

©2009 г. А. Т. Вахитов, О. Н. Граничин, д-р физ.-мат. наук,
Л. С. Гуревич
(Санкт-Петербургский государственный университет)

АЛГОРИТМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ПРОБНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ НА ВХОДЕ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассматривается применение рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе и двумя измерениями на итерации для решения задачи оптимизации нестационарного функционала без ограничений. Установлена верхняя граница среднеквадратичной невязки при условиях однократной дифференцируемости функционала и почти произвольных помех. Работоспособность алгоритма иллюстрируется примером стабилизации получающихся оценок для многомерного случая при зависимых помехах в наблюдениях.

©2009 г. А. Т. Вахитов, О. Н. Граничин, д-р физ.-мат. наук,
Л. С. Гуревич
(Санкт-Петербургский государственный университет)

АЛГОРИТМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ПРОБНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ НА ВХОДЕ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассматривается применение рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе и двумя измерениями на итерации для решения задачи оптимизации нестационарного функционала без ограничений. Установлена верхняя граница среднеквадратичной невязки при условиях однократной дифференцируемости функционала и почти произвольных помех. Работоспособность алгоритма иллюстрируется примером стабилизации получающихся оценок для многомерного случая при зависимых помехах в наблюдениях.

1. Введение

Проблема оптимизации того или иного функционала среднего риска встает во многих практических приложениях. Хотя иногда экстремальные значения можно найти аналитически, зачастую инженерные системы имеют дело с неизвестным функционалом, значение которого или его градиента можно вычислять в задаваемых точках. Также встречаются задачи, в которых оптимизируемый функционал может изменяться во времени и точка его экстремума может дрейфовать. В таких случаях постановки задачи могут отличаться в зависимости от цели оптимизации и информации, доступной для измерения. Обычно рассматривают два варианта поведения дрейфа точки минимума функционала: когда есть некоторый асимптотический функционал, к которому другие сходятся со временем, или когда такого функционала нет [1]. В этой работе рассматривается только более сложный второй случай. Для первого — применимы подходы детально разработанные ранее и описанные в [2].

Задачи оптимизации можно рассматривать в постановках с дискретным и непрерывным временем. В нашей работе мы ограничимся рассмотрением моделей первого типа. Пусть $f(x, n)$ — функционал, который необходимо минимизировать в момент времени n ($n \in \mathbf{N}$). В книге Б. Т. Поляка [3] для решения подобных проблем детально рассматриваются методы Ньютона и градиентный, которые применимы в случае дважды дифференцируемого функционала при условии $r < \nabla_x^2 f(x, n) < R$. Оба метода полагаются на возможность прямого измерения градиента функционала в произвольной точке.

В реальном мире измерения всегда подразумевают наличие помех. Иногда теоретически обоснованные алгоритмы на практике не дают состоятельных оценок точки экстремума. Устойчивость алгоритма к помехам очень важна практически во всех инженерных приложениях. Для решения задач в условиях помех в пятидесятые годы появляются методы стохастической аппроксимации Роббинса–Монро и Кифера–Вольфовица, история развития которых детально описана в [2–4]. Общий подход для поиска экстремума, используемый в алгоритмах стохастической аппроксимации, может быть формализован следующим образом:

$$(1) \quad \hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - \alpha_n \hat{g}_n(\hat{\theta}_n),$$

где $\{\hat{\theta}_n\}$ — генерируемая алгоритмом последовательность оценок точки экстремума, g_n — псевдоградиент (заменяющий градиент из метода Ньютона), который “в среднем” должен совпадать с градиентом и близок к нулю, когда его аргумент стремится к точке экстремума. Важными свойствами алгоритмов типа (1) являются простота и рекуррентность, в силу которых они стали активно применяться в разных областях науки и техники.

