

$\tilde{f}_A$	c_0	c_1	$\ldots$	c_k
c_0	$\widehat{\mathcal{A}}^{(0,0)}$	$\widehat{\mathcal{A}}^{(0,1)}$	$\ldots$	$\widehat{\mathcal{A}}^{(0,k)}$
c_1	$\widehat{\mathcal{A}}^{(1,0)}$	$\widehat{\mathcal{A}}^{(1,1)}$	$\ldots$	$\widehat{\mathcal{A}}^{(1,k)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
c_k	$\widehat{\mathcal{A}}^{(k,0)}$	$\widehat{\mathcal{A}}^{(k,1)}$	$\ldots$	$\widehat{\mathcal{A}}^{(k,k)}$

Условимся в дальнейшем для удобства обозначать пары входных символов (z_g, x_s) одним символом $\widetilde{x}_{gs}$ (в матрицах $\mathbf{D}_B$ возможно обозначение (g,s,l) вместо, соответственно, (z_g, x_s, y_l)). Теперь, если заменить в табл. 1 все c_i на B_i, $|B_i| = |A_i|$ и, соответственно, каждое $\widehat{\mathcal{A}}^{(i,j)}$ на матрицу переходов $\widehat{\mathbf{D}}_A^{(i,j)}(g,s,l)$, где

$$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(i,j)}(g,s,l) =$$

$$=\begin{cases} \mathbf{D}_A^{(i,j)}(g,s,l), \text{при } \tilde{f}_A(c_i,c_j) = \mathcal{A}^{(i,j)}, x_s \in X^{(i,j)}, y_l \in Y^{(i,j)}, \\ \mathbb{O}, \text{ при } \tilde{f}_A(c_j,c_j) = \mathcal{A}^{(i,j)}, \text{ но } x_s \overline{\in} X^{(i,j)} \ \vee \ y_l \overline{\in} Y^{(i,j)}, \\ \mathbb{O}, \text{ при } \tilde{f}_A(c_i,c_j) = \varepsilon, \end{cases} \qquad (13)$$

то в результате получим следующее представление матриц $\mathbf{D}_B(g,s,l)$ (табл. 2):

Таблица 2. Клеточное представление матриц $\mathbf{D}_B(g,s,l)$.

$\mathbf{D}_B(g,s,l)$	B_0	B_1	$\ldots$	B_k
B_0	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(0,0)}(g,s,l)$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(0,1)}(g,s,l)$	$\ldots$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(0,k)}(g,s,l)$
B_1	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(1,0)}(g,s,l)$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(1,1)}(g,s,l)$	$\ldots$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(1,k)}(g,s,l)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
B_k	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(k,0)}(g,s,l)$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(k,1)}(g,s,l)$	$\ldots$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(k,k)}(g,s,l)$

Докажем теперь эквивалентность автоматов $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ и $\mathcal{B}_{snd}$. При $t = 0$ из (9) и (11) следует, что $\Phi_{snd}(e,e) = \mathbf{r}_B\mathbf{q}_B = \mathbf{r}_A\mathbf{q}_A^{(0)} = \tilde{\Phi}_{snd}(e,e)$. Согласно принятым ранее обозначениям входное слово w выглядит следующим образом: $w = \widetilde{x}_{g_1s_1}\widetilde{x}_{g_2s_2}\ldots\widetilde{x}_{g_ts_t}$. Если $t > 0$ и $w = \widetilde{x}_{g_1s_1}\widetilde{x}_{g_2s_2}\ldots\widetilde{x}_{g_ts_t}$, $v = y_{l_1}y_{l-2}\ldots y_{l_t}$, то из (9), (11), (13) и табл. 2 следует, что

