

© 2011 г. О. Н. Граничин, д-р физ.-мат. наук  
(Санкт-Петербургский государственный университет)

## **НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ**

Рассматривается задача построения доверительных множеств для параметров передаточной функции объекта управления (ОУ) на основе наблюдаемых данных. Предположения о возмущениях (помехах), влияющих на ОУ, сводятся к минимуму: помехи фактически могут быть произвольными, но взамен пользователь должен иметь возможность добавлять к входному сигналу независимое от них пробное возмущение. Предлагается и обосновывается процедура решения этой проблемы, разработанная в рамках общей схемы “исключение областей знакодминирующих корреляций” (LSCR, Leave-out Sign-dominant Correlation Regions), активно продвигаемой в современных работах Марко Кампи с соавторами, и использующая предложенный ранее автором подход к перепараметризации ОУ. Процедура возвращает доверительную область, которая для конечного множества наблюдений с выбранной пользователем вероятностью содержит параметры истинной передаточной функции.

## НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ

Рассматривается задача построения доверительных множеств для параметров передаточной функции объекта управления (ОУ) на основе наблюдаемых данных. Предположения о возмущениях (помехах), влияющих на ОУ, сводятся к минимуму: помехи фактически могут быть произвольными, но взамен пользователь должен иметь возможность добавлять к входному сигналу независимое от них пробное возмущение. Предлагается и обосновывается процедура решения этой проблемы, разработанная в рамках общей схемы “исключение областей знакодоминирующих корреляций” (LSCR, Leave-out Sign-dominant Correlation Regions), активно продвигаемой в современных работах Марко Кампи с соавторами, и использующая предложенный ранее автором подход к перепараметризации ОУ. Процедура возвращает доверительную область, которая для конечного множества наблюдений с выбранной пользователем вероятностью содержит параметры истинной передаточной функции.

### 1. Введение

Любая модель никогда не бывает совершенным описанием реальной системы. Очень важно определить для неопределенностей в модели те пределы, при которых моделью еще можно пользоваться. Проблема анализа качества моделей является, возможно, одной из центральных в идентификации систем [1, 2].

Сложность проблемы идентификации часто обусловлена недостаточной вариативностью входного сигнала. В системах управления возможность подачи на вход объекта управления (ОУ) специальных управляющих (пробных, тестовых) сигналов может существенно облегчить проблему восстановления неизвестных параметров ОУ. Так, например, если на вход линейного устойчивого стационарного ОУ подать гармонический

сигнал, то после окончания переходного процесса выход ОУ будет также гармоническим сигналом (предполагается, что помехи отсутствуют). Амплитуда этого сигнала пропорциональна значению передаточной функции ОУ на частоте гармонического сигнала. Изменяя частоту, можно построить передаточную функцию ОУ, т. е., по существу, идентифицировать его. Аналогично этому подача входных воздействий в виде единичных скачков позволяет восстановить импульсную функцию ОУ.

Использование специальных пробных сигналов в качестве управляющих позволяет осуществить идентификацию ОУ и при аддитивно действующей на него помехе. При этом помеха может не обладать какими-либо полезными стохастическими свойствами и вообще не быть случайной. Восстановление неизвестных значений параметров обеспечивается свойствами пробного сигнала, который добавляется к собственно управляющему воздействию. Этот подход близок понятию *дуального (двойственного) управления* А.А. Фельдбаума [3]: *“управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими”*.

В этой статье рассматривается задача о построении по конечному числу наблюдений области доверия для параметров линейной динамической системы, на динамику которой влияют произвольные помехи [4–6]. Для решения задачи используется процедура “исключение областей знаков доминирующих корреляций” (LSCR, Leave-out Sign-dominant Correlation Regions), активно продвигаемая в современных работах Марко Кампи с соавторами [7–9]. Но постановка задачи идентификации в контексте адаптивного управления при почти произвольных помехах имеет существенные трудности для непосредственного применения метода LSCR. В частности, предлагаемый в [7] (см. замечание 3 на с. 2711) способ использования метода LSCR в системах с обратной связью применим только для выбранного априори постоянного закона управления. Для практического использования методов идентификации для динамических объектов дополнительно, естественно, выдвигают требование о стабилизируемости обратной связи. Если оно нарушается, то при существенном росте выходных и управляющих переменных линейная модель невалидна с практической точки зрения и получающиеся решения задачи идентификации могут не иметь непосредственного отношения к исходной по-

становке. Прямое распространение метода из [7] на случай регуляторов с подстраиваемыми коэффициентами приводит к нарушению одного из основных условий применимости метода LSCR. Основной вклад этой статьи по сравнению с результатами работы [7] заключается в использовании специальной параметризации для описания множества параметров ОУ, открывающей возможности использования метода LSCR для класса произвольных обратных связей (в частности, для регуляторов с подстраиваемыми коэффициентами). Ранее такой же метод перепараметризации ОУ был описан в [4, 10–12]. Представленная в работе процедура может быть применена, и описанные результаты справедливы для любого конечного числа данных наблюдения.