Алгоритмы стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе и с одним или двумя на каждой итерации зашумленными измерениями минимизируемой функции появились в работах различных исследователей конце 80-х, начале 90-х гг. XX века [5–9]. В англоязычной литературе они получили название Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA) [8]. Эти алгоритмы известны состоятельностью оценок при почти произвольных помехах наблюдения [2], которые должны быть только в некотором смысле ограничены

и независимы на каждой итерации с пробным случайным возмущением на входе. Более того, количество измерений исследуемой функции на одной итерации составляет всего 1 или 2 и не зависит от размерности d пространства состояний. При этом они имеют оптимальный порядок асимптотической скорости сходимости (по числу итераций) [7], что позволяет говорить о существенном повышении скорости сходимости в многомерном случае ($d \gg 1$) по сравнению с классическими алгоритмами, оценивающими градиент через конечную разность, так как у них количество измерений на каждом шаге прямо пропорционально d .

Алгоритмы стохастической аппроксимации первоначально обосновывались в условиях минимизации стационарных функционалов. В [3] приведена версия алгоритма градиентного спуска для нестационарного случая и доказана его состоятельность в некотором смысле. Дальнейшее развитие эти идеи получили в статье [1] для более общего случая. В [2] было предложено использовать для оптимизации нестационарных функционалов алгоритмы типа стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе, которые могли бы быть более эффективными, так как они полагаются только на одно или два измерения на каждом шаге, а значит, способны быстрее адаптироваться к изменениям функционала. Кроме того, как уже отмечалось, они более устойчивы к помехам. В [10] реализация этой идеи была четко формализована и получены предварительные точные результаты о ее применимости.

В настоящей работе мы рассматриваем применение алгоритма стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе для задачи оптимизации нестационарного функционала. В следующем разделе будет детально описана постановка задачи оптимизации существенно более общая, чем в работах [1, 3]: о минимизируемом функционале будет предполагаться не два, а один раз дифференцируемость, не будет предполагаться возможность прямого измерения градиента, а помехи наблюдения могут быть почти произвольными. В третьем разделе формулируются алгоритм, в четвертом — утверждение о стабилизируемости среднеквадратичной невязки оценок, доказательство которого вынесено в приложение. В последнем разделе работоспособность алгоритма иллюстрируется примером стабилизации получающихся оценок для многомерного случая отслеживания дрейфа точки в пространстве

при зависимых помехах в наблюдениях.

2. Постановка задачи

Пусть время является дискретным и определяется номером шага (итерации) $n = 0, 1, \dots$, $\{F(\cdot, \cdot, n) : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}\}$ — набор функций от двух векторных переменных, на каждом шаге n мы можем измерять значение:

$$(2) \quad y_n = F(x_n, w_n, n) + v_n,$$

где x_n — известные (выбираемые) точки, в которых производятся наблюдения (план эксперимента), w_n — независимые случайные величины, выражающие неконтролируемую неопределенность, заданные на некотором вероятностном пространстве Ω и имеющие одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $P_w(\cdot)$, v_n — искажения в наблюдениях (могут быть и неслучайные).

Рассмотрим задачу минимизации нестационарного функционала среднего риска:

$$(3) \quad f(x, n) = E_w F(x, w, n) = \int_{\mathbf{R}^p} F(x, w, n) P_w(dw) \rightarrow \min_x.$$

Требуется оценить θ_n — точку минимума функции $f(x, n)$, изменяющуюся с течением времени:

$$\theta_n = \operatorname{argmin}_x f(x, n).$$

Для характеристики поведения оценок точек минимума нестационарного функционала (3) введем два определения.

О п р е д е л е н и е 1 *Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ точек минимума θ_n стабилизируется в среднеквадратичном смысле, если существует такое $C > 0$, что*

$$E \|\hat{\theta}_n - \theta_n\|^2 \leq C, \quad \forall n.$$

Здесь и далее E — символ математического ожидания.

О п р е д е л е н и е 2 *Число \bar{L} называется асимптотической границей среднеквадратичных невязок оценивания, если для последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ точек минимума θ_n выполняется:*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (E \|\hat{\theta}_n - \theta_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{L} < \infty.$$

Далее будем рассматривать задачу о построении последовательности стабилизирующихся оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ при следующих условиях.