$$\Phi_{snd}(w,v) = \mathbf{r}_B \prod_{\tau=1}^{t} \mathbf{D}_B(g_\tau, s_\tau, l_\tau)\mathbf{q}_B = (\mathbf{r}_A, 0, \ldots, 0)\times$$
$$\times \prod_{\tau=1}^{t} \mathbf{D}_B(g_\tau, s_\tau, l_\tau)(\mathbf{q}_A^{(0)}, \mathbf{q}_A^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}_A^{(k)})^T =$$
$$= \bigvee_{i_1} \ldots \bigvee_{i_t} \mathbf{r}_A \prod_{\tau=1}^{t} \widehat{\mathbf{D}}_A^{(i_{\tau-1}, i_\tau)}(g_\tau, s_\tau, l_\tau)\mathbf{q}_A^{(i_t)} =$$
$$= \begin{cases} \bigvee\limits_{\widetilde{\Omega}(w,v)} \mathbf{r}_A \prod\limits_{\tau=1}^{t} \mathbf{D}_A^{(i_{\tau-1}, i_\tau)}(g_\tau, s_\tau, l_\tau)\mathbf{q}_A^{(i_t)} & \text{при } (w,v) \in Z_{\text{доп}}, \\ 0 & \text{при } (w,v) \overline{\in} Z_{\text{доп}}, \end{cases}$$

т. е. согласно (9), (12) получили, что $\Phi_{snd} = \tilde{\Phi}_{snd}$, а это значит, что автоматы $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ и $\mathcal{B}_{snd}$ при любом выборе $Y^{(\text{K})}$ в соответствии с (10) представляют одинаковые языки, т. е. они эквивалентны. Теорема доказана.

Следствие. *Для каждого абстрактного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ вида (8) может быть построен эквивалентный ему стационарный абстрактный недетерминированный автомат со случайным входом $\mathcal{B}_{snd}$ вида (3), имеющий $m = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$ состояний.*

Данное утверждение непосредственно следует из теоремы 1, поскольку при ее доказательстве из автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ вида (8) получается автомат $\mathcal{B}_{snd}$ вида (3). Воспользуемся теперь одним из результатов работы [6].

Теорема 2.*Для любого обобщенного недетерминированного конечного автомата со случайным входом $\mathcal{A}_{snd}$ вида (2), имеющего $m = |A|$ состояний и $h = |Y|$ выходных символов и представляющего подмножеством $Y^{(K)}$ обобщенный язык $\mathcal{Z}$, может быть построен эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный конечный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr}$, который имеет $\tilde{m} \leq 2^{mh}$ состояний.*

Таким образом, на основе теорем 1, 2 может быть сформулирован один из основных результатов данной работы.

Теорема 3.*Для любого обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ (7), имеющего $h = |Y|$ выходных символов и представляющего подмножеством $Y^{(K)}$ обобщенный язык $\mathcal{Z}$, может быть построен* *эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный конечный стохастический автомат $\mathcal{A}_{pr}$, который имеет $\tilde{m} \leq 2^{hm}$ состояний, где $m = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательств теорем 1, 2 следует возможность последовательного построения:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{snd} \to^{1)} \mathcal{B}_{snd} \to^{2)} \mathcal{A}_{pr}$$

1) по теореме 1 с увеличением количества состояний до $\sum_{i=0}^{k} |A_i|$,

2) по теореме 2 с увеличением количества состояний максимально до 2^{hm}, где $m = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$.

Таким образом приведен процесс синтеза эквивалентного абстрактного стохастического автомата $\mathcal{A}_{pr}$ для любого заданного обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ с увеличением количества состояний максимум до 2^{hm}, где $h = |Y|$, $m = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$. Теорема доказана.

Учитывая, что стационарные автоматы являются частным случаем конечно-нестационарных, а стационарные стохастические автоматы представляют *обобщенные вероятностные языки* [5], то из теоремы 3 следует справедливость следующего общего положения.