В [7] рассматривается динамическая система

$$(1) \quad y_t = G^0(z^{-1})u_t + v_t,$$

как на рис. 1, с входами  $u_t$  и выходами  $y_t$ . Помехи  $v_t$  описывают все другие источники кроме  $u_t$ , влияющие на  $y_t$ , и предполагается их независимость от  $u_t$ .  $z^{-1}$  — оператор сдвига на такт назад:  $z^{-1}u_t = u_{t-1}$ . Передаточная функция  $G^0(z^{-1})$  принадлежит некоторому множеству передаточных функций  $G(\theta, z^{-1})$ , параметризованному  $\theta$ , т. е.  $G^0(z^{-1}) = G(\theta^0, z^{-1})$  для некоторого  $\theta^0$ . Структура класса моделей  $G(\theta, z^{-1})$  известна, но сам набор  $\theta^0$  неизвестен. Постановка задачи состоит в том, чтобы, используя конечное число данных о входах и выходах, собранных в моменты времени  $t = 1, 2, \dots, N$ , определить доверительную область  $\hat{\Theta}$ , которой с задаваемой пользователем вероятностью принадлежит  $\theta^0$ , и, более того, область  $\hat{\Theta}$  должна быть сконструирована без каких-либо априорных знаний об уровне, распределении или корреляциях помех.

Для решения близких к этой задач в публикациях, кроме процедуры LSCR, широко используются и другие подходы.

Стандартный подход к получению доверительных областей состоит в применении *асимптотической теории* идентификации систем (см., например, [13, 14]). Хотя такие результаты с успехом используются во многих приложениях, асимптотические оценки чего-либо гарантируют только, когда количество данных  $N$  стремится к бесконечности. Асимптотические теории могут порождать ошибочные результаты даже для больших наборов данных (см., например, [13, 14]), а при скудных набо-

рах данных асимптотическая теория теряет актуальность.

При *идентификации множества принадлежности* (*Set Membership Identification*) предполагается ограниченность известными константами всех системных компонент, которые не описываются  $G^0(z^{-1})$ . В результате гарантированная область параметров определяется как множество значений, которые не нарушают априорные границы [15–20].

Основная идея *бутстрап-методов* (*Bootstrap*), используемых при идентификации систем (см., например, [21–23], состоит в том, что если конечный набор эмпирических ошибок предсказания является хорошей репрезентативной выборкой помехи, то можно, моделируя новые данные в соответствии с полученной эмпирической функцией распределения, получить достаточное количество информации для применения асимптотических методов. В задачах с обратной связью (а тем более адаптивного управления) обоснованность предположения о какой-либо репрезентативности конечной выборки ошибок выглядит весьма сомнительно. Особенно в рассматриваемом в этой статье случае, когда помехи могут вообще не иметь функции распределения в теоретико-вероятностном смысле.

В [4, 5] в *условиях ограниченных, а в остальном произвольных помех* (*unknown but bounded*) при формировании алгоритма идентификации использовалась рандомизация, что позволяло асимптотически получать сколь угодно малые доверительные множества, при этом информация о возможном уровне помех использовалась только при выводе оценок скорости сходимости, т. е. в самих алгоритмах идентификации их можно было не использовать. Другой способ формирования робастной стратегии управления при неизвестных верхних границах ограничений представлен в [6].

В [9] было показано, что при конечном числе наблюдений методология LSCR в состоянии выработать доверительную область без априорных предположений об уровне шума. Детальный анализ формулировок и доказательств этой работы показал ненужность традиционного предположения о независимости и центрированности помех, о чем автор настоящей статьи и рассказал авторам [9]. После долгих проверок они и написали в [7, 8] о том, что подход LSCR обладает следующими свойствами:

- процедура работает для любых помех  $v_t$  и не требует априорного

знания их характеристик, помехи могут быть белошумными или коррелированными, с нулевым средним или смещенные, уровень сигнал-шум может быть высоким или низким;

- для любого размера  $N$  выборки данных искомый набор параметров  $\theta^0$  принадлежит получающейся доверительной области  $\hat{\Theta}$  с гарантированной вероятностью, задаваемой пользователем;

- $\hat{\Theta}$  сжимается вокруг  $\theta^0$  при росте  $N$ .

Первое свойство является наиболее важным, поскольку характеристики помех фактически не известны на практике. Так,  $v_t$  может описывать, например, внешнее влияние других систем, помехи измерений и т. п., часто даже трудно понять и перечислить все внешние влияния.

Близкие подходы к оцениванию параметров линейных моделей при нестандартных предположениях о помехах рассматривались и в [24].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дан иллюстрирующий предварительный пример. В разделе 3 дана формальная постановка задачи. В разделе 4 приведен способ генерации управлений. В разделе 5 описывается способ перепараметризации передаточной функции и описаны основные предположения. В разделе 6 формулируется алгоритм построения доверительного множества. Основной теоретический результат работы сформулирован и обоснован в разделе 7. Пример имитационного моделирования показан в разделе 8. В заключении подведены итоги и сделаны основные выводы.

## 2. Предварительный пример

Следуя логике [7], рассмотрим для предварительной иллюстрации основных идей метода LSCR простой пример ОУ, описываемого уравнением

$$(2) \quad y_t + a^0 y_{t-1} = b^0 u_{t-1} + v_t, \quad y_0 = 0, \quad t = 1, \dots, N,$$

где  $t$  — время,  $N = 15$ ,  $a^0 = 2, 5$ , а  $b^0$  неизвестно. О помехах  $v_t$  нет никакой информации кроме того, что они не зависят от  $u_t$ . Цель заключается в построении по наблюдениям входов и выходов доверительного интервала  $\hat{\Theta}$ , который с вероятностью 80 % содержит неизвестный параметр  $\theta^0 = b^0$ .

Заметим, что у такой задачи с любой достоверностью до 100 % есть всегда тривиальное (бессмысленное) решение — вся числовая ось. Желательно было бы построить такие алгоритмы оценивания и генерации  $N = 15$  входных данных  $u_0, \dots, u_{14}$ , чтобы получающиеся доверительные интервалы  $\hat{\Theta}$  наиболее точно характеризовали  $b^0$ . Например, в том смысле, чтобы в пределе при  $N \rightarrow \infty$  множества  $\hat{\Theta}$  “стягивались” в точку  $b^0$ . Эта постановка дополнительно рассматривалась в [7], но в этой статье ограничимся только ссылкой на возможность получения таких результатов.