(А) Функции $f(\cdot, n)$ сильно выпуклые по первому аргументу для каждого n :

$$\langle \nabla f(x, n), x - \theta_n \rangle \geq \mu \|x - \theta_n\|^2.$$

(В) $\forall n, \forall w$ градиент $\nabla F(\cdot, w, n)$ удовлетворяет условию Липшица с константой M :

$$\|\nabla F(x, w, n) - \nabla F(y, w, n)\| \leq M \|x - y\|,$$

и для него выполняется

(С) локальное свойство Лебега: $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall n \exists$ окрестность $U_{x,n}$ и функция $\Phi_x(w, n) : E_w \Phi_x(w, n) < \infty$ такие, что $\forall x' \in U_{x,n} \|\nabla F(x, w, n)\| \leq \Phi_x(w, n)$.

(D) Скорость дрейфа точки минимума ограничена следующими условиями:

$$\forall n, \|\theta_n - \theta_{n-1}\| \leq A, \quad E_w |\nabla F(\theta_n, w, n)|^2 \leq B,$$

$$E_{w_1, w_2} |F(x, w_1, n) - F(x, w_2, n-1)|^2 \leq C \|x - \theta_{n-2}\|^2 + D.$$

(Е) Для помех наблюдения v_n выполнены условия

$$|v_{2n} - v_{2n-1}| \leq \sigma_v,$$

либо, если они представляют собой последовательность случайных величин, то

$$E\{|v_{2n} - v_{2n-1}|^2\} \leq \sigma_v^2.$$

Заметим, что последнему условию удовлетворяют детерминированные, но ограниченные последовательности $\{v_n\}$.

Условие **(С)** обеспечивает возможность перестановки операций интегрирования и дифференцирования при обосновании стабилизируемости оценок.

Ограничения типа **(D)** включают как дрейф типа случайных блужданий, так и направленный дрейф в определенную сторону. Например, можно рассматривать такое ограничение:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + A + \xi_n,$$

где ξ_n является ограниченной случайной величиной. Подобное условие предполагается также в [3], в работе же [1] оно незначительно ослабляется. Среднеквадратичная стабилизируемость оценок алгоритма поиска минимума в условиях **(D)** означает применимость его к широкому классу различных задач.

3. Алгоритм оценивания

Пусть $\{\Delta_n\}$ — последовательность пробных одновременных возмущений, подаваемых на вход алгоритма оценивания, является некоторой реализацией последовательности независимых бернуллиевских случайных векторов из \mathbb{R}^d , у которых каждая компонента независимо принимает с вероятностями $\frac{1}{2}$ значения равные $\pm \frac{1}{\sqrt{d}}$.

Выберем некоторый начальный вектор $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^d$. Будем оценивать последовательность точек минимума $\{\theta_n\}$ последовательностью $\{\hat{\theta}_n\}$, определяемой алгоритмом стохастической оптимизации с пробным одновременным возмущением на входе, который имеет следующий вид:

$$(4) \quad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{2n-2} + \beta \Delta_n, & x_{2n-1} = \hat{\theta}_{2n-2} - \beta \Delta_n, \\ y_n = F(x_n, w_n, n) + v_n, \\ \hat{\theta}_{2n} = \hat{\theta}_{2n-2} - \frac{\alpha}{2\beta} \Delta_n (y_{2n} - y_{2n-1}), \\ \hat{\theta}_{2n-1} = \hat{\theta}_{2n-2}. \end{cases}$$

Для обоснования среднеквадратичной стабилизации оценок алгоритма (4) будем считать, что

(F) случайные величины Δ_n (рандомизация входа алгоритма) и w_{2n}, w_{2n-1} не зависят между собой, а также от $\hat{\theta}_0, w_k, k = 1, 2, \dots, 2n - 2$, и $\theta_k, k = 1, 2, \dots, 2n$. Если v_k предполагаются случайной природы, то $\Delta_n, w_{2n}, w_{2n-1}$ не зависят от $v_k, k = 1, 2, \dots, 2n$.

4. Среднеквадратичная стабилизация оценок

Обозначим $H = A + \alpha\beta M$.

Т е о р е м а 1 . Пусть выполнены условия (A)–(F) и параметры алгоритма α, β выбраны такими, что $K = 2\alpha\mu - 3(C + 6M^2\beta^2)\frac{\alpha^2}{\beta^2} > 0$.

Если $E\|\theta_0 - \hat{\theta}_0\|^2 < \infty$, тогда оценки алгоритма (4) стабилизируются в среднеквадратичном смысле.

