

© 2010 г. О. Н. Граничин, д-р физ.-мат. наук,  
Д. В. Павленко  
(Санкт-Петербургский государственный университет)

## РАНДОМИЗАЦИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ДАННЫХ И $\ell_1$ -ОПТИМИЗАЦИЯ (ОПОЗНАНИЕ СО СЖАТИЕМ) (Обзор)

В последнее время активно развивается новая парадигма обработки сигналов, имеющих “разреженное” (sparse) представление в некотором базисе. Она во многом опирается на идеи рандомизации измерений и  $\ell_1$ -оптимизации. Предложенные недавно новые методы получения и представления сжимаемых данных в англоязычной литературе называются *Compressive Sensing* (опознание со сжатием).

Ключевые слова: *рандомизированные измерения,  $\ell_1$ -оптимизация, восстановление разреженных сигналов, компрессив сенсинг.*

### 1. Введение

В XX в. слово “информация” стало популярным термином во многих научных областях, получив особые для каждой из них определения и толкования [1]. Одно из них можно найти в Википедии: *информацией* (от латинского *informatio* — “научение”, “сведение”, “оповещение”) называется опосредованный формами связи результат отражения изменяемого объекта изменяющимся с целью сохранения их системной целостности. Обычно путают или отождествляют термин “информация” с близкими понятиями “данные” (получаемые сообщения) и “знания”. Понимая многообразность возможных толкований, не углубляясь в детали, в контексте этой статьи будем полагать, что *знания* обеспечивают восстановление необходимой субъекту *информации*  $x$  по получаемым в ходе экспериментов или вычислений *данным*  $y$ . Достаточно часто можно упрощенно считать, что существенная информация об исследуемом явлении  $x \in \mathbb{X}$  связана с имеющимися данными  $y \in \mathbb{Y}$  через понимание

закономерностей явления — знание (оператор)  $\Phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ :

$$y = \Phi x \quad (= \Phi(x)).$$

Если оператор  $\Phi$  обратим, то он обеспечивает исчерпывающие знания для полного восстановления  $x$  по  $y$ . При линейной зависимости  $y, x \in \mathbb{R}^N$  и невырожденной  $N \times N$  матрице  $\Phi$  из матричной алгебры хорошо известно, что  $x = \Phi^{-1}y$ .

Для открытых систем типичным является случай, когда данные подвержены влиянию неконтролируемых возмущений

$$y = \Phi x + \xi.$$

Выделение слагаемого  $\xi$  с философской точки зрения подчеркивает влияние на данные  $y$  других явлений вне определяемых  $x$ . Даже при отсутствии прямого внешнего воздействия последнее соотношение — более естественное с практической точки зрения. Обычно получение данных — процесс взаимодействия исследуемого явления (отражаемого информацией  $x$ ) с некоторой измерительной системой со своими характеристиками, совокупность которых объединяет  $\xi$ .

При незначительном уровне внешних возмущений  $\xi$  (или при их затухающем характере) задача о восстановлении  $x$  по  $y$  сводится к проблеме обращения оператора  $\Phi$ , что обычно достигается за счет увеличения количества наблюдений: при  $x \in \mathbb{R}^N$  выбирают  $m > N$  и  $y \in \mathbb{R}^m$ .

При существенных внешних возмущениях  $\xi$  обычно используется статистическая постановка задачи, возможности решения которой при  $m \gg N$  детально изучены в рамках традиционной математической теории планирования экспериментов [2]. Внешние возмущения считают реализацией некоторой последовательности независимых случайных величин с нулевым средним значением. Однако в приложениях это допущение часто нарушается, что может сильно сказываться на работе традиционных оценочных процедур.

На первый взгляд, это кажется удивительным, но задача о восстановлении  $x$  может быть эффективно решена и в случае нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помех [3, 4] за счет случайного выбора матрицы  $\Phi$ . Идея использования случайных регрессоров для

устранения эффекта смещения была выдвинута еще Р. Фишером [5] в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Помимо задачи планирования эксперимента, в которой регрессоры могут быть рандомизированы экспериментатором, случайные входы возникают во многих задачах управления, идентификации, фильтрации, распознавания и т. д. (см., например, [6–10]).

Рекуррентные алгоритмы оценивания  $x$  при случайных входных сигналах рассматривались также в [6–11]. В [12, 13] изучалась скорость сходимости рекуррентных алгоритмов оценивания параметров регрессии при случайных входных сигналах и были предложены оптимальные алгоритмы, имеющие наилучшую из возможных скорость сходимости.

В [3] делаются общие выводы о том, что **рандомизация** процесса измерений позволяет

- устранить эффект смещения и
- уменьшить количество итераций, а значит, и наблюдений.

В XXI в. резко увеличились объемы обрабатываемой информации. В значительной степени это связано с массовым переходом к обработке потоков двумерных (2-D) и трехмерных (3-D) данных. Сложность традиционных методов квантования сигналов возрастает по экспоненциальному закону с ростом размерности. Квантование 1-D сигналов при  $N = 10^3$  отсчетов соответствует  $10^6$  в случае 2-D, а в 3-D —  $10^9$ , что уже чрезвычайно велико. В современных приложениях для цифровых фото- и видеокамер традиционное требование о необходимой частоте (скорости, Nyquist Rate) измерения настолько высоко, что слишком большое количество получающихся данных надо существенно сжимать перед хранением или пересылкой. В других приложениях, включая системы отображения (медицинские сканеры, радары) и быстродействующие аналого-цифровые конвертеры, увеличение частоты измерений оказывается очень дорогостоящим.

С практической точки зрения чрезвычайно интересно исследовать возможности восстановления  $x \in \mathbb{R}^N$  по  $y \in \mathbb{R}^m$  при  $m \ll N$ , что, конечно же, нереализуемо в общем случае. Но в последнее время на помощь традиционной теории обработки сигналов приходит новая парадигма **Compressive Sensing** (“опознание со сжатием”), позволяющая достаточно точно восстанавливать “разреженную” (sparse) информацию  $x$

[14, 15]. Англоязычный термин *compressive sensing* за последние пять лет стал уже общеупотребимым. В [16] предложен перевод на русский язык — *сжатые измерения*. Б.Т. Поляк на одном из научных семинаров в ИПУ РАН предложил использовать термин *опознание*, который, по нашему мнению, точнее отражает специфику нового подхода.

Основная цель этой статьи — разъяснить читателям эту новую парадигму, основанную на сохраняющих структуру сигнала неадаптивных линейных проектированиях, по результатам которых информация восстанавливается, используя, например, методы  $\ell_1$ -оптимизации:  $x$  находится как решение некоторой задачи вида

$$\|x\|_1 = \sum_j |x[j]| \rightarrow \min : \quad y = \Phi x.$$

Новая методика базируется на определенном (обычно рандомизированном) выборе матрицы  $\Phi$  и на том, что получающийся в результате  $\ell_1$ -оптимизации вектор  $\hat{x}$  имеет не более  $m$  ненулевых компонент, т. е. он сильно разрежен. Последний замечательный факт был установлен и использован в сейсмологии [17, 18] и независимо от этих статей — в студенческой курсовой работе одного из авторов при решении проблемы о построении  $\ell_1$  оптимального стабилизирующего регулятора неминимальнофазового объекта, первоначально представленной в [19]. В 1984 г. в журнале “Автоматика и телемеханика” было дано с детальной геометрической интерпретацией развернутое объяснение того, почему у вектора решения задачи  $\ell_1$ -оптимизации не равны нулю только малое количество компонент (равное коразмерности подпространства  $\Phi x = 0$ ) [20]. Через три года похожий результат был опубликован в [21].

В разделе 2 дается формализованная постановка задачи с разъяснениями и примерами. В разделе 3 описываются возможные способы решения и анализируются возникающие проблемы. Далее разбираются практические примеры и в заключении обсуждаются перспективы. Структура статьи во многом следует [22].

## 2. Постановка задачи

**Информация, получение данных, управление.** В знаменитой книге Н. Винера “Кибернетика, или управление и связь в животном и машине” [23] провозглашается становление новой науки *Кибернетики*, в которой информационно–управленческая связь в явлениях материального мира выступает как фундаментальное его свойство.

В достаточно общем виде процесс обработки информации и принятия управленческого решения можно представить в следующем виде (см. рис. 1). Будем считать, что

- информация  $x$  о важном для исследователя изменяющемся явлении (или объекте управления, или каком-то элементе внешней среды),
- опосредуясь некоторыми формами связи  $\Psi$ ,
- проявляет себя через сигнал  $f$ .

Можно, установив соответствующие регистрирующие приборы или через специальные сенсоры, наблюдать сигнал  $f$ . Процесс наблюдения (получения данных) обычно достаточно сложно организован и может трактоваться как

- применение некоторого оператора наблюдения  $A$  к сигналу  $f$ .
- В результате взаимодействия с регистрирующими приборами получают данные  $y$ ,
- по которым исследователь может пытаться восстанавливать (оценивать) информацию  $x$ , формируя оценки  $\hat{x}$ .
- Результаты оценивания в той или иной степени характеризуют происходящие изменения в интересующем исследователя явлении и используются в дальнейшем для принятия тех или иных управленческих решений.

Этап получения данных играет ключевую роль. Все процессы и явления протекают во времени. В реальности сигналы обычно имеют аналоговую природу. Обозначим:  $t$  — момент времени,  $f(t)$  — “мгновенное”

значение сигнала  $f$  в момент времени  $t$ . Простейший пример оператора  $A$  — получение набора “мгновенных” значений сигнала  $f$  в  $m$  точках  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . В этом случае оператор  $A$  можно формально записать как задание соответствия сигналу  $f$  вектора из его сверток со сдвинутыми по аргументу дельта-функциями:

$$A(f) = \begin{pmatrix} \delta_{t_1} * f \\ \dots \\ \delta_{t_m} * f \end{pmatrix},$$

где  $\delta_{t_n}(t) = \delta(t - t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, m$ . Современная теория информации берет начало со знаменитой *теоремы Котельникова* [24] (в англоязычной литературе — *теоремы Найквиста-Шеннона* [25–27]), которая гласит, что если аналоговый сигнал  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  из  $L_2(\mathbb{R})$  имеет ограниченный спектр, то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой больше удвоенной максимальной частоты спектра. Эта теорема позволяет во многих случаях отождествлять аналоговый сигнал  $f(t)$  с соответствующим набором дискретных значений  $f[n]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Мгновенные данные являются некоторой идеализацией. Реальные регистрирующие приборы взаимодействуют с поступающим к ним на вход сигналом некоторое время и только потом выдают результат, который фактически является определенной интегральной характеристикой сигнала на интервале времени регистрации. В общем случае результат измерения сигнала  $f$  из пространства функций  $L_2(\mathbb{R})$  (получения данных) можно трактовать как скалярное произведение в  $L_2(\mathbb{R})$  с некоторой функцией наблюдения  $a$ , которое представляет собой свертку  $f$  с  $a$ .

Во многих практических приложениях исходное понятие информации  $x$  может быть описано существенно проще, чем фактически наблюдаемые исследователем сигналы  $f$ . Например, для принятия решения в некоторой системе управления надо знать, что в регистрирующем канале появился сигнал в виде некоторой акустической или электромагнитной волны. Интересует просто ответ на вопрос *да/нет* — один бит, в то время как поступающий и регистрируемый сигнал может иметь сложную форму и быть распределенным во времени и пространстве — многомерный вектор. Учет именно такого рода специфики лежит в основе новой парадигмы обработки информации, активно развивающейся в последнее время.