В рассматриваемом примере передаточная функция равна

$$G^0(z^{-1}) = \frac{b^0 z^{-1}}{1 + 2,5z^{-1}}.$$

Решение. Сгенерируем последовательность независимых одинаково распределенных случайных (i.i.d.) величин  $\Delta_t$ ,  $t = 0, \dots, 14$ , называемых далее пробными (рандомизированными) возмущениями, принимающих значения  $\pm 1$  с равной вероятностью  $\frac{1}{2}$ , и, положив

$$u_t = \Delta_t, \quad t = 0, \dots, 14,$$

получим соответствующие значения выходов  $y_t$ ,  $t = 1, \dots, 15$ .

Варьируя параметр  $b$ , можно записать предсказатель

$$\hat{y}_t(b) = bu_{t-1} - 2,5y_{t-1}$$

и ошибку предсказания

$$\epsilon_t(b) = y_t - \hat{y}_t(b)$$

как функции от  $b$ .

Используя наблюдаемые данные  $\Delta_0, \dots, \Delta_{14}, y_0, \dots, y_{15}$ , для  $t = 1, \dots, 15$  выпишем ошибки предсказания  $\epsilon_t(b) = y_t + 2,5y_{t-1} - bu_{t-1}$  как линейные функции от  $b$  и обозначим

$$f_t(b) = \Delta_{t-1}\epsilon_t(b) = (\Delta_{t-1}(y_t + 2,5y_{t-1})) - (\Delta_{t-1}u_{t-1})b.$$

С помощью  $f_t(b)$  хочется вычислить эмпирические оценки корреляций  $E[\Delta_{t-1}\epsilon_t(b)]$ . (Здесь и далее  $E[\cdot]$  — символ математического ожидания.)

Заметим, что

$$E[\Delta_{t-1}\epsilon_t(b)] = (b^0 - b)E[\Delta_{t-1}^2] + E[\Delta_{t-1}v_t] = (b^0 - b).$$

Основываясь на этом факте, подсчитаем несколько эмпирических оценок корреляции, используя различные подмножества доступных данных, и исключим из рассмотрения те области возможных значений параметра  $b$ , в которых эмпирические оценки принимают слишком часто только положительные (или только отрицательные) значения.

Для построения доверительного интервала, который с вероятностью не менее 80 % содержит  $b^0$ , следуя [7], выберем  $q = 2$  и  $M = 20$  так, что  $1 - 2q/M = 0,8$ . Далее, выбирая случайным образом  $19 = M - 1$  подмножеств данных, вычислим эмпирические оценки

$$g_i(b) = \sum_{t=1}^{15} h_{i,t} \cdot f_t(b), \quad i = 1, \dots, 19,$$

где  $h_{i,t}$  — i.i.d. величины, принимающие с одинаковой вероятностью  $\frac{1}{2}$  значения 0 и 1, т. е.  $h_{i,t}$  определяет, используется ли  $f_t(b)$  для вычисления  $i$ -й эмпирической корреляции. (Конечно, оценки должны еще масштабироваться, но не будем это делать, так как в дальнейшей процедуре используется только их знак.)

Далее построим графики зависимости от  $b$  функций  $g_i(b)$ ,  $i = 1, \dots, 19$ . Так как очень маловероятно, что все  $g_i(b^0)$  имеют одинаковый знак, исключим все области, в которых либо все значения, либо все кроме одного (меньше  $q = 2$ ) имеют одинаковый знак. Из теоремы 1 в [7] непосредственно следует, что оставшийся интервал — это область достоверности в 80 % для  $b^0$ .

Для похожего примера

$$y_t = b^0 u_t + v_t$$

во введении [7] приведены результаты имитационного моделирования с  $b^0 = 1$  и i.i.d. последовательностью нормально распределенных помех  $v_t$  со средним 0,5 и дисперсией 0,1 (смещенная, нецентрированная помеха). При этом был получен доверительный интервал  $[0,874; 1,119]$ . Еще раз отметим, что в процедуре получения доверительного интервала нигде не



использовались никакие сведения о помехах. Указанные выше характеристики помехи использовались в эксперименте только для моделирования самих помех.

Включение в левую часть (2) динамики  $+2,5y_{t-1}$  не сказывается ни на поведении процедуры, ни на характере оценки множества достоверности. Но с практической точки зрения в результате выходная переменная сильно растет, достигая значения  $y_{15} = 5,551 \cdot 10^5$ . Это связано с неустойчивостью передаточной функции. В задачах адаптивного управления даже при произвольных, но ограниченных помехах выходную переменную можно стабилизировать за счет введения обратной связи с подстраиваемыми коэффициентами (см., например, [12]). Такого эффекта удастся достичь в комбинации с каким-либо из стандартных методов идентификации множества принадлежности. В [12] для этой цели, задав некоторый уровень  $C_v = 10$ , предлагается использовать стабилизирующий алгоритм “Полоска” для формирования последовательности оценок  $\hat{b}_t$  и в дополнение к рандомизированному воздействию (управлению)  $\Delta_t$  добавлять стабилизирующее слагаемое  $\bar{u}_t$

$$u_t = \Delta_t + \bar{u}_t,$$

получаемое по закону обратной связи

$$\bar{u}_t = \begin{cases} \frac{2,5}{\hat{b}_t} y_t, & \hat{b}_t \neq 0, \\ 0, & \hat{b}_t = 0. \end{cases}$$

В результате удастся стабилизировать поведение выходной переменной. При этом свойство  $E[\Delta_{t-1}\epsilon_t(b)] = (b^0 - b)$  по-прежнему выполняется, так как  $E[\Delta_{t-1}\bar{u}_{t-1}] = 0$  и процедура LSCR остается работоспособной. Пример получившихся при имитационном моделировании функции  $g_i(b)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 19$ , и 80-процентный доверительный интервал  $\hat{\Theta} = [0, 745; 1, 105]$  показаны на рис. 2, при этом стабилизирующий алгоритм включался при превышении модуля выходной переменной уровня, равного 100.