Кроме того, $\forall n$ и для любого параметра $\delta > 0$, удовлетворяющего условию

$$\bar{K} = 1 - K + \delta H < 1,$$

справедливы оценки

$$(5) \quad E\|\theta_n - \hat{\theta}_n\|^2 \leq \bar{K}^n E\|\theta_0 - \hat{\theta}_0\|^2 + \frac{(L + H/\delta)(1 - \bar{K}^n)}{1 - \bar{K}},$$

где $L = A^2(8 + 45\alpha^2 M^2) + 18\alpha^2(M^2\beta^2 + B) + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(3D + \sigma_v^2)$.

Заметим, что, в частности, в Теореме 1 устанавливается асимптотическая граница среднеквадратичных невязок оценивания

$$\bar{L} = \sqrt{\frac{L + H/\delta}{K - \delta H}}.$$

Эту формулу для границы \bar{L} несложно минимизировать по δ . В результате получается

$$\delta^* = \frac{\sqrt{H^2 + KL} - H}{L}, \quad \bar{L}^* = \frac{\sqrt{H^2 + KL} + H}{K}.$$

Условия (A)–(C), (E)–(F) являются стандартными для доказательства состоятельности оценок алгоритмов стохастической аппроксимации с возмущением на входе [2]. Ранее факт среднеквадратичной стабилизации оценок алгоритма (4) был доказан в [10] при более жестких ограничениях.

Доказательство Теоремы 1 приводится в Приложении.

5. Пример

Рассмотрим достаточно простое практическое приложения алгоритма стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе для решения задачи минимизации нестационарного функционала описанного выше типа. Пусть требуется оценить координаты движущейся точки в многомерном пространстве, когда единственное доступное измерение на каждом шаге это расстояние до нее, измеряемое с помехой. В силу Теоремы 1 оценки, доставляемые алгоритмом (4), будут стабилизироваться вдоль траектории дрейфа при условии ограниченности нормы дрейфа экстремума.

Для начала рассмотрим двумерный случай, когда модель дрейфа точки описывается формулой $\theta_n = \theta_{n-1} + \zeta$, где ζ — равномерно распределенный на сфере вектор: $A = \|\zeta\| = 0,1$. Можно рассмотреть семейство функций $F(x, w, n) = f(x, n) = \|x - \theta_n\|^2$, которые определяют квадрат расстояния до искомой точки. Эти функции удовлетворяют условиям Теоремы 1. При численном моделировании измерения на каждом шаге производились с дополнительным неслучайным шумом: $y_n = f(x_n, n) + v_n$, где помехи $v_n \in [-1, 1]$ генерировались по детерминированному закону $v_{2i} = 1 - (i \bmod 3)$ для четных шагов и $v_{2i-1} = 1 - (i \bmod 7)/3$ для нечетных. В рассматриваемом примере числовые параметры из условий Теоремы 1 равны $A = 0,1$, $M = 2$, $B = 0$, $C = 0,04$, $D = 0,0004$, $\mu = 2$. При этом по результату Теоремы 1 получается $H = 0,1 + 2\alpha\beta$, $K = 4\alpha - 3(0,04 + 24\beta^2)\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $L = 0,08 + 18\alpha^2(4\beta^2 + 0,1) + 1,0012\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

В эксперименте были выбраны $\alpha = 1/36$ и $\beta = 1$. При этом $H = 0,106$; $K = 0,046$; $L = 0,159$. Выбрав $\delta^* = 0,192$, получаем $\bar{L}^* = 5,219$. Точка минимума дрейфует, как показано на рис. 1, сплошной линией. Прерывистая линия обозначает дрейф оценки, полученной по алгоритму (4). Начальное значение оценки $\hat{\theta}_0 = (25, 25)^T$. Ошибка оценивания (норма невязки) и уровень помех наблюдения показаны на рис. 2. Эти результаты эксперимента оказались типичными при использовании различных неслучайных ограниченных помех наблюдения. Как видно при использовании предложенного в работе алгоритма уровень невязки получился существенно меньше уровня помех наблюдения, что не достигается при стандартном использовании минимаксных подходов при “неизвестных,

но ограниченных” помехах в наблюдении.

