Внешняя оценка множества достижимости линейной динамической системы[1]

М. В. Хлебников, д. ф.-м. н.
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
mkhlebnikov2008@yandex.ru

Предложена внешняя оценка множества достижимости линейной динамической системы в виде пересечения инвариантных эллипсоидов, число которых не превосходит размерности системы. Найдены явные соотношения для определения соответствующих эллипсоидов. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: линейная динамическая система, множество достижимости, инвариантный эллипсоид, линейные матричные неравенства.

1. Введение

Среди классических задач теории автоматического управления заметное место занимает оптимальное подавление влияния неслучайных внешних возмущений на поведение линейной системы. Эта задача имеет множество и различных формулировок, и подходов к ее решению; см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В простейшей постановке эта задача заключается в построении линейной обратной связи по состоянию, минимизирующей размер *множества достижимости* $\mathcal{R}$ замкнутой системы, состоящего из всех точек фазового пространства, в которые система может перейти из начала координат под воздействием внешних возмущений.

Наиболее интересным с точки зрения приложений представляется ситуация, когда внешние возмущения ограничены в каждый момент времени в некоторой норме; при этом говорят об l_∞-ограниченных возмущениях. Точная характеризация множества достижимости в такой задаче трудна или невозможна, поэтому на практике используются различные техники построения внешних аппроксимаций этого множества, см. [2]. Один из самых простых, наглядных и в то же время эффективных методов исходит из эллипсоидальных аппроксимаций [7] (см. также [8]).

[1]©М. В. Хлебников, 2016

Одно из направлений развития этого подхода связано с работами [3,1,5] и состоит в построении общей квадратичной функции Ляпунова для замкнутой системы, подверженной воздействию неслучайных ограниченных внешних возмущений. Эта конструкция приводит к т. н. *инвариантному эллипсоиду*, обладающему следующим свойством: траектория системы, начавшись в любой точке эллипсоида, не покидает его при любом допустимом внешнем возмущении. Естественным и удобным техническим средством реализации такого подхода является техника линейных матричных неравенств (LMI) [3].

В работах [9, 10, 11] и др. был предложен регулярный подход к построению инвариантного эллипсоида $\mathcal{E}$ для линейной системы при произвольных ограниченных внешних возмущениях. Понятно, что, поскольку достижимое множество $\mathcal{R}$ системы минимально по включению среди всех инвариантных множеств, то для любого инвариантного эллипсоида (даже минимального по какому-либо критерию) имеет место вложение $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$, однако качество такой аппроксимации может быть весьма плохим [12].

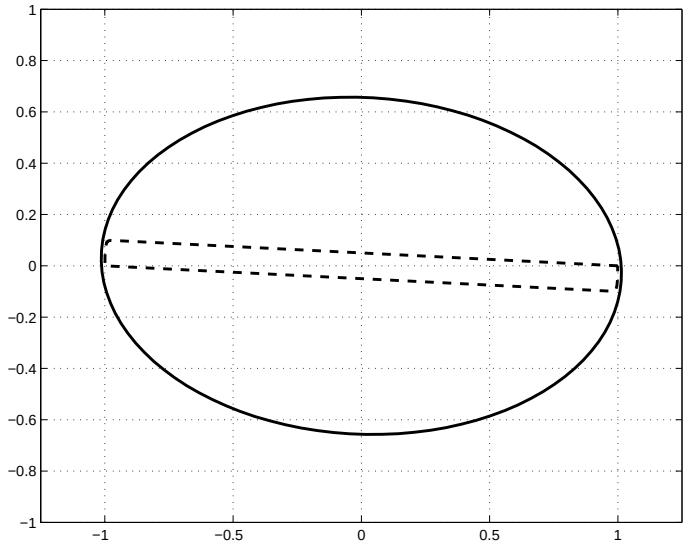

Рис. 1: Достижимое множество и минимальный инвариантный эллипс.

Так, на рис. 1 показано достижимое множество и минимальный (по критерию суммы квадратов полуосей) инвариантный эллипс для устойчивой системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -20 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

с ограниченным внешним возмущением $\|w\|_\infty \leqslant 1$. Как видно, качество эллипсоидальной оценки невысоко.

В настоящей работе предлагается использовать в качестве внешней оценки достижимого множества линейной динамической системы не инвариантный эллипсоид, пусть даже минимальный по некоторому критерию, а инвариантное множество, образованное пересечением инвариантных эллипсоидов (число которых не превышает размерности системы).