Если бы можно было предположить, что  $|v_t| \leq C_v$ , то для получения гарантированного интервала для  $b^0$  можно было бы воспользоваться формулой

$$b^0 \in \bigcap_{t=1}^{15} \{b : |y_t + 2,5y_{t-1} - bu_{t-1}| \leq C_v\}.$$

Несмотря на то что использовался уровень  $C_v$  при формировании стабилизирующей обратной связи, уровень достоверности оценки алгоритма LSCR никак от выбора  $C_v$  не зависит. Даже при заниженном выборе уровня  $C_v$  алгоритм все равно работает, в то время как методы идентификации множества принадлежности выдали бы неверные результаты.

### 3. Постановка задачи

Рассматриваемая далее процедура идентификации параметров динамического ОУ, описываемого моделью авторегрессии скользящего среднего, основана на перепараметризации математической модели ОУ. Вместо исходных параметров объекта — его коэффициентов (как в [7]) — удобно использовать некоторые другие параметры, находящиеся с исходными во взаимно однозначном соответствии. Такая перепараметризация приводит к записи ОУ в виде модели скользящего среднего, что позволяет для построения областей достоверности обоснованно воспользоваться процедурой LSCR и в тех случаях, когда в канале обратной связи используются алгоритмы с подстраиваемыми коэффициентами.

Предположим, что ОУ со скалярными входами и выходами описывается в дискретном времени уравнением (1) с  $G^0(z^{-1}) = B^0(z^{-1})/A^0(z^{-1})$ , где

$$\begin{aligned} A^0(z^{-1}) &= 1 + z^{-1}a_1^0 + \dots + z^{-n_a}a_{n_a}^0, \\ B^0(z^{-1}) &= z^{-l}b_l^0 + z^{-l-1}b_{l+1}^0 + \dots + z^{-n_b}b_{n_b}^0, \end{aligned}$$

натуральные числа  $n_a, n_b$  — порядки модели по выходу и управлению;  $l$  — запаздывание в управлении,  $1 \leq l \leq n_b$ ,  $a_1^0, \dots, a_{n_a}^0, b_l^0, \dots, b_{n_b}^0$  — параметры ОУ, часть из которых неизвестна.

*Требуется* по наблюдениям за выходами ОУ  $\{y_t\}$  на конечном интервале времени  $t = 1, 2, \dots, N$ , при выбираемых известных входах (управлениях)  $\{u_t\}$  определить доверительную область  $\hat{\Theta}$ , которой с задаваемой пользователем вероятностью принадлежат неизвестные коэффициенты уравнения ОУ (1).

#### 4. Управляющие воздействия с пробным сигналом

Пусть  $s \leq n_a + n_b - l + 1$  — некоторое натуральное число, равное в типичных случаях количеству неизвестных параметров ОУ (1) и будем считать, что  $N = s \cdot N_\Delta$ .

Выберем последовательность независимых случайных переменных симметрично распределенных вокруг нуля (пробное возмущение)  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{N_\Delta-1}$ , которые с интервалами в  $s$  тактов будут добавляться в канал управления с целью “обогащения” последовательности наблюдений (повышения вариативности). Эти переменные должны удовлетворять важному свойству независимости от последовательности помех в ОУ (1).

Более точно, условимся управления  $\{u_t\}$  формировать по правилу

$$u_{sn+i-l} = \begin{cases} \Delta_n + \bar{u}_{sn-l} & \text{при } i = 0, \\ \bar{u}_{sn+i-l} & \text{при } i = 1, 2, \dots, s-1, \end{cases} \quad n = 0, \dots, N_\Delta - 1,$$

где собственно управления  $\{\bar{u}_t\}$  определяются по закону подстраиваемой обратной связи

$$\bar{u}_t = \mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \dots, \bar{u}_{t-1}, \dots), \quad t \geq 0, \quad \bar{u}_{-k} = 0, \quad k > 0,$$

вид, тип и характеристики которой определяются пользователем исходя из конкретной практической задачи. В частности, возможно использование тривиального закона обратной связи:  $\bar{u}_t = 0, t = 0, 1, \dots$

#### 5. Перепараметризация передаточной функции и основные предположения

Для моментов времени  $sn, n = 0, \dots, N_\Delta - 1$ , обозначив  $\theta_1^0 = b_l^0$  и  $\bar{v}_{sn} = v_{sn} + (1 - A^0(z^{-1}))y_{sn} + (B^0(z^{-1}) - b_l^0 z^{-l})u_{sn} + b_l^0 \bar{u}_{sn-l}$ , уравнение ОУ (1) можно переписать в виде

$$y_{sn} = \Delta_n \theta_1^0 + \bar{v}_{sn},$$

в котором явно выражена связь наблюдений  $y_{sn}$  с пробным возмущением  $\Delta_n$ , которое не зависит от “новой” помехи  $\bar{v}_{sn}$ . Аналогичным образом перепишем уравнение ОУ (1) и для остальных моментов времени