**Сжимаемые сигналы.** Рассмотрим вещественный одномерный дискретный сигнал  $f$  конечной длины<sup>1</sup>. Его значения составляют  $N \times 1$  вектор-столбец в  $\mathbb{R}^N$  с элементами  $f[n]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . (Будем рассматривать 2-D изображения или сигналы больших размерностей векторизованными в длинный одномерный вектор.) Любой сигнал в  $\mathbb{R}^N$  может быть разложен по некоторому базису из векторов  $\{\psi_j\}_{j=1}^N$  размерности  $N \times 1$ . Для простоты предположим, что этот базис ортонормированный. Используя  $N \times N$  матрицу базиса  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$  со столбцами из векторов  $\{\psi_j\}$ , сигнал  $f$  может быть выражен как

$$(1) \quad f = \Psi x = \sum_{j=1}^N x[j] \psi_j,$$

где  $x$  —  $N \times 1$  вектор-столбец весовых коэффициентов  $x[j] = \langle x, \psi_j \rangle = \psi_j^T x$ , и символ  $\cdot^T$  обозначает транспонирование. Очевидно, что  $f$  и  $x$  — эквивалентные представления сигнала. Обычно  $f$  называют представлением во временной (или пространственной) области, а  $x$  — в спектральной или трансформированной  $\Psi$ -области.

Сигнал  $f$  называется *s-разреженным* (*s-sparse*), если он является линейной комбинацией только  $s$  базисных векторов, т. е. только  $s$  компонент  $x[j]$  в (1) отличны от нуля, а остальные  $(N - s)$  — нули.

Интересен случай, когда  $s \ll N$ . Для таких  $s$ -разреженных сигналов можно считать, что их представление в соответствующей  $\Psi$ -области и является той существенной информацией, которую они в себе несут. Эта информация однозначно определяется двумя наборами из  $s$  натуральных (индексов) и вещественных (значений) чисел.

Наряду с определением  $s$ -разреженных сигналов будем использовать и более общее понятие сжимаемого сигнала. Сигнал  $f$  называется *сжимаемым*, если у него есть представление в виде формулы (1), в которой только несколько компонент  $x[j]$  достаточно велики, а большинство остальных — малы.

*З а м е ч а н и я.* Надо отметить, что требование разреженного представления сигнала в некотором базисе распространенное, но необязатель-

---

<sup>1</sup>Использование термина *сигнал* из области телекоммуникаций — дань традиции. В действительности речь может идти о данных любой природы.

ное. В [28] оно опущено и заменено требованием о существовании многообразия, на котором лежит  $f$ . В других работах (например, в [29]) требование разреженности сигнала в некотором базисе ослабляют до разреженного представления в некотором избыточном словаре. Иногда к сигналу, кроме разреженного представления, применяются дополнительные ограничения, как например порождение этого представления случайным марковским полем [30]. В [31] рассмотрен случай, когда векторы  $y$  и  $x$  параметризованы бесконечным счетным или даже несчетным множеством.

**Трансформирующее кодирование и его неэффективность.** Тот факт, что сжимаемые сигналы хорошо аппроксимируются  $s$ -разреженными представлениями, лежит в основе трансформирующего кодирования, с которым многие уже сталкиваются даже в быту, используя JPEG, MP3, MPEG форматы представления изображений, звука и видео. В системах получения данных (например, цифровые фото- и видеокамеры) трансформирующее кодирование играет центральную роль: по полученной полной  $N$ -выборке сигнала  $f$  комплект коэффициентов преобразования  $\{x[j]\}$  вычисляется через  $x = \Psi^T f$ , после чего из  $x$  локализуют  $s$  больших компонент, а остальные  $N - s$  отбрасывают (подробности см., например, в [32]). В итоге кодируются сами  $s$  значений и номера их позиций в векторе  $x$ .

При обработке изображений обычно используется одно из следующих ортогональных преобразований: дискретное преобразование Фурье (ДПФ), дискретное косинусное преобразование (ДКП) или дискретное вейвлет-преобразование (ДВП).

Напомним, что ДПФ  $N$ -мерного сигнала  $f$ , записанного вектором, определяется как вектор  $\hat{f}$  с компонентами  $\hat{f}[k] = \sum_{j=0}^{N-1} f[j]e^{-2\pi ijk/N}$ , где  $i$  — мнимая единица. Это линейное обратимое преобразование с матрицей:

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N}} & e^{-\frac{4\pi i}{N}} & e^{-\frac{6\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-\frac{4\pi i}{N}} & e^{-\frac{8\pi i}{N}} & e^{-\frac{12\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-\frac{6\pi i}{N}} & e^{-\frac{12\pi i}{N}} & e^{-\frac{18\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)} & e^{-\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} & e^{-\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$



ДКП — ортогональное преобразование, тесно связанное с преобразованием Фурье, но оперирующее действительными числами. Оно задается похожей матрицей с элементами  $\cos k(j + \frac{1}{2})\frac{\pi}{N}$ .

ДВП основано на свертке сигнала с фильтрами высокой и низкой частот с последовательным прореживанием в два раза числа отсчетов. При этом прореженный результат свертки с фильтром низкой частоты можно рассматривать как уменьшенную очищенную от шума копию исходного сигнала и повторить над ней данную операцию. ДВП — тоже линейный оператор.

Аналогично определены соответствующие двумерные линейные обратимые преобразования, например двумерное преобразование Фурье над вектором  $N_1 \times N_2$  задается формулой

$$\hat{f}[k_1, k_2] = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} f[j_1, j_2] e^{-2\pi i j_1 k_1 / N_1} e^{-2\pi i j_2 k_2 / N_2}.$$

Для большинства изображений реального мира верно, что применение этих преобразований дает трансформированные сигналы с существенно меньшим количеством значительных компонент.

К сожалению, подход трансформирующего кодирования, при котором происходит “сначала полная выборка — потом сжатие”, имеет три врожденных недостатка.

- Во-первых, начальный размер выборки  $N$  может быть чрезвычайно большим, даже если размер  $s$  получаемого набора компонент является малым.
- Во-вторых, все  $N$  коэффициентов преобразования  $\{x[j]\}$  должны быть вычислены даже при том, что от большинства кроме  $s$  из них в результате откажутся.
- В-третьих, дополнительно должны быть закодированы местоположения  $s$  больших коэффициентов.

**Задача опознания со сжатием — Compressive Sensing.** Перечисленные выше недостатки трансформирующего кодирования снимаются при использовании нового подхода Compressive Sensing (CS) — опознания со сжатием за счет прямого получения сжатого представления сигнала без промежуточной стадии получения  $N$ -выборки [14, 15].

Рассмотрим общий линейный процесс измерения, который вычисляет  $m < N$  внутренних скалярных произведений между  $f$  и некоторой коллекцией векторов  $\{a_i\}_{i=1}^m$ :

$$y[i] = \langle a_i, f \rangle.$$

Соберем результаты  $y[i]$  в  $m \times 1$  вектор-столбец  $y$ , а из транспонированных векторов измерений  $a_i^T$  сформируем строки матрицы  $A$  размерности  $m \times N$ . Подставляя  $\Psi$  из (1), выражение для  $y$  можно переписать в виде

$$(2) \quad y = Af = A\Psi x = \Phi x,$$

где  $\Phi = A\Psi$  — матрица  $m \times N$ .

Другой возможный подход к измерению описан в [33], где каждым сенсором измеряется только один бит сигнала — знак проекции  $f$  на  $a_i$ :

$$y[i] = \text{sign}\langle a_i, f \rangle.$$

В этом случае вместо условия (2) рассматривается условие  $y^T \Phi x \geq 0$ .

Отметим, что рассматриваемые процессы измерения неадаптивны в том смысле, что матрица  $A$  фиксирована и не зависит от сигнала  $f$ .

Задача опознания со сжатием (Compressive Sensing) состоит в проектировании

- такой универсальной матрицы измерений  $A$ , что существенная информация о любом  $s$ -разреженном (или сжимаемом сигнале) не будет повреждена при сокращении размерности от  $f \in \mathbb{R}^N$  к  $y \in \mathbb{R}^m$ ;
- алгоритма реконструкции, восстанавливающего  $x$  (а следовательно, и  $f$ ) только по  $m \sim s$  измерениям (или по примерно такому же числу измерений, как передаваемое число коэффициентов при традиционном трансформирующем кодировании).

Формулу (2) не надо воспринимать как процесс “умножения” сигнала  $f$  на матрицу  $A$ . Важно подчеркнуть, что в парадигме CS этот процесс измерения обычно не производится отдельно, а является частью физического процесса получения данных, что позволяет не затрачивать лишних вычислительных мощностей и экономить энергию в устройствах-сенсорах. Конкретный вид матрицы  $A$  важен в расчетах при реконструкции сигнала по полученным сжатым данным. Например, если в задаче

есть техническая возможность прямого получения коэффициентов преобразования Фурье сигнала  $f$ , то, выбрав набор из  $m$  индексов, прямо получаем соответствующий вектор  $y$ , а строки матрицы  $A$  из (2) —  $a_i^T$  — соответствующие строки матрицы преобразования Фурье. Другой показательный пример можно найти на веб-сайте <http://dsp.rice.edu/cscamera>, где рассматривается однопиксельная сжимающая цифровая камера [34, 35], которая непосредственно (аналоговым образом за счет использования только линз и зеркал) получает  $m$  случайных проекций искомого изображения без предварительного сбора значений (получения данных) всех его  $N$  пикселей. Как проиллюстрировано на рис. 2, исходящие от картинки  $f$  световые волны отражаются от специального устройства цифровых микрозеркал (DMD), состоящего из массива  $N$  крошечных зеркал. (Такие устройства DMD присутствуют во многих компьютерных проекторах и проекционных телевизорах.) Отраженный свет собирается второй линзой и фокусируется на один фотодиод (PD) (один пиксель). Каждое микрозеркало может независимо ориентироваться или к фотодиоду (соответствует единице) или в сторону от фотодиода (соответствует нулю). Для того, чтобы собрать измерения, с помощью генератора случайных чисел (RNG) устанавливаются псевдослучайные ориентации микрозеркал, создающие измерительный вектор  $a_i$  из единиц и нулей. Напряжение на фотодиоде тогда равняется величине  $y[i]$ , которая является внутренним произведением между  $a_i$  и изображением  $f$ , т. е. происходит “оптическое суммирование” отраженных лучей. Процесс повторяется  $m$  раз для получения всех компонент  $y$ . Таким образом, получаем вектор измерений  $y$  из (2), причем умножение на матрицу производится за счет особого физического процесса измерения как его неотъемлемая часть.