Далее мы ограничимся задачей анализа, однако предлагаемый подход может быть распространен и на задачи синтеза управления, и на другие постановки задач.

2. Постановка задачи и предварительные сведения

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, с фазовым состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:[2]

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2}$$

Подчеркнем, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим.

[2] Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, $^\top$ — символ транспонирования, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Будем полагать, что система (1) устойчива (матрица A гурвицева), пара (A, D) управляема.

Дадим определение инвариантного эллипсоида.

О п р е д е л е н и е 1. *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\}, \quad P \succ 0, \tag{3}$$

будем называть инвариантным для системы (1)*, если из условия* $x(0) \in \mathcal{E}$ *следует* $x(t) \in \mathcal{E}$ *для всех моментов времени* $t > 0$ *и всех допустимых возмущений* (2).

Напомним следующий результат.

Т е о р е м а 1 ([3, 5])**.** *Эллипсоид вида* (3) *является инвариантным для динамической системы* (1), (2) *тогда и только тогда, когда его матрица* P *удовлетворяет линейным матричным неравенствам*

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0, \tag{4}$$

при некотором $\alpha > 0$.

Среди инвариантных эллипсоидов, определяемых матрицами семейства (4), выбирается минимальный в том или ином смысле. Как правило, в качестве критерия минимальности выбирается критерий следа (при котором размер эллипсоида характеризуется величиной суммы квадратов длин его полуосей; при задании эллипсоида в виде (3) сумма квадратов длин его полуосей равна $\operatorname{tr} P$) или критерий объема: при представлении эллипсоида в виде (3) его объем равен $c_n \sqrt{\det P}$, где c_n — объем единичного шара в n-мерном пространстве.

Далее, нетрудно видеть (см. подробнее [5]), что если $P \succ 0$ удовлетворяет матричному неравенству (4), то справедлива оценка

$$P \succcurlyeq P_-;$$

где $P_- \succ 0$ — решение соответствующего матричного уравнения

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top = 0,$$

где $0 < \alpha < -2 \max\limits_i \mathcal{R}\rceil \lambda_i(A)$. Семейство решений этого матричного уравнения на указанном интервале варьирования параметра α и будет рассматриваться в дальнейшем.

3. Основной результат

Итак, рассмотрим параметрическое матричное уравнение

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top = 0, \quad \alpha \in \big(0,\, -2 \max_i \mathcal{R}\rceil \lambda_i(A)\big). \tag{5}$$

При каждом допустимом α оно представляет собой уравнение Ляпунова, имеющее единственное положительно-определенное решение $P = P(\alpha)$.

Нашей задачей является нахождение набора допустимых значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leqslant n$, таких, что решения соответствующих уравнений Ляпунова образуют инвариантное множество

$$\mathcal{P} = \bigcap_k P(\alpha_k), \tag{6}$$

минимальное по некоторому критерию.

В следующих разделах отдельно рассматриваются случаи вещественных и комплексно-сопряженных собственных значений матрицы A и устанавливаются значения параметра α, соответствующие инвариантным эллипсоидам, образующим пересечение (6).

3.1. Вещественные собственные значения

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное значение матрицы $A^\top$ такое, что

$$\lambda < 0,$$

а v — соответствующий собственный вектор:

$$A^\top v = \lambda v.$$

Домножим матричное равенство (5) слева на вектор $v^\top$ и справа на вектор v:

$$v^\top (AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top) v = 0$$

или

$$(2\lambda+\alpha)v^\top Pv+\frac{1}{\alpha}v^\top DD^\top v=0,$$

откуда

$$v^\top Pv=-\frac{1}{\alpha(2\lambda+\alpha)}\|D^\top v\|^2. \tag{7}$$

Левая часть соотношения (7) представляет собой квадрат проекции инвариантного эллипсоида с матрицей P на направление v. Минимизируя правую часть (7) по α, приходим к задаче

$$-\frac{1}{\alpha(2\lambda+\alpha)}\longrightarrow\min_{0<\alpha\leqslant-2\max_i\mathcal{R}\rceil\lambda_i(A)},$$