Во втором примере рассматривается дрейф в 100-мерном пространстве. При такой размерности стандартные алгоритмы, основанные на приближении вектора градиента, используют на каждом шаге алгоритма 200 оценок, таким образом дрейф за время одной итерации алгоритма оказывается достаточно существенным. На рис. 3 показано изменение уровня ошибки оценивания при скорости дрейфа за 1 итерацию $A = 0,01$ и уровне помех $\sigma_v = 1$. Среднеквадратичная ошибка оценивания в типичных случаях при моделировании держится на уровне 0,5, что существенно ниже уровня ошибки, накапливающейся в методах, основанных на конечно-разностных приближениях градиента.

6. Заключение

В нашей работе к решению задачи оценивания минимума нестационарного функционала применен псевдоградиентный метод с рандомизацией на входе, который применим в случае измерений с помехами нестатистической природы. Метод не опирается на возможность измерения градиента и требует всего лишь двух измерений на каждой итерации. Дрейф экстремума считается ограниченным по норме на каждом шаге, и таким образом включает как случайные блуждания, так и изменение с выделенным направлением. Было доказано, что ошибка оценивания рассмотренного алгоритма ограничена константой. Было проведено численное моделирование, показывающее, что уровень ошибки сопоставим с уровнем дрейфа, который считается неизвестным.

В дальнейшем авторами планируется, во-первых, получить эффективную асимптотическую верхнюю границу для последовательности оценок, получаемых при помощи алгоритма. Во-вторых, усилить полученные результаты, используя идеи полиномиальной аппроксимации дрейфа, высказанные в статье [11]. Это бы существенно расширило условия стабилизации оценок, позволяя отказаться от равномерной ограниченности дрейфа, заменив ее на более слабое условие полиномиальной ограниченности.

Д о к а з а т е л ь с т в о Т е о р е м ы 1. Обозначим $err_{n-1} = \hat{\theta}_{2n-2} - \theta_{2n-2}$, $dreif_n = \theta_{2n} - \theta_{2n-2}$, $step_n = \frac{\alpha}{2\beta}(y_{2n} - y_{2n-1})\Delta_n$.

В силу алгоритма (4) и первого из условий **(D)** для квадрата нормы разности $\|\hat{\theta}_{2n} - \theta_{2n}\|$ имеем оценку

$$\begin{aligned}
 & \|err_n\|^2 \leq \|err_{n-1}\|^2 + \|dreif_n\|^2 + \|step_n\|^2 + \\
 & + 2\langle dreif_n, step_n \rangle - 2\langle dreif_n, err_{n-1} \rangle - 2\langle step_n, err_{n-1} \rangle \leq \\
 (6) \quad & \leq \|err_{n-1}\|^2 + 4A^2 + \|step_n\|^2 + 2\langle step_n, dreif_n \rangle - \\
 & - 2\langle dreif_n, err_{n-1} \rangle - 2\langle err_{n-1}, step_n \rangle.
 \end{aligned}$$

1. В силу модели наблюдения (2) для последнего слагаемого имеем

$$\begin{aligned}
 -\langle err_{n-1}, step_n \rangle &= -\langle err_{n-1}, \frac{\alpha}{2\beta}\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n) - \\
 & - F(\hat{\theta}_{2n-2} - \beta\Delta_n, w_{2n-1}, 2n-1) + v_{2n} - v_{2n-1}) \rangle.
 \end{aligned}$$

Обозначим $E_n\{\cdot\}$ условное математическое ожидание относительно σ -алгебры, порождаемой случайными величинами $\theta_1 \dots, \theta_{2n-2}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{2n-2}$.

Применив к последней формуле $E_n\{\cdot\}$, используя

$E_n\{\Delta_n(v_{2n} - v_{2n-1})\} = 0$, добавив и отняв $F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n)$ и $F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n-1}, 2n-1)$, получаем

$$\begin{aligned}
 E_n\{-\langle err_{n-1}, step_n \rangle\} &= -\langle err_{n-1}, \frac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, \\
 & w_{2n}, 2n) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n))\} \rangle - \langle err_{n-1}, -\frac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n \\
 (7) \quad & (F(\hat{\theta}_{2n-2} - \beta\Delta_n, w_{2n-1}, 2n-1) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, \\
 & w_{2n-1}, 2n-1))\} \rangle - \langle err_{n-1}, \frac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n) - \\
 & - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n-1}, 2n-1))\} \rangle.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим разность под знаком $E_n\{\cdot\}$ в первом слагаемом (7). Учитывая разложение для $F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n)$ по формуле Тейлора, последовательно выводим