### 3. Решение

**Проектирование универсальной матрицы измерений.** Матрица измерений  $A$  должна позволять реконструкцию сигнала  $f$  длины  $N$  по меньшему числу измерений  $m < N$  (по вектору  $y$ ). Поскольку  $m < N$ , то эта задача — плохо обусловленная. Если, однако,  $f$  —  $s$ -разреженный и местоположения  $s$  отличных от нуля компонент  $x$  известны, то задача

может быть разрешимой при  $m \geq s$ . Необходимое и достаточное условие разрешимости этой упрощенной задачи состоит в том, чтобы для некоторого  $0 < \lambda < \infty$  и для любого вектора  $z$ , у которого выделяются те же  $s$  ненулевых компонент, как и у  $x$ , выполнялись неравенства

$$(3) \quad \lambda^{-1} \|z\|_2 \leq \|\Phi z\|_2 \leq \lambda \|z\|_2,$$

т. е. матрица  $\Phi = A\Psi$  должна сохранять длины таких специфических  $s$ -разреженных векторов (в некотором смысле). (Здесь и далее  $\|z\|_\rho = \left(\sum_{j=1}^N |z[j]|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$ ,  $\rho = 1, 2$ .) Конечно, в общем случае местоположения  $s$  отличных от нуля компонент в  $x$  неизвестны. Однако выполнение условия (3) для произвольных  $2s$ -разреженных векторов  $z$  является достаточным для обеспечения возможности стабильного решения задачи для любого  $s$ -разреженного вектора  $x$ . В справедливости этого легко убедиться, проведя доказательство “от противного”. В качестве однозначного правила декодирования можно выбрать следующее: среди всех векторов  $x$  таких, что  $y = \Phi x$ , выбираем тот, у которого меньше всего ненулевых коэффициентов. Пусть у задачи есть два различных решения  $x'$  и  $x''$ . Очевидно, что каждое из них имеет не более чем  $s$  ненулевых компонент. Вектор  $\bar{x} = x' - x''$  является  $2s$ -разреженным, так как векторы  $x', x''$  —  $s$ -разреженные. Но в силу линейности  $\Phi\bar{x} = \Phi x' - \Phi x'' = 0$ , а значит, в силу (3) имеем  $\bar{x} = 0$ , т. е.  $x' = x''$ . Получили противоречие.

В литературе по CS чаще используется другое близкое (3) условие, называемое “Свойство ограниченной изометрии” (Restricted Isometry Property, RIP) [36]: матрица  $\Phi$  размерности  $m \times N$  обладает свойством RIP( $\delta, m$ ) с параметрами  $\delta \in (0, 1)$  и  $m \in \mathbb{N}$ , если для любого ненулевого  $m$ -разреженного вектора  $z$  выполняется

$$(4) \quad \sqrt{1 - \delta} \leq \frac{\|\Phi z\|_2}{\|z\|_2} \leq \sqrt{1 + \delta}.$$

Условие (3) в литературе называют “Модифицированное RIP” (MRIP).

Наряду со свойствами типа RIP в CS используется условие малости взаимной зависимости  $\mu(A, \Psi)$  строк  $\{a_i\}$  матрицы  $A$  и столбцов  $\{\psi_j\}$  матрицы  $\Psi$ :

$$\mu(A, \Psi) = \sqrt{N} \max_{i,j} \frac{|\langle a_i, \psi_j \rangle|}{\|a_i\|_2},$$

называемое “некогерентностью”  $A$  и  $\Psi$ , выполнение которого требует, чтобы строки матрицы  $A$  не могли редко представлять столбцы  $\Psi$  (и наоборот). В CS широко используется факт, что случайные матрицы  $A$  с большой вероятностью сильно некогерентны с любым фиксированным базисом  $\Psi$ . Например если строки матрицы  $A$  являются случайной выборкой из ортонормированного базиса, полученного после ортогонализации  $N$  случайных векторов равномерно и независимо выбранных из единичной сферы, то  $\mu(A, \Psi) \approx \sqrt{2 \log N}$ . Для  $s$ -разреженных векторов в [37] получено достаточное условие возможности с высокой вероятностью точного восстановления по  $m$  наблюдениям с матрицей  $A$ :

$$(5) \quad m \geq c \mu(A, \Psi)^2 s \log N,$$

где  $c$  — некоторая положительная постоянная. Для описанной выше случайной матрицы  $A$  имеем  $m \geq 2cs(\log N)^2$ .

В [38] указывается, что на практике достаточно часто хорошо работают системы с  $m \approx 4s$ .

Условия RIP( $\delta, 2s$ ) и MRIP( $\lambda, 2s$ ) неробастны в том смысле, что их выполнения недостаточно для восстановления

- произвольного  $s$ -разреженного сигнала при наблюдениях  $y$  с помехами или
  - сжимаемого сигнала с малыми, но ненулевыми  $(N - s)$  компонентами.
- В этих случаях достаточными являются условия RIP( $\delta, 3s$ ) или MRIP( $\lambda, 3s$ ) в том смысле (см. [38]), что

$$\|x - \hat{x}\|_1 \leq \text{const} \|x - x^*\|_1,$$

где  $\hat{x}$  — результат восстановления  $x$ , а  $x^*$  — вектор, полученный из  $x$  обнулением всех, кроме  $s$  наибольших по модулю, компонент. Условие большой степени некогерентности при этом является слишком консервативным, так как допустимая величина  $\mu(A, \Psi)$  связана с RIP( $\delta, 3s$ ) соотношением:  $\delta = (m - 1)\mu(A, \Psi)$ .

Прямое построение матрицы измерений  $A$  такой, чтобы  $\Phi = A\Psi$  обладала свойством RIP, требует проверки выполнения условия (4) для каждой из  $C_N^s = \frac{N!}{s!(N-s)!}$  возможных комбинаций положений  $s$  отличных от нуля компонент в вектор  $z$  длины  $N$ . Однако оказалось, что выполнение свойства RIP может быть достигнуто с высокой вероятностью просто за

счет выбора случайной матрицы в качестве  $A$  (рандомизации процесса наблюдения). При этом вектор результатов измерений  $y$  представляет собой набор  $t$  различных линейных комбинаций компонент  $f$  со случайно выбранными весами.

Случайная  $t \times N$  матрица измерений  $A$  с независимыми и одинаково распределенными (i.i.d.) элементами  $a[i, j]$  с нормальной плотностью распределения с нулевыми средними и дисперсией  $1/m$

$$a[i, j] \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$$

имеет два интересных и полезных свойства [14]:

- если  $0 < \delta < 1$  и

$$(6) \quad t \geq c_1 s \log(N/s),$$

то матрица  $A$  удовлетворяет  $\text{RIP}(\delta, t)$  с вероятностью  $\geq 1 - 2e^{-c_2 t}$ , где  $c_1, c_2 > 0$  — малые постоянные, зависящие только от  $\delta$  (следовательно,  $s$ -разреженные и сжимаемые сигналы длины  $N$  могут быть с высокой вероятностью восстановлены только по  $t \ll N$  случайным измерениям);

- матрица  $A$  **универсальна** в том смысле, что не только существенная информация о любом  $s$ -разреженном (или сжимаемом сигнале) не будет повреждена при сокращении размерности от  $f \in \mathbb{R}^N$  к  $y \in \mathbb{R}^t$ , но и матрица  $\Phi = A\Psi$  будет случайной матрицей с нормально распределенными i.i.d. элементами, и, таким образом,  $\Phi$  будет обладать свойством  $\text{RIP}(\delta, t)$  со столь же высокой вероятностью независимо от выбора ортонормированного базиса  $\Psi$ .

Результат о выполнении с высокой вероятностью условия  $\text{RIP}(\delta, t)$  из свойства (6) случайной матрицы  $A$  во многом опирается на существенно более ранние работы [39, 40].

Для CS можно использовать и другие случайные матрицы измерений: случайная выборка i.i.d. элементов  $a[i, j]$  по симметричному распределению Бернулли

$$P(a[i, j] = \pm 1/\sqrt{m}) = \frac{1}{2}$$

или по похожему распределению

$$a[i, j] = \begin{cases} +\sqrt{3/m} & \text{с вероятностью } \frac{1}{6} \\ 0 & \text{с вероятностью } \frac{2}{3} \\ -\sqrt{3/m} & \text{с вероятностью } \frac{1}{6} \end{cases}.$$

В [41] показано, как свойство (6) может быть легко выведено из известной леммы Джонсона-Линденштрауса [42], по которой любое множество из  $n$  точек в  $d$ -мерном евклидовом пространстве может быть вложено в  $m$ -мерное евклидовое пространство таким образом, что  $m \sim \log n$  и не зависит от  $d$ , а все взаимные попарные расстояния приблизительно сохраняются. Для перечисленных последних трех способов генерации случайной матрицы  $A$  обоснование ее универсальности и конкретные условия для выбора констант  $c_1$  и  $c_2$  приведены в [41]:

$$c_2 \leq c_0(\delta/2) - c_1 \left( 1 + \frac{1 + \log(12/\delta)}{\log(N/s)} \right), \quad c_0(\delta/2) = \frac{\delta^2}{16} - \frac{\delta^3}{48}.$$

Обоснование выполнения свойства RIP( $\delta, m$ ) для случайной матрицы  $\Phi$  в [41], следуя [43], использует возможность покрытия не более чем  $(12/\delta)^m$  шарами радиуса  $\delta/4$  каждого из  $C_N^m$  возможных  $m$ -мерных подмножеств множества  $\{z : \|z\|_2 = 1\}$  и базируется на доказательстве того, что

$$E\|\Phi z\|_2^2 = \|z\|_2^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^N$$

( $E$  — знак математического ожидания) и случайные величины  $\|\Phi z\|_2^2$  сконцентрированы строго около  $\|z\|_2^2$ :

$$\text{Prob}\{|\|\Phi z\|_2^2 - \|z\|_2^2| \geq \frac{\delta}{2}\|z\|_2^2\} \leq 2e^{-mc_0(\delta/2)}.$$

В литературе (см., например, [15, 38]) предлагаются и другие рандомизированные способы генерации матрицы измерений: равномерная случайная выборка  $N$  столбцов на единичной сфере в  $\mathbb{R}^m$ ; случайная выборка проектора  $P$  и его нормализация  $A = \sqrt{\frac{N}{m}}P$  или выбор по какому-нибудь другому субгауссовому распределению. Выполнение RIP( $\delta, m$ ) обеспечивается в каждом из этих случаев условием (6) со своей постоянной  $c_1$ , зависящей от выбранного способа генерации случайной матрицы  $A$ .

С ростом  $N$  существенной трудностью становится хранение  $m \times N$  элементов матрицы  $A$ , требующей  $\mathcal{O}(mN)$  единиц памяти. При простых правилах формирования матрицы  $A$  ее влияние можно снизить, например, используя “повторяющийся” датчик псевдослучайных чисел, повторно каждый раз вычисляя  $A$ . Другими примерами матриц, удовлетворяющих условиям RIP и MRIP, являются случайные “вырезки” по  $m$  строк из  $N \times N$  матриц дискретного преобразования Фурье (DFT) или матриц Вандермонда, соответствующих интерполяции в различных  $N$  точках. Для таких случайных матриц размер требуемой памяти может быть сокращен до  $\mathcal{O}(m \log N)$ . Если строки матрицы  $A$  являются случайной выборкой из транспонированных столбцов ортонормированного базиса, полученного после ортогонализации  $N$  случайных векторов равномерно и независимо выбранных из единичной сферы  $\mathbb{R}^N$ , то для выполнения с высокой вероятностью свойства  $\text{RIP}(\delta, m)$  достаточно выбрать  $m$ :

$$m \geq C s (\log N)^4.$$

Наиболее существенным недостатком свойства RIP является его труднопроверяемость при больших  $m$ . В настоящее время предпринимаются активные попытки по его замене на более конструктивные. Один из интересных примеров такой возможности описан в [44].