решением которой является

$$\alpha^*=\min\{-\lambda,-2\max_i\mathcal{R}\rceil\lambda_i(A)\}.$$

При найденном значении параметра α достигается минимальная проекция инвариантного эллипсоида из семейства (5) на направление v:

$$\sqrt{v^\top Pv}=\sqrt{-\frac{1}{\alpha^*(2\lambda+\alpha^*)}}\|D^\top v\|.$$

Полученный результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть матрица A системы* (1) *имеет вещественное собственное значение $\lambda<0$. Тогда инвариантный эллипсоид из семейства* (5) *при*

$$\alpha^*=\min\{-\lambda,-2\max_i\mathcal{R}\rceil\lambda_i(A)\}$$

обладает минимальной проекцией на направление, определяемое соответствующим собственным вектором матрицы $A^\top$.

Обратим внимание, что мы будем считать допустимым значение параметра α, лежащее на правом конце допустимого интервала. В этом случае, если “самое правое” собственное число $\widetilde{\lambda}$ матрицы A

является вещественным, то получающийся инвариантный эллипсоид будет обладать бесконечно большой полуосью по направлению соответствующего собственного вектора $\widetilde{v}$.

В самом деле, согласно (5) имеем

$$\lim_{\alpha\to-2\widetilde{\lambda}-0} \widetilde{v}^\top P(\alpha)\widetilde{v} = \lim_{\alpha\to-2\widetilde{\lambda}-0} \frac{-1}{\alpha(2\widetilde{\lambda}+\alpha)}\|D^\top\widetilde{v}\|^2 = +\infty.$$

3.2. Комплексно-сопряженные собственные значения

Пусть теперь среди собственных значений матрицы $A^\top$ есть пара

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm j\mu, \quad \gamma < 0, \quad \mu > 0,$$

а соответствующие собственные векторы матрицы $A^\top$ имеют вид

$$v_{1,2} = r \pm jq.$$

Домножим равенство (5) слева на $r^\top$ и справа на r:

$$r^\top(AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top)r = 0$$

или

$$-(2\gamma+\alpha)r^\top Pr + 2\mu r^\top Pq = \frac{1}{\alpha}\|D^\top r\|^2. \tag{8}$$

Аналогично, домножив (5) слева на $q^\top$ и справа на q, приходим к соотношению

$$-(2\gamma+\alpha)q^\top Pq - 2\mu r^\top Pq = \frac{1}{\alpha}\|D^\top q\|^2. \tag{9}$$

Рассмотрим линейную комбинацию соотношений (8) и (9) с коэффициентами 1 и ε таким, что результирующее соотношение будет имеет вид

$$(ar+bq)^\top P(ar+bq) = \frac{1}{\alpha}\big(\|D^\top r\|^2 + \varepsilon\|D^\top q\|^2\big), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

При этом

$$a^2 = -(2\gamma+\alpha), \quad b^2 = -\varepsilon(2\gamma+\alpha), \quad ab = -\mu(\varepsilon-1),$$

откуда

$$\varepsilon > 0, \quad a = \sqrt{-(2\gamma+\alpha)}, \quad b = \pm\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-(2\gamma+\alpha)},$$

в результате чего приходим к квадратным (относительно $\sqrt{\varepsilon}$) уравнениям

$$\varepsilon \pm \frac{2\gamma+\alpha}{\mu}\sqrt{\varepsilon} - 1 = 0,$$

каждое из которых имеет один положительный корень

$$\varepsilon_{1,2}(\alpha) = \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma+\alpha/2}{\mu}\right)^2 + 1} \pm \frac{\gamma+\alpha/2}{\mu}\right)^2. \tag{11}$$

Окончательно, соотношение (10) принимает вид

$$\left(r \pm \sqrt{\varepsilon_{1,2}(\alpha)}q\right)^\top P\left(r \pm \sqrt{\varepsilon_{1,2}(\alpha)}q\right) = \\ = -\frac{1}{\alpha(2\gamma+\alpha)}(\|D^\top r\|^2 + \varepsilon_{1,2}(\alpha)\|D^\top q\|^2).$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть матрица A системы* (1) *имеет комплексно-сопряженную пару собственных значений $\gamma \pm j\mu$, $\gamma < 0$, $\mu > 0$. Тогда инвариантные эллипсоиды из семейства* (5) *при*

$$\alpha_{1,2} = \arg \min_{0<\alpha\leqslant -2\max_i \mathcal{R}\rceil\lambda_i(A)} \frac{-1}{\alpha(2\gamma+\alpha)}(\|D^\top r\|^2 + \varepsilon_{1,2}(\alpha)\|D^\top q\|^2), \tag{12}$$