$sn + k - 1$ ,  $k = 2, \dots, s$ , последовательно исключая из левой части переменные  $y_{sn+k-1}, \dots, y_{sn}$  в силу ОУ (1) для меньших моментов времени и обозначая через  $\theta_{k-i}^0$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ , коэффициенты при остающихся в правой части  $\bar{u}_{sn-l+i}$ ,

$$(3) \quad y_{sn+k-1} = \Delta_n \theta_k^0 + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_{k-i}^0 \bar{u}_{sn-l+i} + \bar{v}_{sn+k-1}.$$

В [11] и [4] было предложено из полученных коэффициентов  $\theta_k^0$  в (3) сформировать новый вектор параметров  $\theta^0$  размерности  $s$ . При этом были установлены условия обратимости такой процедуры перепараметризации (см., например, лемму 2.2 в [4]). Из процедуры построения следует, что  $\theta^0 = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}$ , где матрица  $\mathbb{A}$  размерности  $s \times s$  и вектор  $\mathbb{B}$  размерности  $s$  имеют вид:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1^0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2^0 & a_1^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n_a}^0 & \dots & a_1^0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_l^0 \\ \vdots \\ b_{n_b}^0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Основные предположения.*

**A1.** Пользователь может выбирать  $u_t$ , и этот выбор не влияет на последовательность помех  $\{v_t\}$ . (В математическом смысле если  $u_t$  и  $v_t$  являются случайными величинами, то их наборы  $\{u_t\}$  и  $\{v_t\}$  являются независимыми между собой.)

**A2.** Многочлены  $A^0(z^{-1})$  и  $B^0(z^{-1})$  взаимно простые.

**A3.** Пусть  $s \leq n_a + n_b - l + 1$  — такое натуральное число, что набор неизвестных параметров ОУ однозначно определяется с помощью некоторой функции  $\tau(\theta)$  по описанному выше вектору  $\theta^0$ .

Заметим, что:

- нет никаких предположений о помехах  $v_t$ , не предполагается знаний о верхней границе их амплитуд, нет предположений о центрированности или каких-либо автокорреляционных свойствах;

- в [4] и [11] установлено выполнение условия **A3** для  $s = n_a + n_b - l + 1$  при выполнении условия **A2** и известных порядках ОУ  $n_a$  и  $n_b$ , а также приведен способ построения функции  $\tau(\theta)$ .

На практике иногда неизвестна только часть параметров ОУ при младших степенях  $z^{-1}$ , меньших некоторых  $\bar{n}_a$  и  $\bar{n}_b$  соответственно. В таких случаях можно выбрать  $s = \bar{n}_a + \bar{n}_b - l + 1$ , что оказывается существенно меньшим, чем  $n_a + n_b - l + 1$  (см. [4], с. 119).

## 6. Процедура построения доверительных областей

1. Используя данные наблюдений, определим предсказатели как функции от  $\theta$

$$\hat{y}_{sn+k-1}(\theta) = \Delta_n \theta_k + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_{k-i} \bar{u}_{sn+k-l-i}, \quad n = 0, \dots, N_\Delta - 1, \quad k = 1, \dots, s.$$

2. Обозначим ошибки предсказания

$$\epsilon_t(\theta) = y_t - \hat{y}_t(\theta), \quad t = 1, \dots, N.$$

3. По наблюдаемым данным сформируем набор функций от  $\theta$

$$f_{sn+k-1}(\theta) = \Delta_n \epsilon_{sn+k-1}(\theta), \quad n = 0, \dots, N_\Delta - 1, \quad k = 1, \dots, s.$$

4. Выберем натуральное число  $M > 2s$  и сконструируем  $M-1$  различных бинарных стохастических строк (из нулей и единиц)  $(h_{i,1}, \dots, h_{i,N})$ ,  $i = 1, \dots, M-1$ , по правилу: элементы  $h_{i,j}$  принимают значения ноль или единица с вероятностью  $\frac{1}{2}$ . Вычислим

$$g_i^k(\theta) = \sum_{n=0}^{N_\Delta-1} h_{i,ns+k} \cdot f_{ns+k-1}(\theta), \quad i = 1, \dots, M-1, \quad k = 1, \dots, s.$$

5. Выберем  $q$  из интервала  $[1; M/2s]$ . Для  $k = 1, \dots, s$  построим области  $\hat{\Theta}^k$ , включая в них только те значения  $\theta$ , для которых из функций  $g_i^k(\theta)$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ , не менее  $q$  строго больше нуля и не менее  $q$  строго меньше нуля.

Доверительное множество зададим по формуле

$$(4) \quad \widehat{\Theta} = \bigcap_{k=1}^s \widehat{\Theta}^k.$$

*З а м е ч а н и я.* Описанная выше процедура имеет параллели с методом инструментальной переменной (ИП) для идентификации системы. Основная идея метода ИП состоит в том, чтобы ошибки предсказания были некоррелированы с прошлыми данными. Считая  $\Delta_n$  в п. 3 инструментальной переменной, оценку  $\hat{\theta}$  можно представить как

$$\hat{\theta} \in \left\{ \theta : \sum_{n=0}^{N_{\Delta}-1} \Delta_n \epsilon_{ns+k-1}(\theta) = 0 \right\}.$$

В описанном подходе доверительное множество  $\widehat{\Theta}$  конструируется за счет исключения из множества параметров тех, для которых эмпирические корреляции  $\sum_{n=0}^{N_{\Delta}-1} h_{i,ns+k-1} \cdot \Delta_n \epsilon_{ns+k-1}(\theta)$  слишком часто принимают либо только положительные, либо только отрицательные значения.