$$E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n))\} =$$

$$\begin{aligned}
&= E_n\{\Delta_n\langle\nabla F(\hat{\theta}_{2n-2} + \gamma_1\beta\Delta_n, w_{2n}, 2n), \beta\Delta_n\rangle\} = \\
&= E_n\{\Delta_n\langle\nabla F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n), \beta\Delta_n\rangle\} + \\
&+ E_n\{\Delta_n\langle\nabla F(\hat{\theta}_{2n-2} + \gamma_1\beta\Delta_n, w_{2n}, 2n) - \nabla F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n), \beta\Delta_n\rangle\},
\end{aligned}$$

при $\gamma_1 \in (0, 1)$. В итоге для первого слагаемого в (7), применив **(A)**–**(C)**, получаем

$$\begin{aligned}
(8) \quad &-\langle err_{n-1}, \frac{\alpha}{2\beta} E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n) - \\
&- F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n))\}\rangle \leq \frac{\alpha}{2}(-\langle err_{n-1}, \nabla f(\hat{\theta}_{2n-2}, 2n)\rangle + \\
&+ M\beta\|err_{n-1}\|) \leq \frac{1}{2}(-\alpha\mu\|err_{n-1}\|^2 + \alpha\beta M\|err_{n-1}\|).
\end{aligned}$$

Аналогичное соотношение получается и для второго слагаемого в (7). Для третьего слагаемого, в силу независимости пробного возмущения Δ_n от w_{2n} и w_{2n-1} , получаем:

$$-\langle err_{n-1}, \frac{\alpha}{2\beta} E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n-1}, 2n-1))\}\rangle = 0.$$

В итоге, $-E_n\{\langle err_{n-1}, step_n\rangle\} \leq -\alpha\mu\|err_{n-1}\|^2 + \alpha\beta M\|err_{n-1}\|$.

2. Для слагаемого $2E_n\{\langle step_n, dreif_n\rangle\}$ в силу условия **(D)** получаем

$$2E_n\{\langle step_n, dreif_n\rangle\} \leq E_n\{\|step_n\|^2\} + 4A^2.$$

3. Рассмотрим $E_n\{\|step_n\|^2\}$. Разложив $y_{2n} - y_{2n-1}$ как в п. 1 на несколько слагаемых, с использованием свойств **(B)** и **(D)** получаем оценки:

$$\begin{aligned}
E_n\{\|F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n-1}, 2n-1)\|^2\} &\leq C\|err_{n-1}\|^2 + D, \\
E_n\{\|F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n)\|^2\} &+ \\
+ E_n\{\| - F(\hat{\theta}_{2n-2} - \beta\Delta_n, w_{2n-1}, 2n-1) + F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n-1}, 2n-1)\|^2\} &\leq \\
\leq 3\beta^2(2(M^2\beta^2 + B) + M^2(\|\hat{\theta}_{2n-2} - \theta_{2n}\|^2 + \|\hat{\theta}_{2n-2} - \theta_{2n-1}\|^2)) &\leq \\
\leq 3\beta^2(M^2(2\beta^2 + 5A^2) + 2B + 2M^2\|err_{n-1}\|^2). &
\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
E_n\{\|step_n\|^2\} &\leq \frac{\alpha^2}{2\beta^2}(\|err_{n-1}\|^2(3C + 18M^2\beta^2) + 3D + \\
&+ 9\beta^2(M^2(2\beta^2 + 5A^2) + 2B) + E_n\{\|v_{2n} - v_{2n-1}\|^2\}).
\end{aligned}$$

Суммируя полученные выше оценки, учитывая вид K и H , выводим

$$E_n\{\|err_n\|^2\} \leq \|err_{n-1}\|^2(1 - K) + 2\|err_{n-1}\|H + \\ + 8A^2 + 9\alpha^2(M^2(2\beta^2 + 5A^2) + 2B) + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(3D + E_n\{\|v_{2n} - v_{2n-1}\|^2\}).$$