где $\varepsilon_{1,2}(\alpha)$ определяются соотношениями (11), *а $r \pm jq$ — собственные векторы матрицы $A^\top$, обладают минимальными проекциями на направления $r + \sqrt{\varepsilon_1(\alpha_1)}q$ и $r - \sqrt{\varepsilon_2(\alpha_2)}q$.*

Непосредственным дифференцированием легко убедиться в том, что задачи (12) одномерной минимизации являются выпуклыми, поэтому нахождение значений α_1 и α_2 не сопряжено с большими вычислительными трудностями.

4. Пример

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w, \quad \|w\|_\infty \leqslant 1.$$

Здесь

$$\lambda_1 = -0{,}2679, \quad \lambda_2 = -3{,}7321,$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8069 \\ 0{,}5907 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0{,}3437 \\ 0{,}9391 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 пунктирной линией показан инвариантный эллипс, минимальный по критерию объема. Сплошными линиями показаны

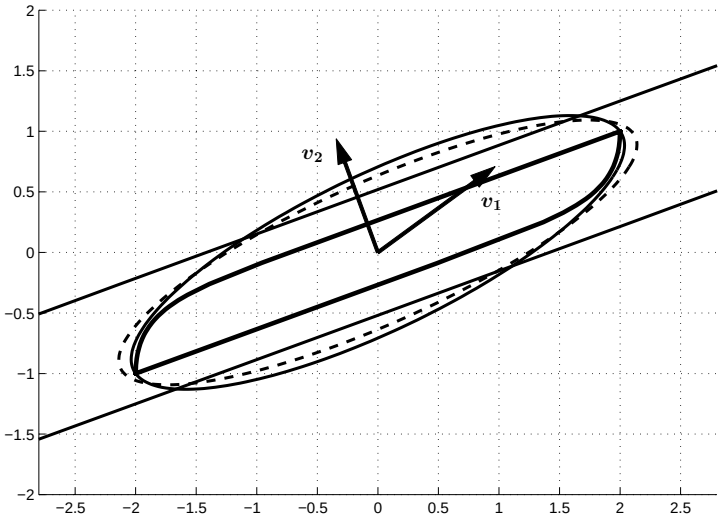

Рис. 2: Инвариантные эллипсы и область достижимости.

инвариантные эллипсы с минимальными проекциями на направления собственных векторов; один из них представляет собой полосу. Стрелками показаны направления собственных векторов v_1 и v_2 матрицы A. Наконец, на рисунке показано достижимое множество рассматриваемой системы (жирная линия).

Как видно, инвариантное множество, образованное пересечением найденных эллипсов, дает заметно менее консервативную оценку множества достижимости системы.

5. Заключение

Предложенный подход к получению внешней выпуклой оценки области достижимости линейной системы опирается на метод инвариантных эллипсоидов и технику линейных матричных неравенств. Он позволяет получать существенное менее консервативные оценки, чем с помощью одного (даже оптимального по тому или иному критерию) инвариантного эллипсоида и может быть распространен на задачи синтеза управления в форме статической линейной обратной связи, на системы в дискретном времени, а также на различные робастные постановки задач.

Список литературы

[1] *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1996. No. 6. P. 899–927.

[2] *Blanchini F., Miani S.* Set-Theoretic Methods in Control. Boston: Birkhäuser, 2008.

[3] *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

[4] *Dahleh M.A., Diaz-Bobillo I.J.* Control of Uncertain Systems. A Linear Programming Approach. NJ: Prentice Hall, 1995.

[5] *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

[6] *Vidyasagar M.* Optimal rejection of persistent bounded disturbances // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. 31. No. 6. P. 527–534.

[7] *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.

[8] *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.

[9] *Polyak B.T., Nazin A.V., Topunov M.V., Nazin S.A.* Rejection of bounded disturbances via invariant ellipsoids technique // Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA, December 13–15, 2006. P. 1429–1434.

[10] *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. №3. С. 106–125.

[11] *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. 2011. №11. С. 9–59.

[12] *Venkatesh S., Dahleh M.* Does star norm capture l_1 Norm? // Proc. American Control Conference (ACC'95). Seattle, USA, June 21–23, 1995. P. 944–945.