## 7. Основной результат

Вероятность того, что  $\theta^0$  принадлежит каждому из  $\widehat{\Theta}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ , дается в следующей теореме.

*Т е о р е м а 1.* Пусть выполнено условие **A1**. Рассмотрим  $k \in \{1, 2, \dots, s\}$  и предположим, что  $\mathbf{P}\{g_i^k(\theta^0) = 0\} = 0$ . Тогда

$$(5) \quad \mathbf{P}\{\theta^0 \in \widehat{\Theta}^k\} = 1 - 2q/M,$$

где  $\widehat{\Theta}^k$ ,  $q$  и  $M$  из пп. 5 и 4 описанной выше процедуры.

Доказательство теоремы 1 легко получается из похожей теоремы 1 в [7].

Также по аналогии с [7] непосредственно из теоремы 1 можно получить следующее утверждение.

*С л е д с т в и е 1.* В условиях теоремы 1

$$(6) \quad \mathbf{P}\{\theta^0 \in \widehat{\Theta}\} \geq 1 - 2sq/M,$$

где  $\widehat{\Theta}$  из (4).

Заметим, что значение вероятности в (5) точное, а не нижняя граница. Условие  $\mathbb{P}\{g_i^k(\theta^0) = 0\} = 0$  необходимо только для того, чтобы исключить “вырожденные” случаи, которые могут играть роль на шаге 5 описанной выше процедуры. Неравенство в (6) получается из-за того, что события  $\{\theta^0 \notin \widehat{\Theta}^k\}$ ,  $k = 1, \dots, s$ , могут перекрываться.

При больших значениях  $s$  использование последовательности множеств  $\Theta^k$ ,  $k = 1, \dots, s$ , представляется более конструктивным по сравнению с получающимся набором множеств в [7], так как позволяет последовательно получать доверительные множества сначала для одного параметра, потом для двух и т. п., а не наборы ограничений сразу для всех параметров.

Из сформулированного выше и доказательств в [4, 11] легко выводится основной результат этой статьи.

*Т е о р е м а 2.* В условиях теоремы 1 и при предположениях **A2**, **A3** множество  $\tau(\widehat{\Theta})$  является доверительным для набора неизвестных параметров ОУ (1) с уровнем достоверности не ниже  $1 - 2sq/M$ .

В [9] было показано, что множество  $\widehat{\Theta}$  сжимается вокруг  $\theta^0$  при росте  $N$ . Дополнительно стоит отметить, что ранее в [4, 10–12] практически при тех же предположениях была показана возможность использования описанной в разделе 4 стратегии управления для формулировки и обоснования алгоритма асимптотически точного оценивания набора неизвестных параметров ОУ (1).

## 8. Пример

Вернемся к ОУ (2) из предварительного примера, в котором  $N = 960$  и наряду с  $b^0$  неизвестен еще и параметр  $a^0$ . В этом случае  $s = 2$  и параметр  $\theta^0$  задается соотношениями

$$\theta^0 = \begin{pmatrix} \theta_1^0 \\ \theta_2^0 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ -a^0 b^0 \end{pmatrix}.$$

Обратная функция из условия **A3** имеет вид  $\tau(\theta) = (\theta_1, -\theta_2/\theta_1)^T$ .

Определим функции  $f_t(\theta)$ :

$$f_{2n}(\theta) = \Delta_n(y_{2n} - \Delta_n\theta_1), \quad n = 0, \dots, N_\Delta - 1,$$

$$f_{2n+1}(\theta) = \Delta_n(y_{2sn+1} - \Delta_n\theta_2 - \theta_1\bar{u}_{2n}).$$

Выберем  $M = 480$  и  $q = 6$ . Вычислим эмпирические корреляции

$$g_i^k(\theta) = \sum_{n=0}^{499} h_{i,2n+k} \cdot f_{2n+k}(\theta), \quad i = 1, \dots, 479, \quad k = 1, 2.$$

Для  $k = 1, 2$  построим области  $\hat{\Theta}^k$ , включая в них только те значения  $\theta$ , для которых из функций  $g_i^k(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, 479$ , не менее 6 строго больше нуля и не менее 6 строго меньше нуля. В силу теоремы 2 вектор истинных параметров с вероятностью более  $95\% = (1 - 2 \cdot 2 \cdot 6/480) \cdot 100\%$  принадлежит доверительному множеству  $\tau(\hat{\Theta}^1 \cap \hat{\Theta}^2)$ .

На рис. 3 приведена область  $\hat{\Theta}$ , полученная в результате имитационного моделирования с параметрами помех и типом стабилизирующей обратной связи, как в разделе 2. Типичные области оказываются достаточно большими. К сожалению, по получающемуся для конечной выборки результату не всегда удается даже определить устойчивый ОУ или нет. Например, справа от штриховой линии на рис. 3 располагается часть доверительной области, в которой параметр  $a$  может быть меньше единицы.

Необходимо отметить, что в заключении теоремы 2 не говорится о возможной ограниченности получающихся множеств  $\Theta_k$ , и при моделировании в результате получались иногда и неограниченные множества.

## 9. Заключение

В статье представлена процедура построения доверительного множества для параметров линейной передаточной функции ОУ, определяемого как пересечение набора доверительных областей, содержащих истинные параметры с задаваемой вероятностью. Получающееся доверительное множество не является консервативным. Так как оно дает достаточно хорошее описание неопределенностей в модели, то результаты этой статьи релевантны проблеме конструирования робастных систем управления.