**Проектирование алгоритма реконструкции сигнала.** Алгоритм реконструкции сигнала должен по  $m$  измерениям (по вектору  $y$ ), случайной матрице измерений  $A$  (или по случайному закону, который ее генерировал) и базису  $\Psi$  восстановить сигнал  $f$  длины  $N$  или, что эквивалентно, соответствующий ему разреженный вектор коэффициентов  $x$ . Так как  $m < N$  в (2), то для  $s$ -разреженных сигналов имеется бесконечно много  $x'$ , которые удовлетворяют  $\Phi x' = y$ . Это объясняется тем, что если  $\Phi x = y$ , то  $\Phi(x + r) = y$  для любого вектора  $r$  из нулевого подпространства  $\mathcal{N}(\Phi)$  матрицы  $\Phi$ . Поэтому цель алгоритма реконструкции сигнала — найти вектор коэффициентов разреженного представления сигнала в  $(N - m)$ -размерном сдвинутом нулевом подпространстве  $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\Phi) + x$ .

*Реконструкция через минимизацию  $\ell_2$ -нормы.* Классический подход к решению обратных задач рассматриваемого типа состоит в том, чтобы найти в сдвинутом нулевом подпространстве  $\mathcal{H}$  вектор с наименьшей



нормой (энергией)  $\ell_2$

$$\hat{x} = \arg \min \|x'\|_2 : \quad \Phi x' = y.$$

Решение этой оптимизационной задачи может быть записано в удобной форме метода наименьших квадратов (МНК)

$$\hat{x} = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} y.$$

К сожалению, результат  $\ell_2$ -минимизации почти никогда не будет  $s$ -разреженным вектором, а будет содержать много отличных от нуля элементов.

*Реконструкция через минимизацию  $\ell_0$ -нормы.* Поскольку  $\ell_2$ -норма измеряет энергию сигнала, а не его разреженность, то можно рассмотреть задачу минимизации  $\ell_0$ -нормы, которая подсчитывает количество ненулевых компонент

$$\|x\|_0 = |\{i|x[i] \neq 0\}|.$$

(Строго говоря,  $\ell_0$  не является нормой, поскольку не удовлетворяет свойству однородности, но название “ $\ell_0$ -норма” широко используется.)

По результату решения модифицированной оптимизационной задачи

$$\hat{x} = \arg \min \|x'\|_0 : \quad \Phi x' = y$$

можно восстановить  $s$ -разреженный сигнал точно с высокой вероятностью, используя только  $m = s + 1$  i.i.d. случайных измерений [45]. К сожалению, задача оптимизации  $\ell_0$ -нормы невыпуклая и относится к комбинаторному типу, вычислительные процедуры по ее решению численно неустойчивы и  $NP$ -сложные, требуя огромного перебора всех  $C_N^s$  возможных вариантов размещения ненулевых элементов в  $x$ .

*Реконструкция через минимизацию  $\ell_1$ -нормы.* Удивительно, но оптимизация, основанная на  $\ell_1$ -норме

$$\hat{x} = \arg \min \|x'\|_1 : \quad \Phi x' = y,$$

с высокой вероятностью позволяет точно восстанавливать  $s$ -разреженные сигналы и хорошо приближать сжимаемые сигналы, используя только  $m \geq c_1 s \log(N/s)$  i.i.d. случайных измерений [14, 15]. Это задача выпуклой оптимизации, которую можно свести к задаче линейного программирования, известной как выбор базиса (basis pursuit) [46]:

$$\langle c, \tilde{x} \rangle \rightarrow \min : \quad \tilde{\Phi} \tilde{x} = y, \quad \tilde{x} \geq 0,$$

где

$$c = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = (\Phi, -\Phi).$$

Для решения можно использовать метод внутренней точки (вычислительная сложность порядка  $\mathcal{O}(N^3)$ ) или симплекс-метод (теоретически экспоненциальная сложность), который на практике оказывается относительно быстрым.

**Геометрическая интерпретация.** Геометрическое представление задачи Compressive Sensing в  $\mathbb{R}^N$  иллюстрирует, почему решение задачи  $\ell_2$ -оптимизации не помогает в восстановлении исходного разреженного сигнала, но сигнал может быть реконструирован с помощью  $\ell_1$ -оптимизации.

Набор всех  $s$ -разреженных векторов  $x$  в  $\mathbb{R}^N$  является сильно нелинейным пространством, состоящим из всех  $s$ -мерных гиперплоскостей, которые простираются по координатным осям, как показано при  $N = 3$  на рис. 3,а. Сдвинутое нулевое подпространство  $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\Phi) + x$  ориентировано под случайным углом, задаваемым рандомизацией в матрице  $\Phi$  (см. рис. 3,б). Результат минимизации  $\ell_2$  нормы — ближайшая к началу координат точка на  $\mathcal{H}$ , которая может быть найдена расширением гиперсферы ( $\ell_2$ -шара) до касания  $\mathcal{H}$ . Из-за случайной ориентации  $\mathcal{H}$  эта самая близкая к началу координат точка  $\hat{x}$  с высокой вероятностью будет далеко от осей координат и, следовательно, не будет ни  $s$ -разреженной, ни близкой к правильному ответу  $x$ . Напротив,  $\ell_1$ -шар на рис. 3,в является выпуклой комбинацией точек, лежащих на осях координат. Поэтому при расширении  $\ell_1$ -шара в трехмерном пространстве в контакт со сдвинутым двумерным нулевым подпространством  $\mathcal{H}$  сначала войдет точка, лежащая на осях координат ( $s = 1$ ), которая в точности совпадает с точкой расположения искомого разреженного вектора  $x$ . (На практике  $N, m, s \gg 3$  и трехмерные интуитивные рассуждения не должны вводить в заблуждение.)

**Другие алгоритмы реконструкции.** Сведение задачи  $\ell_1$ -оптимизации к задаче линейного программирования неудовлетворительно в практических задачах из-за большой вычислительной сложности. Наряду с этой задачей в литературе рассматриваются и другие методы с использованием  $\ell_1$  нормы. Например,  $\ell_1$  регуляризованный МНК, так называе-

мый подход LASSO, предложенный в [47] и независимо в [46] как BPDN (Basis Pursuit De-noising):

$$\hat{x}_\lambda = \arg \min \|\Phi x' - y\|_2^2 + \lambda \|x'\|_1.$$

В [48] предложена ее другая разновидность, основанная на переходе к двойственной задаче.

*Сглаженная  $\ell_0$ -норма (аппроксимация  $\ell_0$ -нормы).* В [49] предложен метод, основанный на приближении дельта-функции  $\delta(t)$  гладкой функцией  $e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$  при  $\sigma \rightarrow 0$ :

$$\|x\|_0 = N - \sum_i \delta(x[i]) \approx N - \sum_i e^{-\frac{(x[i])^2}{2\sigma^2}} = N - F(x, \sigma).$$

Для каждого  $\sigma$  решается задача

$$\hat{x}_\sigma = \arg \max F(x', \sigma) \quad : \quad \Phi x' = y,$$

которая является задачей невыпуклой оптимизации. Применение методов локальной оптимизации может дать решение только при условии хорошего начального приближения. В [49] предложено вместо решения этой задачи выбирать в качестве  $\hat{x}_\sigma$  для каждого значения  $\sigma$  результат нескольких итераций алгоритма проекции градиента [50]. Решение задачи восстановления получается как предел  $\hat{x}_\sigma$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

*Реконструкция через минимизацию невыпуклых регуляризаторов.* Помимо  $\ell_1$ -нормы используются и другие  $\ell_\rho$ -нормы при  $0 < \rho < 1$  [51–53]. Их сильная сторона — лучшее приближение  $\ell_0$ -нормы, в частности в [51] приводится пример, когда  $\ell_{1/2}$  существенно превосходит  $\ell_1$  по качеству восстановления. Слабая — они не являются выпуклыми функциями, что может приводить к попаданию в нежелательные локальные минимумы, с чем борются, используя методы типа Graduated Non-Convexity [52].

*Итеративные алгоритмы.* Для решения задачи восстановления исходного сигнала также в ряде работ были предложены алгоритмы итеративного взвешивания. В [54–56] для аппроксимации  $\ell_0$ -нормы рассматриваются взвешенные  $\ell_\rho$ -нормы  $(\sum_i w_i (x[i])^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$  при  $\rho$ , равном единице или двум. Например, в [54] при  $\rho = 2$  задача минимизации взвешенной нормы

$$\hat{x}_k = \arg \min (x')^T W_k x' \quad : \quad \Phi x' = y,$$

где  $W_k = \text{diag}(w_k[1], \dots, w_k[N])$ , решается аналитически:

$$\hat{x}_k = W_k^{-1} \Phi^T (\Phi W_k^{-1} \Phi^T)^{-1} y.$$

А далее итеративно в качестве следующего набора весовых коэффициентов выбираются

$$w_{k+1}[i] = (\hat{x}_k[i]^2 + \epsilon)^{p/2-1},$$

где  $\epsilon > 0$  — некоторая малая величина. Решение  $\hat{x}$  получается как предел  $\hat{x}_k$ .

В [57–61] для решения задачи восстановления исходного сигнала предложен ряд итеративных алгоритмов типа IST (Iterative Shrinkage Thresholding) вида:

$$\hat{x}_{k+1} = (1 - \beta)\hat{x}_k + \beta H(\hat{x}_k + \Phi^T(y - \Phi\hat{x}_k)),$$

где  $H$  — так называемая функция устранения шума (denoising function, Moreau прокси-отображение [61–63]), как правило, имеющая вид:

$$H(u) = \arg \min_t (\text{dist}(t, u) + \lambda L(t)).$$

Обычно выбирается расстояние  $\text{dist}(t, u) = \|t - u\|_2^2$ , а второе слагаемое прямо пропорционально  $L(t)$  — регуляризатору, функции штрафа за невыполнение какого-либо свойства, например,  $\|t\|_1$  (функция Хубера).

В [60, 61] предложены более эффективные модификации IST: быстрый IST алгоритм (Fast IST Algorithm) и двухшаговый IST (Two steps IST, TwIST), основанный на методе ускорения алгоритма оптимизации, предложенном в [50] под названием “тяжелый шарик” (в статье упоминается под названием TwSIM, Two-Step Iterative Method).

Похожий алгоритм рассматривался в [64] для восстановления изображения по некоторому набору коэффициентов преобразования Фурье. В качестве  $H$  выбрана  $H(u) = \Upsilon(F(\Upsilon^{-1}(u)))$ , где  $\Upsilon$  — дискретное преобразование Фурье, а  $F$  — оригинальный алгоритм устранения шума на изображении. В отличие от IST в [64] предложено добавлять к  $\hat{x}_k$  на каждой итерации затухающее дополнительное случайное возмущение, нерегулярная часть которого фильтруется алгоритмом  $F$  с параметрами, соответствующими добавляемому возмущению.

“Грубые” алгоритмы. Грубые алгоритмы — одни из самых быстрых алгоритмов восстановления  $x$  по измерениям  $y = \Phi x$ . Самый простой из них — выбор подходящего (Matching Pursuit, MP) [46, 65], на каждом шаге выделяет в  $y$  наиболее коррелированную строку  $\Phi$ . Эта простая идея легла в основу других более сложных грубых алгоритмов. Как правило, структура грубых алгоритмов такова:

1. Инициализация  $x_0 = 0$ ,  $r_0 = y$ ,  $k = 1$ ,  $\Lambda_0 = \emptyset$ .
2. Оценка невязки  $r_k = y - \Phi x_{k-1}$ .
3. По  $r_k$ ,  $\Phi$ ,  $y$  получить новую оценку  $x_k$ . Этот шаг в каждом алгоритме свой. Но обычно он имеет вид:
  - (а) Вычислить (каким-либо методом) один или несколько очередных индексов  $\{\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn_k}\}$  ненулевых компонент вектора  $x$ , еще не вошедших в  $\Lambda_k$ ,  $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \{\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn_k}\}$ ;
  - (б) составить матрицу  $\Phi_k$  из столбцов  $\Phi$  с соответствующими индексами из  $\Lambda_k$ ;
  - (в) оценить ненулевые величины вектора  $x_k$  (обозначим  $\hat{x}_k = x_k[\Lambda_k]$ ):  $\hat{x}_k = \arg \min \|\Phi_k \hat{x}_k - y\|_2$ . Компоненты с номерами не из  $\Lambda_k$  положить равными нулю.
4.  $k := k + 1$ , переходим к шагу 2, если не выполнено условие останова: например,  $\|r_k\| < \text{порог}$ .