Теорема 4.*Для того, чтобы язык был представлен обобщенным конечно-нестационарным недетерминированным автоматом со случайным входом $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ вида (7), необходимо и достаточно, чтобы он был обобщенным вероятностным языком.*

7. Алгоритм

Для синтеза абстрактного стохастического автомата по заданному обобщенному конечно-нестационарному недетерминированному автомату со случайным входом необходимо выполнить следующие действия:

1) Исходный обобщенный конечно-нестационарный недетерминированный автомат со случайным входом $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ преобразовать в обобщенный стационарный недетерминированный автомат со случайным входом $\mathcal{B}_{snd}$ (согласно методу, предложенному в теореме 1);

2) Удалить недостижимые состояния полученного автомата и произвести его минимизацию [10];

3) Полученный обобщенный стационарный недетерминированный автомат со случайным входом преобразовать в абстрактный

стационарный недетеминированный автомат со случайным входом (см. работу [6]);

4) Абстрактный недетерминированный автомат со случайным входом преобразовать в абстрактный детерминированный автомат со случайным входом [6];

5) Для полученного абстрактного детерминированного автомата со случайным входом построить абстрактный стохастический автомат [1-5];

6) Произвести минимизацию полученного абстрактого стохастического автомата известными способами (например, см. [5]).

8. Пример

Пусть задан обобщенный конечно-нестационарный абстрактный недетерминированный автомат со случайным входом $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$ (8), у которого $X^{(i,j)} = X = \{x_0, x_1\}$, $Z^{(i,j)} = Z = \{z_0, z_1\}$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$, $|A_0| = 3$, $|A_1| = |A_2| = 2$, $\mu = (0,3; 0,7)$,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

структурный граф $\mathcal{G}_A$ которого имеет вид

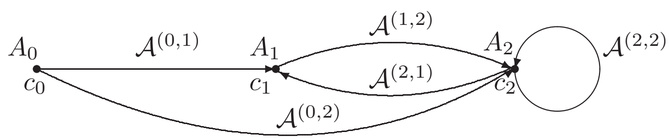

Рис. 3.

а матрицы переходов $\mathbf{D}^{(i,j)}(g,s)$ элементарных автоматных структур, отмечающих ребра графа, следующие:

$$\mathbf{D}^{(0,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(0,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(0,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(0,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(0,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(0,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(0,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(0,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(1,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(1,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(1,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(1,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(2,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(2,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(2,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(2,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(2,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(2,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(2,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(2,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с п. 1) алгоритма построим автомат $\mathcal{B}_{snd}$. Для начального и финального векторов получаем

$$\mathbf{r}_B = (1,0,0,0,0,0,0), \qquad \mathbf{q}_B = (0,1,0,0,1,1,0)^T.$$

По структурному графу строим соответствующую ему матрицу:

$\tilde{f}_A$	c_0	c_1	c_2
c_0	ε	$\mathcal{A}^{(0,1)}$	$\mathcal{A}^{(0,2)}$
c_1	ε	ε	$\mathcal{A}^{(1,2)}$
c_2	ε	$\mathcal{A}^{(2,1)}$	$\mathcal{A}^{(2,2)}$

Далее с помощью табл. 2 строим клеточное представление матриц $\mathbf{D}_B(g,s)$

$\mathbf{D}_B(g,s)$	B_0	B_1	B_2
B_0	$\mathbb{O}$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(0,1)}(g,s)$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(0,2)}(g,s)$
B_1	$\mathbb{O}$	$\mathbb{O}$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(1,2)}(g,s)$
B_2	$\mathbb{O}$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(2,1)}(g,s)$	$\widehat{\mathbf{D}}_A^{(2,2)}(g,s)$

В соответствии с п. 2) алгоритма после удаления недостижимых состояний и проведения минимизации данного автомата известными способами [10], получаем автомат

$$\mathcal{C}_{snd} = \langle Z \times X,\ C,\ \mathbf{r}_C,\ \{\mathbf{D}_C(g,s)\},\ \mathbf{q}_C,\ \mu\rangle,$$

где $C = \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\},\ \mathbf{r}_C = (1,0,0,0,0),\ \mathbf{q}_C = (0,0,1,1,0)^T,\ \mu = (0,3; 0,7)$

$$\mathbf{D}_C(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_C(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_C(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_C(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

который является находящимся в минимальной форме стационарным абстрактным недетерминированным автоматом со случайным входом, эквивалентным исходному автомату $\widetilde{\mathcal{A}}_{snd}$.