С теоретической точки зрения наиболее примечательной особенностью представленной процедуры является то, что она работает без каких-



либо существенных предположений о помехах. Это очень важно и с практической точки зрения, так как в реальных приложениях трудно получить априорные знания о характеристиках помех.

Автор выражает благодарность Б.Т. Поляку и рецензентам за многочисленные полезные замечания, которые существенно помогли в работе над окончательной версией статьи и частично были использованы в тексте.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ljung L.* System Identification-Theory for the User. 2nd ed. Englewood Cliffs. NJ: Prentice Hall, 1999.
2. *Soderstrom T., Stoica P.* System Identification. Englewood Cliffs. NJ: Prentice Hall, 1998.
3. *Фельдбаум А.А.* О проблемах дуального управления / Методы оптимизации автоматических систем. М.: Наука, 1972. С. 89–108.
4. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
5. *Granichin O.N.* Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. on Automat. Contr. V. 49. Oct. 2004. P. 1830–1835.
6. *Соколов В.Ф.* Оценка качества робастной системы управления при неизвестных верхних границах возмущений и помехи измерений // АиТ. 2010. №. 9. С. 3–18.
7. *Campi M.C., Weyer E.* Non-asymptotic confidence sets for the parameters of linear transfer functions // IEEE Trans. Automat. Control. V. 55. No. 12. Dec. 2010. P. 2708–2720.
8. *Weyer E., Ko S., Campi M.C.* Finite sample properties of system identification with quantized output data // Proc. 48th IEEE Conf. on Decision and Control and 28th Chinese Control Conf. Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009. P. 1532–1537.

9. *Campi M.C., Weyer E.* Guaranteed non-asymptotic confidence regions in system identification // *Automatica*. 2005. V. 41. P. 1751–1764.
10. *Vakhitov A., Granichin O., Vlasov V.* Adaptive control of SISO plant with time-varying coefficients based on random test perturbation // *Proc. 2010 Amer. Control Conf., June 30-July 02, 2010. Baltimore, MD, USA*. P. 4004–4009.
11. *Granichin O.N., Fomin V.N.* Adaptive Control with Test Signals // *Proc. 6th St. Petersburg Sympos. on Adaptive Syst. Theory. St. Petersburg. 1999. V. 1. P. 73–78.*
12. *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Адаптивное управление с использованием пробных сигналов // *АиТ*. 1986. № 2. С. 100–112.
13. *Garatti S., Campi M.C., Bittanti S.* Assessing the quality of identified models through the asymptotic theory — When is the result reliable? // *Automatica*. 2004. V. 40. P. 1319–1332.
14. *Garatti S., Campi M.C., Bittanti S.* The asymptotic model quality assessment for instrumental variable identification revisited // *Syst. Control Lett.* 2006. V. 55. P. 494–500.
15. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдения в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
16. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
17. *Bai E.W., Nagpal K.M., Tempo R.* Bounded-error parameter estimation: Noise models and recursive algorithms // *Automatica*. 1996. V. 32. P. 985–999.
18. *Garulli A., Giarre L., Zappa G.* Identification of approximated Hammerstein models in a worst-case setting // *IEEE Trans. Autom. Control*. Dec. 2002. V. 47. No. 7. P. 2046–2050.
19. *Поляк Б.Т., Шербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

20. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // *АиТ.* 2008. № 5. С. 72–90.
21. *Efron B.* Bootstrap methods: another look at the jackknife // *Annals of Statistics.* 1979. V. 7. P. 1–26.
22. *Bittanti S., Lovera M.* Bootstrap-based estimates of uncertainty in subspace identification methods // *Automatica.* 2000. V. 36. P. 1605–1615.
23. *Tjarnstrom F., Ljung L.* Using the bootstrap to estimate the variance in the case of undermodelling // *IEEE Trans. Autom. Control.* Feb. 2002. V. 47. No. 2. P. 395–398.
24. *Балк П.И.* Оценивание параметров функциональной зависимости при нулевом медианном значении помех в измерениях // *АиТ.* 2011. № 5. С. 69–81.

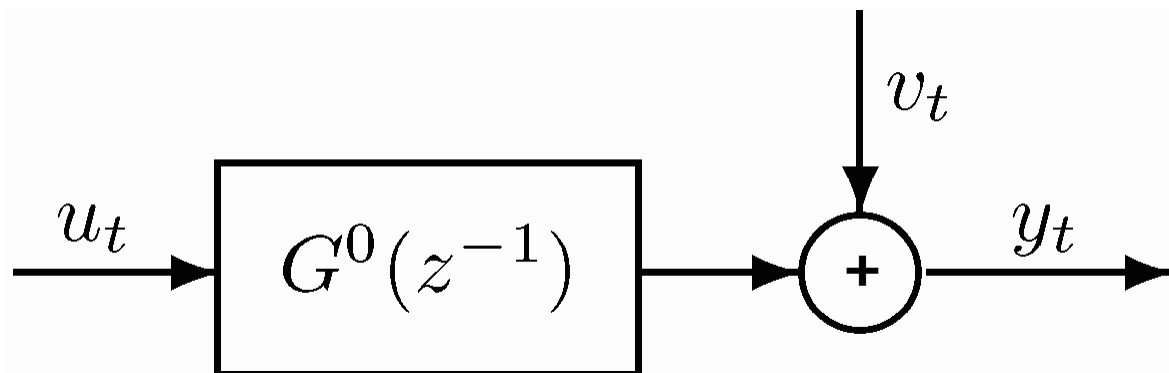


Рис. 1. Динамическая система.