В ОМР — ортогональном МР [66, 67] — одном из самых популярных грубых алгоритмов семейства МР, на шаге 3(а) в качестве  $\Lambda_k$  выбирают множество из одного индекса, равного

$$\arg \max_k |\langle r_k, \phi_i \rangle|,$$

где  $\phi_i$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Phi$ .

Регуляризованный ОМР (РОМР) [68] на шаге 3(а) выбирает множество индексов с помощью двух дополнительных шагов:

- вычислить множество  $J$  из  $s$  индексов с наибольшим значением скалярного произведения  $\langle r_k, \phi_i \rangle$ ;

- из всех подмножеств  $I$  множества  $J$  таких, что

$$|\langle r_k, \phi_i \rangle| \leq 2|\langle r_k, \phi_j \rangle| \quad \forall i, j \in I,$$

выбрать то, для которого  $(\Phi^T r)[I]$  имеет наибольшую  $\ell_2$ -норму.

CoSaMP (Compressive Sampling Matching Pursuit) [69] инспирирован алгоритмом ROMP и почти полностью его повторяет за исключением того, что в алгоритме выбираются не все индексы  $i$ , для которых  $|\langle r_k, \phi_i \rangle|$  превышает порог, а ровно  $2s$  самых больших. В качестве оценки  $x_k$  выбирается вектор, получающийся из решения

$$\arg \min \|\Phi_k \hat{x}_k - y\|_2$$

обнулением всех компонент, кроме  $s$  наибольших по модулю.

Метод Subspace Pursuit [70] представляет из себя CoSaMP, у которого добавляется не  $2s$  индексов на шаге 3(a), а только  $s$ . В алгоритме StOMP (Stagewise OMP) [71] на шаге 3(a) выбирается множество таких индексов  $i$ , что

$$|\langle r_k, \phi_i \rangle| > threshold_k,$$

где  $threshold_k$  — задаваемый на  $k$ -м шаге порог. В методе DThresh [72] условие отбора индексов выглядит так:

$$|\langle r_k, \phi_i \rangle| \geq \frac{\delta \|r^i\|}{\sqrt{s}}.$$

Древовидный вариант ТОМР (Tree-based OMP) предложен в [73] для поиска разреженного представления изображения вейвлетами.

В [30] предложен алгоритм LaMP (Lattice Matching Pursuit) для случая, когда сигнал порождается некоторым случайным марковским полем. Его схема отличается от общей тем, что вместо накопления индексов ненулевых компонент в  $\Lambda_k$  происходит полная переоценка множества этих индексов в соответствии с наиболее вероятной конфигурацией заданного марковского поля. В [74] описаны алгоритмы Gradient Pursuit и Conjugate Gradient Pursuit, в [75] — SSAMP (Sequentially Sparse Matching Pursuit).

В [76] предложен метод восстановления, основанный на алгоритме вероятностного вывода (Belief Propagation, BP), применяемого в графических моделях при заранее известных статистических зависимостях между компонентами  $x[i]$ . При наличии циклов в таких моделях алгоритм BP (в этом случае его называют циклический BP) может сходиться к локальному минимуму или не сходиться вообще, однако на практических задачах, как правило, дает очень хорошее приближение. Комбинаторные алгоритмы восстановления описаны в [77].

В [78] наряду с итеративным комбинаторным алгоритмом CS, основанном на использовании в качестве матрицы измерений специального вида матрицы связности определенного регулярного графа и имеющим вычислительную сложность порядка  $\mathcal{O}(N \log \frac{N}{s})$ , также проводится детальное сравнение разных подходов. Другая таблица сравнения эффективности основных алгоритмов восстановления сигнала представлена в [79].

#### 4. Практические примеры

1. Предположим, что исследуется спектрально разреженный сигнал с широким спектром

$$f(t) = \sum_{j=0}^N x[j] \exp^{i2\pi jt/N}, \quad t = 0, \dots, N - 1,$$

где  $N$  — очень большое число, но количество ненулевых компонент  $x[j]$  меньше либо равно  $s$  (которое будем предполагать сравнительно малым:  $s \ll N$ ). Пусть сигнал  $f(t)$  является суммой пяти синусоидальных функций и помехи:

$$f(t) = 10,7 \sin(2\pi \cdot 50t) + 20 \sin(2\pi \cdot 120t) + 31,5 \sin(2\pi \cdot 200t) + \\ + 23 \sin(2\pi \cdot 300t) + 25 \sin(2\pi \cdot 450t) + error$$

при  $t \in [0, 1)$ .

Рассмотрим задачу, в которой неизвестны пять ( $s = 5$ ) активных частот из интервала  $[0, 500]$  и соответствующие амплитуды. Заметим, что набор неизвестных активных частот совсем необязательно является подмножеством последовательности целых чисел. Задав возможную ширину

полосы пропускания  $[0, 500]$  по теории Найквиста/Шеннона, необходимо брать отсчеты с частотой  $2 \cdot 500 = 1000$ , т. е. для промежутка  $[0, 1)$  нужно выбрать не менее  $N = 1000$  отсчетов.

Новая парадигма CS гарантирует получение с высокой вероятностью точной информации о частотах и амплитудах по сравнительно небольшой  $m \sim s \log(N/s)$  выборке значений  $f(t)$ . Для рассматриваемого примера это значение ограничено  $4s \log_2(N/s)$  и может быть выбрано примерно равным

$$m \approx 4 \cdot 5 \cdot \log_2(1000/5) (= 153).$$

Более того, эти значения не должны как-то специально выбираться, алгоритм восстановления будет эффективно работать с почти любым их набором соответствующего размера. Для примера будем считать, что измерения производятся по закону

$$y = \Phi x,$$

в котором в качестве  $\Phi$  выбрана случайная матрица из  $\pm 1$ .

На рис. 4 приведен пример сигнала  $f(t)$  при  $s = 5$  с дополнительными случайными нормальнораспределенными помехами с дисперсией 0, 1. На рис. 5, *a* изображен сигнал  $f(t)$  в спектральной области. В качестве метода приближенного восстановления выбран  $\ell_1$ -регуляризованный метод наименьших квадратов:

$$\hat{x} = \min_x \|y - \Phi x\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

при значении  $\lambda = 0,01$ . Результат такого восстановления в спектральной области изображен на рис. 5, *b*. Самые большие по величине частоты соответствуют исходным, несмотря на существенное сокращение количества полученных отсчетов (данных) и негативное влияние шума вместе с приближенным характером алгоритма.

2. В качестве второго практического примера, следуя [34, 35], рассмотрим уже описанную выше однопиксельную сжимающую цифровую камеру, которая непосредственно получает  $m$  случайных линейных измерений без предварительного сбора значений всех  $N$  пикселей исходной картинки (см. рис. 2). Исходящие от фотографии человека с камерой световые волны  $f$ , проходя через первую линзу, попадают на массив мик-



розеркал, у которых есть два положения, отражающие свет или в направлении второй линзы, или в иную сторону. Поступающий на вторую линзу поток света фокусируется в одной точке PD (оптически суммируется) и далее эта “сумма” поступает на аналого-цифровой преобразователь (A/D) и кодируется набором битов как один пиксель, который в итоге и передается по каналу передачи данных. Процесс повторяется  $m$  раз для получения всех компонент  $y$ . Таким образом, получаем вектор измерений

$$y = Af,$$

причем умножение на матрицу производится не в каком-либо цифровом вычислительном устройстве, а за счет особого физического процесса измерения. В приемном устройстве (DSP) вектор измерений декодируется.

На рис. 6 показаны восстановленные изображения (б) и (в), полученные по исходной картинке (а) с помощью однопиксельной камеры. При этом восстановлении были использованы случайные измерения в количестве 20% и 40% по сравнению с количеством пикселей в исходном изображении. Изображения (а), (б) и (с), как и предполагалось, неодинаковы, качество (б) ниже, но все характерные детали переданы верно.

В дополнение к требованию меньшего количества измерений однопиксельная камера может отображать и волны с такой длиной, для которой трудно или дорого создать большой массив датчиков. Это устройство может также получать данные через интервалы времени, позволяющие реконструировать видео [34].

3. Одна из первых популярных задач, в которой удачно была применена парадигма Compressive Sensing, — получение медицинских изображений при магнито-резонансной томографии, МРТ. В [80, 81] описаны модели, в которых доступны измерению лишь некоторые из коэффициентов двумерного преобразования Фурье — те, которые находятся на лучах, исходящих из начала координат спектральной области (рис. 7, а). Ясно, что такая ситуация описывается уравнением

$$y = \Phi x + \xi,$$

где  $x$  — все коэффициенты Фурье, выписанные вектором, а матрица  $\Phi = (\phi_0^T, \dots, \phi_m^T)^T$  составлена по соответствующим различным единич-

ным векторам  $\phi_i$ . Задача заключается в восстановлении исходного изображения исследуемого человеческого внутреннего органа. Примеры восстановления тестовых изображений с помощью  $\ell_2$ - и  $\ell_1$ -оптимизации приведены на рис. 7, в, г.

В [64] использован фильтр  $F$ , убирающий шум с изображения. Таким образом, условие отсутствия шума на изображении  $I$  выглядит так:  $F(I) \approx I$ , что довольно вероятно для искомого изображения. В работе применяется метод, близкий к IST, в котором в качестве функции удаления шума используется

$$H(x) = \Upsilon(F(\Upsilon^{-1}(x))),$$

где  $\Upsilon$  — дискретное двумерное преобразование Фурье, записанное матрицей,  $x$  — коэффициенты Фурье, записанные вектором соответствующим образом.

4. При использовании Compressive Sensing для сжатия/восстановления полезно то свойство, что алгоритмы сжатия гораздо менее ресурсоемки, нежели алгоритмы реконструкции. Такая ситуация прямо противоположна той, которая в настоящее время присутствует, например, в области сжатия видео. Операция умножения на фиксированную матрицу  $A$  в (2) — относительно нетрудоемкая операция (например, по сравнению с традиционными методами кодирования видео), и ее можно использовать отдельно для быстрого кодирования перед передачей данных с маломощного устройства (например, мобильный телефон) на более высокопроизводительное (сервер). В этих случаях матрицу  $A$  разумно выбрать или случайной, или специально подобранной под задачу.

Современные стандарты сжатия видео определяют только алгоритм декодирования, не регламентируя метод кодирования. На сжимающий алгоритм накладывается лишь одно ограничение: результат сжатия должен раскодироваться алгоритмом декодирования. Для достижения сильной степени компрессии с сохранением хорошего качества может потребоваться с десятков проходов алгоритмов кодирования, большие вычислительные мощности и время.

В случае передачи видеоданных в режиме конференции по каналам связи вычислительная сложность не так сильно лежит на кодере, однако в традиционных алгоритмах сжатия передачи даже в онлайн режиме все

равно требования кодера к вычислительным мощностям могут в 5–10 раз превышать требования декодера.