Далее согласно п. 4) преобразуем полученный автомат в абстрактный детерминированный автомат со случайным входом:

$$\mathcal{A}_{inp} = \langle Z \times X,\, C,\, c_0,\, \Psi,\ \mu\rangle$$

Ψ	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
$\tilde{x}_{00}$	c_1	c_7	c_2	c_5	c_6	c_6	c_9	c_7	c_6	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_6	c_5
$\tilde{x}_{01}$	c_2	c_3	c_3	c_8	c_5	c_9	c_{11}	c_7	c_9	c_{12}	c_{13}	c_{12}	c_{12}	c_9	c_{11}
$\tilde{x}_{10}$	c_5	c_4	c_7	c_3	c_1	c_5	c_3	c_7	c_1	c_9	c_{14}	c_{14}	c_9	c_5	c_{10}
$\tilde{x}_{11}$	c_4	c_4	c_3	c_6	c_3	c_{10}	c_6	c_7	c_3	c_{11}	c_6	c_6	c_{11}	c_{10}	c_{11}

Затем полученный автомат согласно п. 5) преобразуем в стационарный стохастический абстрактный автомат

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X,\, A,\ \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(x_s)\}, \mathbf{e}^{(K)}\rangle,$$

где $\mathbf{p} = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$,
$\mathbf{e}^{(K)} = (0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1)^T$ и

$$
\mathbf{P}(x_0) = \begin{pmatrix}
0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{P}(x_1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Полученный автомат $\mathcal{A}_{pr}$ имеет 15 состояний ($15 < 2^7 = 128$) и эквивалентен по представляемому обобщенному вероятностному языку исходному конечно-нестационарному абстрактному недетерминированному автомату со случайным входом.

Список литературы

[1] *Ченцов В.М.* Синтез стохастического автомата // Проблемы синтеза цифровых автоматов. М.: Наука. 1967. С. 135–144.

[2] *Чирков М.К., Шилкевич Т.П.* О реализуемости вероятностных автоматов автоматами со случайным входом // Методы вычислений. Вып. 6. Л.: изд. ЛГУ. 1970. С. 127–136.

[3] *Чирков М.К.* Основы общей теории конечных автоматов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1975. 280 с.

[4] *Бухараев Р.Г.* Основы теории вероятностных автоматов. М., 1985. 288 с.

[5] *Пономарева А.Ю., Чирков М.К.* Стационарные детерминированные и вероятностные автоматы (Теория автоматных моделей). СПб.: изд. СПбГУ. 2008. 248 с.

[6] *Чирков М.К., Шевченко А.С.* О языках, представимых обобщенными недетерминированными автоматами со случайным входом // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 8. СПб.: изд. "Золотое сечение". 2007. С. 110–124.

[7] *Чирков М.К., Шевченко А.С.* О синтезе недетерминированных автоматов со случайным входом // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 9. СПб.: ВВМ. 2008. С. 112–125.

[8] *Мбайтар Ж-Б., Чирков М.К.* Абстрактный анализ конечно-нестационарных недетерминированных автоматов // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 8. СПб.: изд. "Золотое сечение". 2007. С. 34–46.

[9] *Чирков М.К., Кабаве М.* Абстрактный анализ обобщенных конечных автоматов // Теория и приложения дискретных систем. СПБ.: изд. СПБГУ. 1995. С. 3–36.

[10] *Пономарева А.Ю., Сандрыкина Н.В., Чирков М.К.* Оптимизация абстрактной структуры недетерминированных автоматов // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 3. СПб.: НИИХ СПбГУ. 2003. С. 94–102.