Перейдя к безусловному математическому ожиданию, в силу справедливости $\forall \delta > 0$ неравенства $2aH \leq \delta Ha^2 + H/\delta$, получаем

$$E\|err_n\|^2 \leq (1 - K + \delta H)E\|err_{n-1}\|^2 + L + H/\delta.$$

Выберем $0 < \delta < K/H$, что возможно с силу условия Теоремы 1 для параметров α и β алгоритма. Итерируя n раз последнее неравенство, выводим (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попков А. Ю. Градиентные методы для нестационарных задач безусловной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2005. №6. С. 39–47.
2. Граничин О. Н., Поляк Б. Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. – М.: Наука. 2003. 291 с.
3. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука. 1983.
4. Kushner H., Yin G. Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications. – Springer. 2003.
5. Граничин О. Н. Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика. 1992. № 2. С. 99–104.
6. Граничин О. Н. Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. №1(4). С. 19–21.

7. Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б. Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. № 26. С. 126–133.
8. Spall J. C. Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 37. 1992. PP. 332–341.
9. Spall J. C. Developments in stochastic optimization algorithms with gradient approximations based on function measurements // Proc. of the Winter Simulation Conf. 1994. PP. 207–214.
10. Gurevich L., Vakhitov A. SPSA Algorithm for Tracking // In Proc. 12-th International Student Olympiad on Automatic Control (Baltic Olympiad). 2008. PP. 52–57.
11. Катковник В. Я., Хейсин В. Е., Динамическая стохастическая оптимизация полиномиальных дрейфов // Автоматика и телемеханика. 1979. №5. С. 700–708.

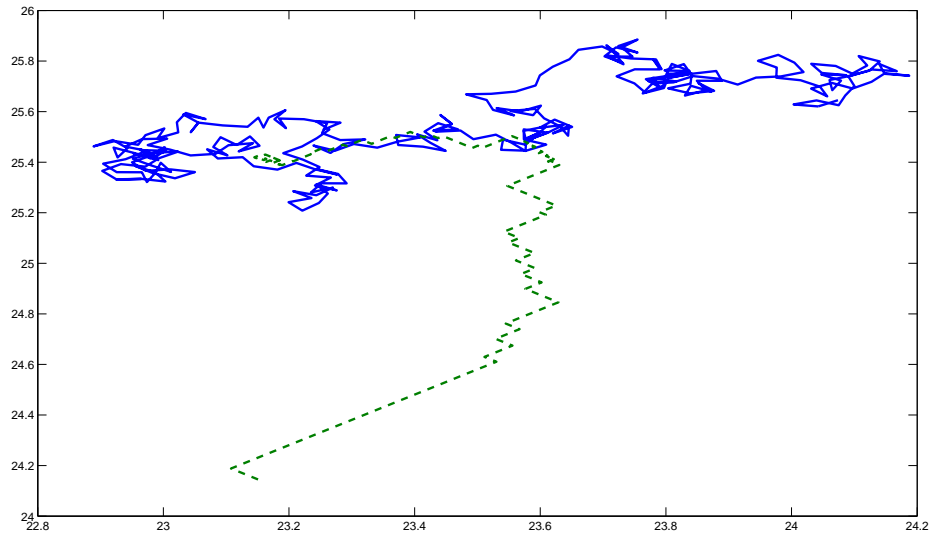


Рис. : 1. Экстремум θ_n (сплошная линия) и его оценка (прерывистая линия), итерации метода 250 - 500.