В Compressive Sensing имеет место прямо противоположная ситуация. Это позволяет организовать передачу информации между мобильными устройствами ограниченной вычислительной мощности таким образом: осуществлять сжатие на мобильном устройстве, передавать на сервер, там с помощью мощных ресурсов сервера восстанавливать и заново сжимать информацию, но уже классическими алгоритмами, после чего передавать на другое мобильное устройство.

Например, в [82] описано применение идей Compressive Sensing в задаче получения сжатого видео методом простого умножения каждого кадра, записанного вектором, на новую матрицу  $A_k$ . Если все кадры сложить стопкой один к одному, получится трехмерный массив  $f$  из чисел, соответствующих яркости каждого пикселя, или из трехмерных векторов, обозначающих цвет. Согласно [82] такое представление хорошо кодируется трехмерными вейвлетами, поскольку разница между соседними кадрами обычно мала. Матрица измерений в этом случае будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_l \end{pmatrix},$$

и получаем

$$y = Af.$$

Как уже было сказано, в случае видео  $f$  допускает разреженное представление трехмерными вейвлетами  $f = \Psi x$ . Обозначив  $\Phi = A\Psi$ , получим классическую задачу восстановления разреженного  $x$ :  $y = \Phi x$ . Умножив найденный вектор  $x$  на  $A$ , получим те же кадры “стопкой”  $f$ .

5. Повышение четкости изображения (deblurring) — задача, возникающая, например, в астрономических приложениях [83]. Размытое изображение можно рассматривать как результат действия некоторого размывающего оператора  $A$  (свертка исходного изображения с некоторым окном). В [83] считается, что такой оператор известен, но, возможно,

необратим. Однако известно, что в некотором базисе  $\Psi$  изображение допускает разреженное представление.

В [84] рассматривается случай неизвестного размывающего оператора свертки и зашумленных измерений

$$y = g * x + \xi.$$

При целом ряде ортогональных преобразований (ДПФ, ДКП, вейвлет-преобразование) большинство изображений реального мира имеют разреженное представление в этом базисе. Это одна из ключевых идей использования свойства разреженности в задачах повышения четкости.

В [84] используется еще и другая идея. Если некоторые блоки похожи друг на друга, то их имеет смысл обрабатывать вместе. Если сложить “стопкой” соответствующие коэффициенты ортогональных преобразований таких блоков, получится 3D-массив, к которому применяется одномерное ортогональное преобразование по третьему измерению. Решение ищется минимизацией взвешенной суммы из ошибки и  $\ell_0$ -нормы полученного вектора с помощью алгоритма типа IST с  $L(t) = \|t\|_1$ .

6. В [85] описываются возможности применения парадигмы CS в задачах обучения.

Задача классификации заключается в отнесении некоторого входного вектора  $f$  к одному из нескольких заранее известных классов  $d$ . Задача обучения состоит в формировании правила классификации по заданной обучающей выборке пар  $(f_k, d_k)$ . При этом для близкого к  $f_k$  входа классификатор должен дать близкий к  $d_k$  выходной вектор.

Входные данные могут быть многомерными векторами значительной размерности, что может затруднить процесс построения хорошего классификатора из-за большой вычислительной сложности, с одной стороны, и с большей вероятностью приводить к таким дефектам, как переобучение ( $f$  хорошо классифицирует примеры, но плохо все другие вектора, даже близкие к ним). Для сокращения размерности применяются различные методы. В [85] предлагается метод сокращения размерности на основе принципов Compressive Sensing. Оказывается, что при решении вопроса об отнесении входного сигнала к тому или иному классу можно в случае априорной информации о разреженности сигналов не проводить

операции восстановления сигнала, а ограничиться решением аналогичной задачи в пространстве существенно меньшей размерности.

Рассмотрим задачу классификации векторов  $f$  большой размерности, которые имеют разреженное представление в некотором базисе. Предположим, что они могут быть обоснованно разделены на два класса, которые обозначим  $\pm 1$ . Идея основывается на том, что проектирования с использованием случайной матрицы  $A$  с большой вероятностью сохраняют в некотором смысле расстояния. При классификации важным свойством является линейная отделимость. Сохранение расстояний приводит к сохранению свойства линейной отделимости. Таким образом, если существует гиперплоскость, разделяющая классы, то с большой вероятностью будет существовать и гиперплоскость, разделяющая их проекции  $y = Af$ . В итоге предлагается обучить классификатор, разделяющий вектора  $y_k = Af_k$ , где пары  $(f_k, d_k)$ ,  $d_k \in \{-1, +1\}$ , — обучающая выборка. Использование классификатора предполагает умножение на матрицу  $A$  и классификацию полученного вектора.

Стоит отметить важный отличительный момент такого варианта использования принципов Compressive Sensing: сжатый вектор **не требует восстановления**, его обработка происходит сразу в сжатой форме.

В [86] рассматривается задача классификации, когда классифицируемый объект, записанный вектором  $u$ , может принадлежать сразу нескольким классам, а классов много. Ситуация принадлежности нескольким классам описывается вектором  $x$  из нулей и единиц, где  $x[j] = 1$ , если  $u$  принадлежит классу  $j$ , или нулю в противном случае. В задаче также делается предположение, что каждый объект принадлежит лишь небольшому количеству классов по сравнению с количеством самих классов. Вектор  $x$  может выглядеть, например, так:

$$x = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0).$$

Классический подход к построению такого классификатора заключается в подстройке параметров  $\theta$  отображения  $f(u, \theta)$  — классификатора — с целью минимизации функционала среднего риска

$$F(\theta) = \sum_k (f(u_k, \theta) - x_k)^2,$$

где пары  $(u_k, x_k)$  — некоторая обучающая выборка. В случае большого общего количества классов векторы  $x_k$  имеют соответствующую большую размерность, что делает задачу очень сложной в вычислительном плане.

Новый подход, описанный в [86], предлагает использовать для подстройки параметров  $\theta$  тестовую базу не из пар  $(u_k, x_k)$ , а из пар  $(u_k, y_k)$ , где  $y_k = \Phi x_k$  и  $\Phi$  — случайная матрица. Когда такой классификатор построен и на вход подается некоторый объект  $u$ , вычисляется  $y$  как  $f(u, \theta)$ , после чего решается задача восстановления разреженного  $x$  при условии  $y = \Phi x$  с помощью грубых алгоритмов (поскольку интересуемся самими классами, а не точным значением  $x$ ). Таким образом, сложность вычислений переносится с фазы обучения на фазу использования.

7. Другие применения: обнаружение металлических артефактов в стоматологических приложениях [87], аналогово-информационное преобразование [88], получение изображения с радара [89].

## 5. Заключение

Получение информации, основанное на Compressive Sensing (опознании со сжатием), может быть более эффективным, чем традиционное осуществление выборки для редких или сжимаемых сигналов. В CS хорошо известная оценка метода наименьших квадратов неадекватна для хорошей реконструкции сигнала, и потому используются другие типы выпуклой оптимизации. В последнее время область применения Compressive Sensing выходит далеко за пределы теории кодирования/декодирования, она уже включает в себя задачи классификации и обработки изображений. Причем в некоторых приложениях восстановление реально поступающих на вход сигналов не требуется вовсе, а обработка данных происходит только в сжатом виде.

В основной части статьи обсуждения фокусировались на дискретных сигналах  $f$ , но парадигма Compressive Sensing (Compressive Sampling) применяется и к  $s$ -разреженным (или сжимаемым) аналоговым сигналам  $f(t)$ , которые могут быть представлены или приближены, используя только  $s$  из  $N$  возможных элементов некоторого непрерывного базиса или словаря  $\{\psi_j(t)\}_{j=1}^N$ . В то время как каждый базисный элемент  $\psi_j(t)$  может иметь большой разброс частот (и, таким образом, высокий

уровень Nyquist Rate), аналоговый сигнал  $f(t)$  имеет только  $s$  степеней свободы и, таким образом, также может быть измерен в существенно меньшем количестве точек [88, 90].

## Список литературы

1. *Граничин О.Н., Кияев В.И.* Информационные технологии в управлении. М.: Изд-во Бином, 2008.
2. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987.
3. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
4. *Granichin O.N.* Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. Automat. Contr. Oct. 2004. V. 49. P. 1830–1835.
5. *Fisher R.A.* The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.
6. *Льюнг Л., Сёдерстрём Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
7. *Цыпкин Я.З.* Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995.
8. *Györfi L.* Stochastic approximation from ergodic sample for linear regression // Z. Wahrscti. Verw. Geb. 1980. V. 54. P. 47–55.
9. *Krieger A., Masry E.* Convergence analysis of adaptive linear estimation for dependent stationary processes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1988. V. 34. P. 177–182.
10. *Young P.C.* Recursive Estimation and Time-Series Analysis. An Introduction. Berlin–Heidelberg: Springer, 1984.
11. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
12. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, устойчивость) // АиТ. 1979. № 3. С. 71–84.



13. *Поляк Б.Т.* Новый метод типа стохастической аппроксимации // *АиТ.* 1990. № 7. С. 98–108.
14. *Candes E., Romberg J., Tao T.* Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information // *IEEE Trans. Inform. Theory.* Feb. 2006. V. 52. No. 2. P. 489–509.
15. *Donoho D.* Compressed sensing // *IEEE Trans. Inform. Theory.* Apr. 2006. V. 52. No. 4. P. 1289–1306.
16. *Кашин Б.С., Темляков В.Н.* Замечание о задаче сжатого измерения // *Мат. заметки.* 2007. Т. 82. № 6. С. 829–837.
17. *Claerbout J.F., Muir F.* Robust modeling with erratic data // *Geophysics.* Oct. 1973. V. 38. No. 5. P. 826–844.
18. *Santosa F., Symes W.W.* Linear inversion of band-limited reflection seismograms // *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 1986. V. 7. No. 4. P. 1307–1330.
19. *Граничин О.Н.* Оптимальное управление линейным объектом с нерегулярными ограниченными помехами // В сб. Тез. докл. и сообщений Всесоюз. конф. “Теория адаптивных систем и её применения”. М.–Л.:ВИНИТИ, 1983. С. 26.
20. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // *АиТ.* 1984. № 5. С. 39–46.
21. *Dahlem M., Pearson J.B.*  $\ell_1$  optimal feedback controllers for MIMO discrete systems // *IEEE Trans. Automatic Control.* 1987. V. 32. No. 4. P. 314–322.
22. *Baraniuk R.G.* Compressive Sensing // *IEEE Signal Processing Magazine.* July 2007. V. 52. No. 2. P. 118–120,124.
23. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983.
24. *Котельников В.А.* О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический комитет. Материалы

к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. 1933. Репринт статьи в журн. УФН. 2006. 176:7. С. 762–770.