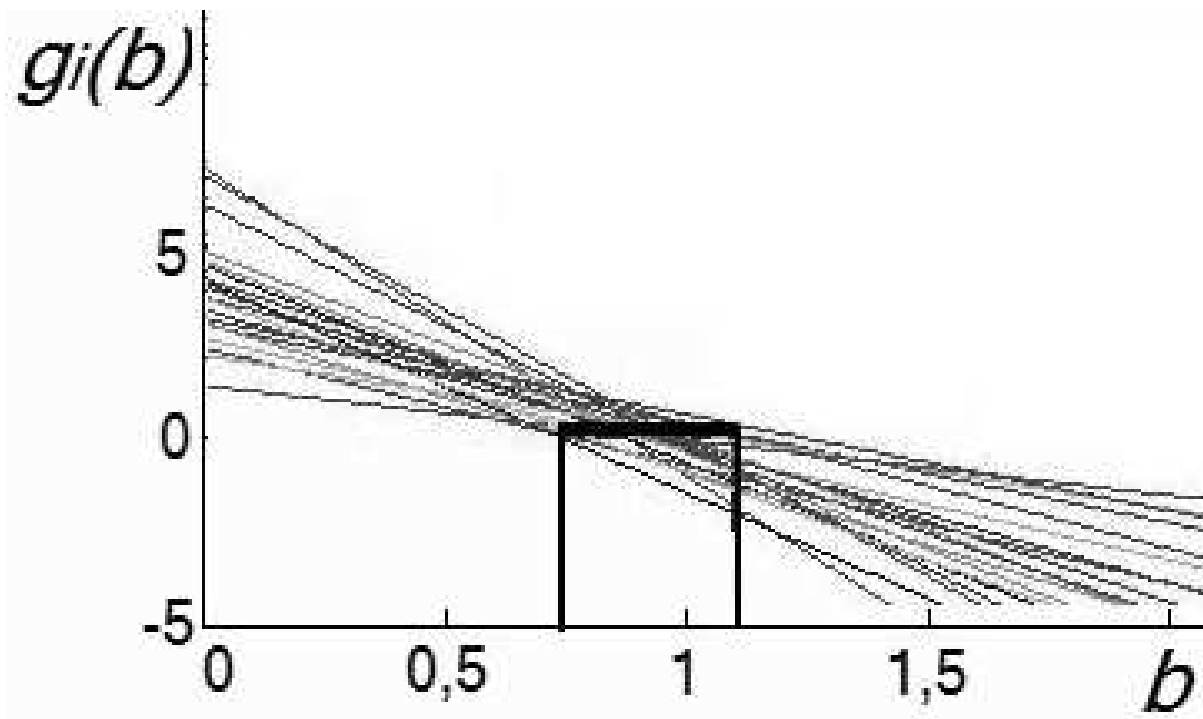


Рис. 2. Функции  $g_i(b)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 19$ , и 80-процентный доверительный интервал  $\hat{\Theta} = [0, 745; 1, 105]$  для  $b^0 = 1, 0$ .

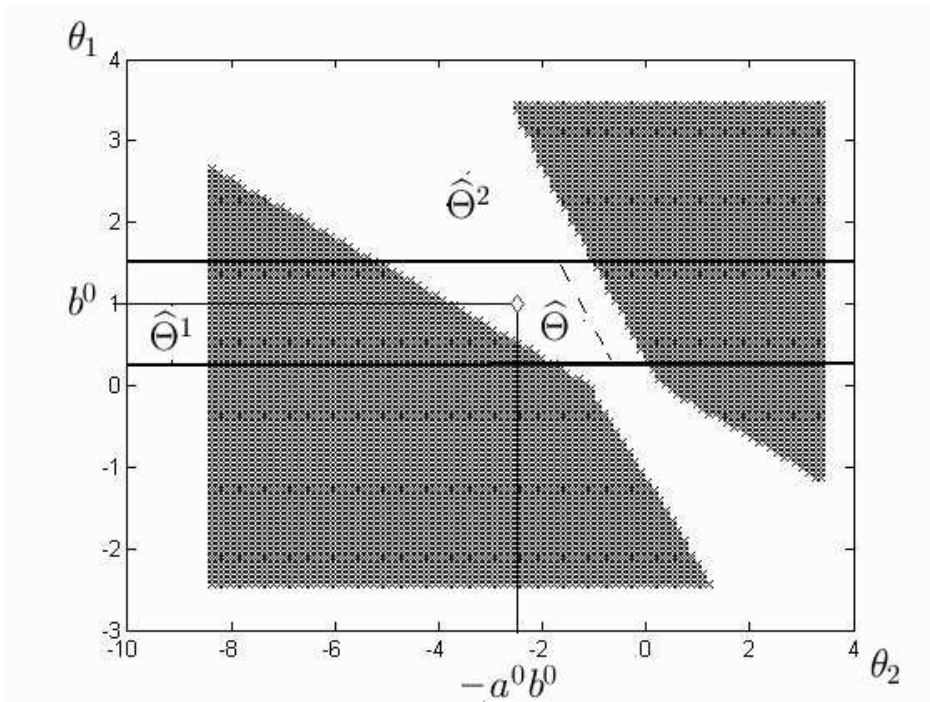


Рис. 3. Область  $\hat{\Theta}$ .

Подписи к рисункам

Рис. 1. Динамическая система.

Рис. 2. Функции  $g_i(b)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 19$ , и 80-процентный доверительный интервал  $\hat{\Theta} = [0,745; 1,105]$  для  $b^0 = 1,0$ .

Рис. 3. Область  $\hat{\Theta}$ .