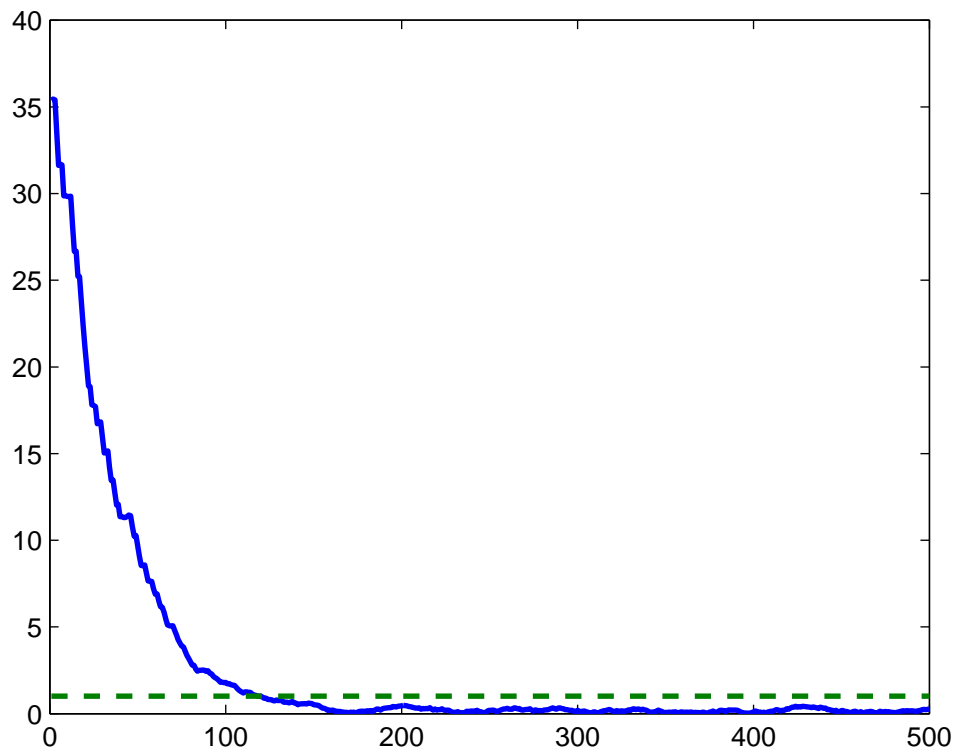


Рис. : 2. Норма ошибки оценивания и асимптотическая граница.

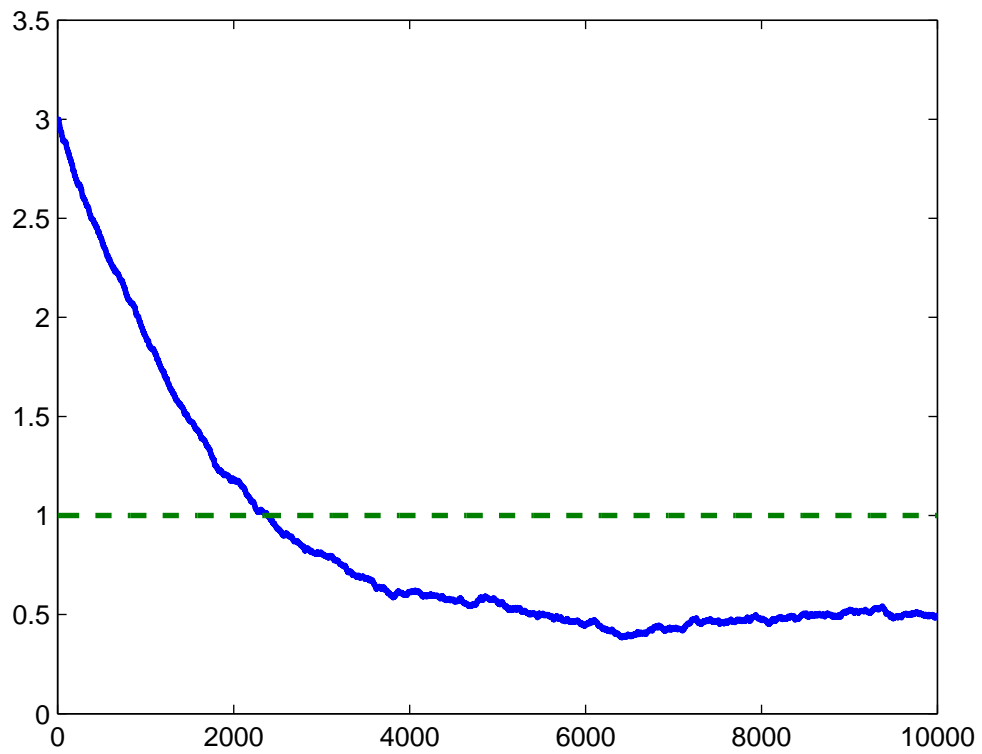


Рис. : 3. Норма ошибки в 100-мерном случае