25. *Kupfmuller K.* Uber die dynamik der selbsttatigen verstärkungsregler // Elektrische Nachrichtentechnik. 1928. V. 5. No. 11. P. 459–467.
26. *Nyquist H.* Certain topics in telegraph transmission theory // Trans. AIEE. Apr. 1928. V. 47. P. 617–644.
27. *Shannon C.E.* Communication in the presence of noise // Proc. Institute of Radio Engineers. Jan. 1949. V. 37. No. 1. P. 10–21.
28. *Wakin M.* Manifold-based Signal Recovery and Parameter Estimation From Compressive Measurements. Preprint. Colorado School of Mines. 2008.
29. *Rauhut H., Schnass K., Vandergheynst P.* Compressed Sensing and Redundant Dictionaries // IEEE Trans. Info. Theory. May 2008. V. 54. No. 5. P. 2210–2219.
30. *Cevher V., Duarte M., Hegde C., Baraniuk R.* Sparse Signal Recovery Using Markov Random Fields // Proc. of the Workshop on Neural Information Processing Systems (NIPS). Dec. 2008.
31. *Mishali M., Eldar Y.C* Reduce and Boost: Recovering Arbitrary Sets of Jointly Sparse Vectors // IEEE Trans. on Signal Processing. Oct. 2008. V. 56. No. 10. P. 4692–4702.
32. *Taubman D.S., Marcellin M.* V JPEG 2000: Image Compression Fundamentals, Standards and Practice. Kluwer Academic. Norwell. MA, 2001.
33. *Boufounos P.T., Baraniuk R.G.* 1-Bit Compressive Sensing // 42nd Conf. Inf. Sc. Systems (CISS). Princeton. NJ: March 2008. P. 19–21.
34. *Takhar D., Bansal V., Wakin M., Duarte M., Baron D., Laska J., Kelly K.F., Baraniuk R.G.* A compressed sensing camera: New theory and an implementation using digital micromirrors // Proc. Comput. Imaging IV SPIE Electronic Imaging. San Jose: Jan. 2006.

35. *Duarte M.F., Davenport M.A., Takhar D., Laska J. N., Ting S., Kelly K. F., Baraniuk R. G.* Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling // IEEE Signal Processing Magazine. March. 2008. V. 25. No. 2. P. 83–91.
36. *Candes E.J.* The restricted isometry property and its implications for compressed sensing // Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Serie I. 2008. 346. 589592.
37. *Candes E., Romberg J.* Sparsity and incoherence in compressive sampling // Inverse Problems. 2007. V. 23. No. 3. P. 969–985.
38. *Candes E., Wakin M.* People hearing without listening: An Introduction to Compressive Sampling // IEEE Signal Processing Magazine. 2008. V. 25. No. 2. P. 21–30.
39. *Кашин Б.С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1977. Т. 42. № 2. С. 334–351.
40. *Гарнаев А.Ю., Глушкин Е.Д.* О поперечниках евклидова шара // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 5. С. 200–204.
41. *Baraniuk R., Davenport M., DeVore R., Wakin M.* A simple proof of the restricted isometry property for random matrices (aka “The Johnson-Lindenstrauss Lemma Meets Compressed Sensing”) // Constructive Approximation. 2007. V. 28. No. 3. P. 253–263.
42. *Johnson W., Lindenstrauss J.* Extensions of Lipschitz mapping into a Hilbert space // Conf. in Modern Analysis and Probability. 1984. P. 189–206.
43. *Achlioptas D.* Database-friendly random projections // Proc. ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symp. on Principles of Database Systems. 2001. P. 274–281.
44. *Juditsky A., Nemirovski A.* On Verifiable Sufficient Conditions for Sparse Signal Recovery via  $\ell_1$  minimization. Preprint. 2010 [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0809.2650>

45. *Baron D., Wakin M.B., Duarte M., Sarvotham S., Baraniuk R.G.* Distributed Compressed Sensing. 2005 [Online]. Available: <http://dsp.rice.edu/cs/DCS112005.pdf>
46. *Chen S.S., Donoho D.L., Michael, Saunders M.A.* Atomic decomposition by basis pursuit // SIAM J. Scientific Computing. 2001. V. 43. No. 1. P. 129–159.
47. *Tibshirani R.* Regression shrinkage and selection via the Lasso // J. Royal. Statist. Soc B. 1996. V. 58. No. 1. P. 267–288.
48. *Chretien S.* An alternating  $l_1$  approach to the compressed sensing problem // IEEE Signal Processing Letters. Feb. 2010. V. 17. No. 2. P. 181–184.
49. *Mohimani H., Babaie-Zadeh M., Jutten C.* A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $\ell_0$  norm // IEEE Trans. Signal Processing. Jan. 2009. V. 57. No. 1. P. 289–301.
50. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
51. *Chartrand R.* Exact reconstructions from surprisingly little data // IEEE Signal Process. Lett. 2007. V. 14. P. 707–710.
52. *Chartrand R.* Fast algorithms for nonconvex compressive sensing: MRI reconstruction from very few data // IEEE Int. Sympos. on Biomedical Imaging (ISBI). 2009. P. 1349–1360.
53. *Saab R., Chartrand R., Yilmaz O.* Stable sparse approximations via nonconvex optimization // Proc. 33rd Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP). 2008. P. 3885–3888.
54. *Chartrand R., Yin W.* Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing // IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP). Las Vegas, Nevada, USA. April. 2008.
55. *Daubechies I., DeVore R., Fornasier M., Gunturk S.* Iteratively reweighted least squares minimization: proof of faster than linear rate for sparse recovery // 42nd Annual Conf. on Information Sciences and Systems. 19-21 March 2008. P. 26–29.

56. *Wipf D., Nagarajan S.* Iterative Reweighted 1 and 2 Methods for Finding Sparse Solutions. UC San Francisco. Technical Report. 2008.
57. *Bredies K., Lorenz D.A.* Iterated hard shrinkage for minimization problems with sparsity constraints //SIAM J. on Scientific Computing. March 2008. V. 30. No. 2. P. 657–683.
58. *Herrity K.K., Gilbert A.C., Tropp J.A.* Sparse approximation via iterative thresholding // ICASSP 2006 Proc. 14-16 May 2006. V. 3. P. 624–627.
59. *Ma J.* Improved Iterative Curvelet Thresholding for Compressed Sensing. Preprint. 2009 [Online]. Available:  
<http://dsp.rice.edu/sites/dsp.rice.edu/files/cs/ISTcs2.pdf>
60. *Beck A., Teboulle M.* A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems // SIAM Journal on Imaging Sciences. Jan. 2009. V. 2. No. 1. P. 183–202.
61. *Bioucas-Dias J., Figueiredo M.* A new TwIST: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration // IEEE Trans. on Image Processing. Dec. 2007. V. 16. No. 12. P. 2992–3004.
62. *Combettes P.L., Wajs V.R.* Signal recovery by proximal forward-backward splitting // SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation. 2005. V. 4. No. 4. P. 1168–1200.
63. *Combettes P.L., Pesquet J-Ch.* Proximal Splitting Methods in Signal Processing. Preprint. 2010 [Online]. Available:  
<http://arxiv4.library.cornell.edu/abs/0912.3522>
64. *Egiazarian K., Foi A., Katkounik V.* Compressed sensing image reconstruction via recursive spatially adaptive filtering // Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing, ICIP 2007. San Antonio, Texas, USA. 16-19 September 2007. P. 549–552.
65. *Mallat S., Zhang Z.* Matching pursuit with time-frequency dictionaries // IEEE Trans. on Signal Processing. Dec 1993. V. 41. No. 12. P. 3397–3415.

66. *Tropp J., Gilbert A.C.* Signal Recovery from Partial Information via Orthogonal Matching Pursuit. Apr. 2005 [Online]. Available: [www-personal.umich.edu/~jtropp/papers/TG06-Signal-Recovery.pdf](http://www-personal.umich.edu/~jtropp/papers/TG06-Signal-Recovery.pdf).
67. *Davenport M.A., Wakin M.B.* Analysis of Orthogonal Matching Pursuit Using the Restricted Isometry Property. Preprint. 2010 [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0909.0083>
68. *Needell D., Vershynin R.* Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit // Foundations of Computational Mathematics. 2009. V. 9. P. 317–334.
69. *Needell D., Tropp J.A.* CoSaMP: Iterative Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Samples // Appl. Comp. Harmonic Anal. 2008. V. 26. P. 301–321.
70. *Dai W., Milenkovic O.* Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction // IEEE trans. on Info. Theory. 2009. V. 55. No. 5. P. 2230–2249.
71. *Donoho D.L., Tsaig Y., Drori I., Starck J.-L.* Sparse Solution of Underdetermined Linear Equations by Stageswise Orthogonal Matching Pursuit. Stanford Univ. Tech. Rep. 2006 [Online]. Available: <http://stat.stanford.edu/idrori/StOMP.pdf>
72. *Cohen A., Dahmen W., DeVore R.* Instance Optimal Decoding by Thresholding in Compressed Sensing. Preprint. 2008 [Online]. Available: <http://www.igpm.rwth-aachen.de/Download/reports/pdf/IGPM289.pdf>
73. *La C., Minh N.D.* Tree-Based orthogonal matching pursuit algorithm for signal reconstruction // IEEE Int. Conf. on Image Processing. 8-11 Oct. 2006. P. 1277–1280.
74. *Blumensath T., Davies M.E.* Gradient pursuits // IEEE Trans. on Signal Processing. June 2008. V. 56. No. 6. P. 2370–2382.
75. *Berinde R., Indyk P.* Sequential Sparse Matching Pursuit. Allerton: MIT. 2009 [Online]. Available: <http://people.csail.mit.edu/indyk/ssmp.pdf>

76. *Baron D., Sarvotham S., Baraniuk R.G.* Bayesian Compressive Sensing via Belief Propagation. Dec 2008. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0812.4627>.
77. *Cormode G., Muthukrishnan S.* Combinatorial Algorithms for Compressed Sensing. Berlin–Heidelberg: Springer, 2006.
78. *Jafarpour S., Xu W., Hassibi B. Calderbank R.* Efficient and robust compressed sensing using optimized expander graphs // IEEE Trans. Info. Theory. 2009. V. 55. No. 9. P. 4299–4308.
79. *Berinde R., Indyk P., Ruzic M.* Practical Near-optimal sparse recovery in the L1 norm // 46th Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing. Allerton, 23-26 Sept. 2008. P. 198–205.
80. *Lustig M., Donoho D.L., Santos J.M., Pauly J.M* Compressed sensing MRI // IEEE Signal Processing Magazine. March 2008. V. 25. No. 2. P. 72–82.
81. *Candes E. J., Romberg J.* Practical signal recovery from random projections // Proc. SPIE Computational Imaging. 2005. V. 5674, P. 76-86.
82. *Wakin M., Laska J., Duarte M., Baron D., Sarvotham S., Takhar D., Kelly K., Baraniuk R.* Compressive imaging for video representation and coding // Proc. Picture Coding Sympos. – PCS 2006. Beijing. China. Apr. 2006. [Online]. Available: <http://www.mines.edu/mwakin/papers/pcs-camera.pdf>
83. *Ma J., Le Dimet F.X.* Deblurring from highly incomplete measurements for remote sensing // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing. March 2009. V. 47. No. 3. P. 792–802.
84. *Katkovnik V., Egiazarian K.* Nonlocal Image Deblurring: Variational Formulation with Nonlocal Collaborative L0 Norm Prior // Int. Workshop on Local and Non-Local Approximation in Image Processing. 19-21 Aug. 2009. P. 46–53.
85. *Calderbank R., Jafarpour S., Robert Schapire R.* Compressed Learning: Universal Sparse Dimensionality Reduction and Learning in the Measurement Domain. Preprint. 2009 [Online]. Available: <http://dsp.rice.edu/files/cs/cl.pdf>

86. *Hsu D., Langford J., Kakade S., Zhang T.* Multi-label Prediction via Compressed Sensing. Preprint. 2009 [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0902.1284>
87. *Jiyoung C., Minwoo K., Won S., Jong .C.Y.* Compressed sensing metal artifact removal in dental CT // IEEE Int. Sympos. on Biological Imaging. June 29. 2009. P. 334–337.
88. *Kirolos S., Laska J., Wakin M., Duarte M., Baron D., Ragheb T., Massoud Y., Baraniuk R.G.* Analog-to-information conversion via random demodulation // Proc. IEEE Dallas Circuits Systems Workshop. Oct. 2006. P. 71–74.
89. *Baraniuk R., Steeghs P.* Compressive radar imaging // IEEE Radar Conf. April 2007. P. 128–133.
90. *Vetterli M., Marziliano P., Blu T.* Sampling signals with finite rate of innovation // IEEE Trans. Signal Processing. June 2002. V. 50. No. 6. P. 1417–1428.



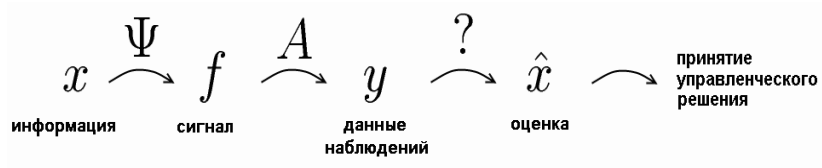


Рис. 1. Схема процесса получения и обработки данных.

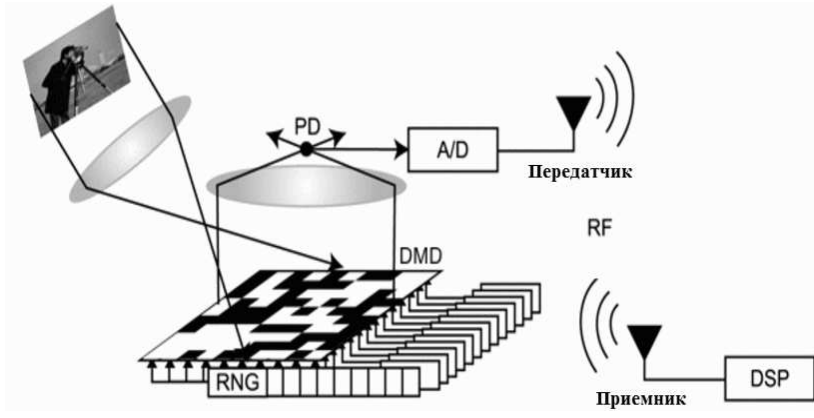


Рис. 2. Схема однопиксельной камеры [34].

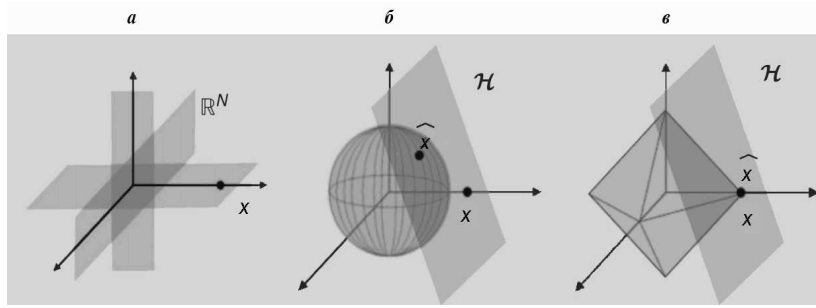


Рис. 3.  $a$  — пространство  $2s$ -разреженных векторов в  $\mathbb{R}^3$  состоит из трех плоскостей, содержащих по две координатные оси;  $b$  —  $\ell_2$ -минимизация находит неразрезанный вектор  $\hat{x}$  далекий от  $x$ ;  $c$  —  $\ell_1$ -минимизация находит разреженную точку  $\hat{x}$  контакта  $\ell_1$ -шара с гиперплоскостью  $\mathcal{H}$ , с высокой вероятностью совпадающую с  $x$ .

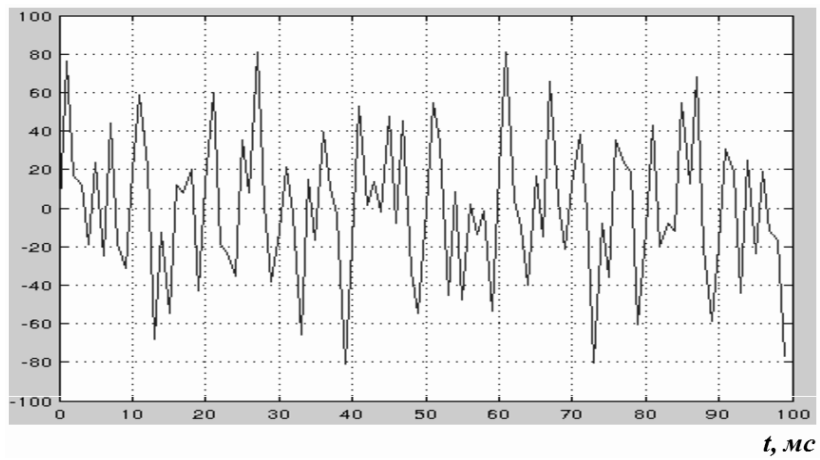


Рис. 4. 5-разреженный сигнал с помехой.

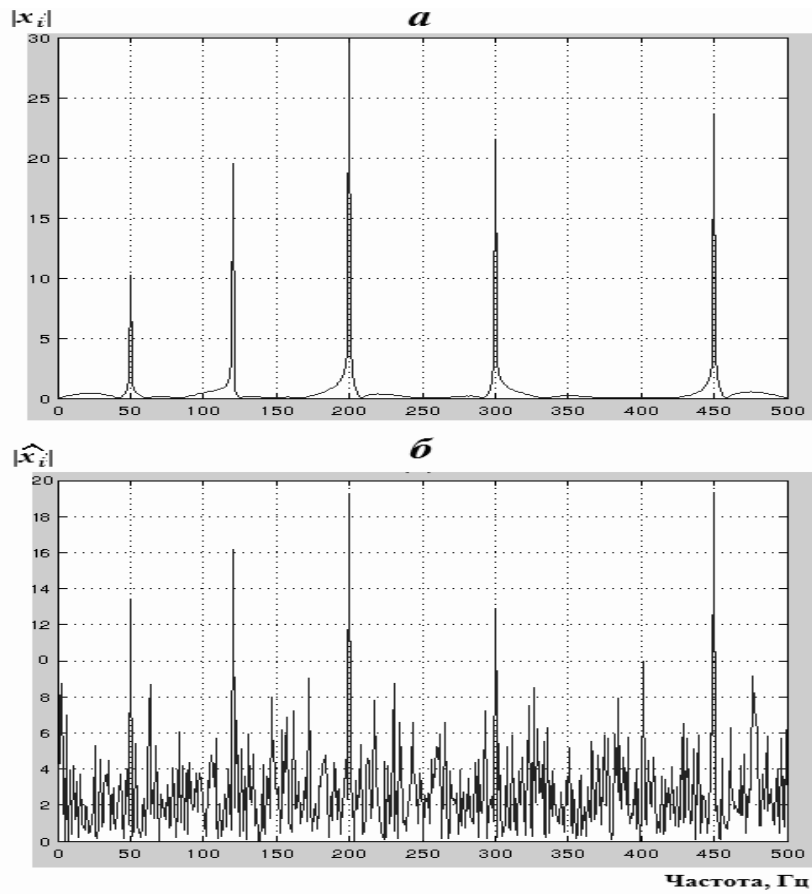


Рис. 5. Определение частот и амплитуд 5-разреженного сигнала. Исходный (а) и восстановленный (б) сигналы в спектральной области.

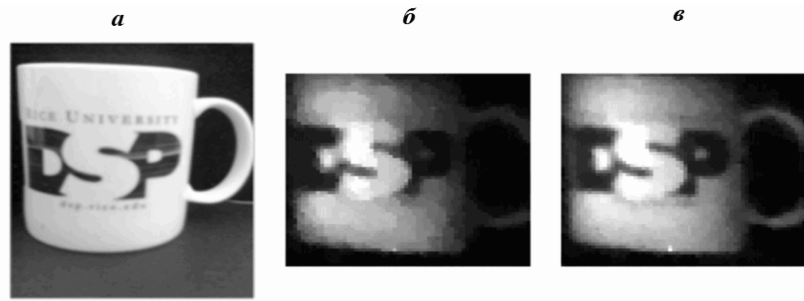


Рис. 6. *a* — обычное черно-белое цифровое изображение ( $N = 64 \times 64 = 4096$  пикселей); *б* — изображение, реконструированное по  $m = 800$  случайным измерениям однопиксельной камерой (20 % измерений); *в* —  $m = 1600$  (40 % измерений).

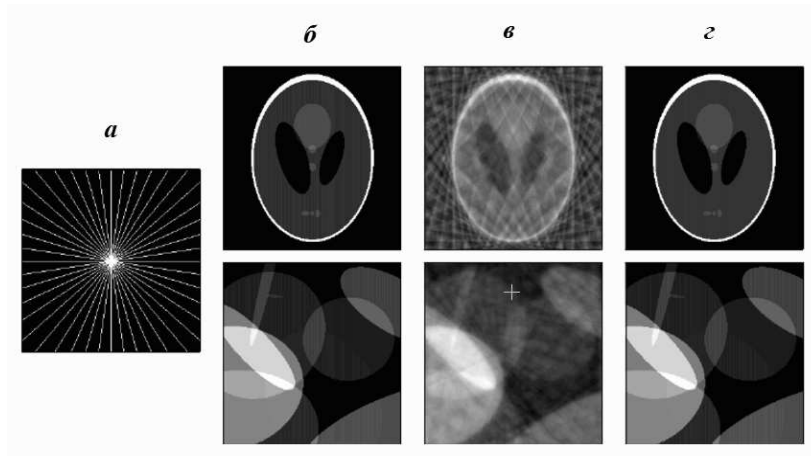


Рис. 7. Точное восстановление тестовых изображений “призрак Шеппа-Логана” и набора эллипсов.  $a$  — доступные для изменения коэффициенты в спектральной области образуют радиальные лучи;  $b$  — исходное тестовое изображение;  $v$  — восстановление с использованием  $\ell_2$ -минимизации;  $z$  — восстановление с использованием  $\ell_1$ -минимизации.

Рис. 1. Схема процесса получения и обработки данных.

Рис. 2. Схема однопиксельной камеры [34].

Рис. 3.  $a$  — пространство  $2s$ -разреженных векторов в  $\mathbb{R}^3$  состоит из трех плоскостей, содержащих по две координатные оси;  $b$  —  $\ell_2$ -минимизация находит неразрезанный вектор  $\hat{x}$  далекий от  $x$ ;  $v$  —  $\ell_1$ -минимизация находит разреженную точку  $\hat{x}$  контакта  $\ell_1$ -шара с гиперплоскостью  $\mathcal{H}$ , с высокой вероятностью совпадающую с  $x$ .

Рис. 4. 5-разреженный сигнал с помехой.

Рис. 5. Определение частот и амплитуд 5-разреженного сигнала. Исходный ( $a$ ) и восстановленный ( $b$ ) сигналы в спектральной области.

Рис. 6.  $a$  — обычное черно-белое цифровое изображение ( $N = 64 \times 64 = 4096$  пикселей);  $b$  — изображение, реконструированное по  $m = 800$  случайным измерениям однопиксельной камерой (20 % измерений);  $v$  —  $m = 1600$  (40 % измерений).

Рис. 7. Точное восстановление тестовых изображений “призрак Шеппа-Логана” и набора эллипсов.  $a$  — доступные для изменения коэффициенты в спектральной области образуют радиальные лучи;  $b$  — исходное тестовое изображение;  $v$  — восстановление с использованием  $\ell_2$ -минимизации;  $z$  — восстановление с использованием  $\ell_1$ -минимизации.