УДК 517.972

©2005 г. О. Н. Граничин, докт. физ.-мат. наук, О. А. Измакова
(Санкт-Петербургский государственный университет)

РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ САМООБУЧЕНИЯ

Для решения задачи самообучения рассматривается новый алгоритм типа стохастической аппроксимации с возмущением на входе. Алгоритм основывается на использовании пробных возмущений и обладает такими полезными свойствами как состоятельность оценок при почти произвольных помехах и сохранение простоты и работоспособности при росте размерности пространства состояний и увеличении количества классов. В конце статьи работа алгоритма иллюстрируется примером моделирования процесса самообучения на ЭВМ.

УДК 517.972

©2005 г. О. Н. Граничин, докт. физ.-мат. наук, О. А. Измакова
(Санкт-Петербургский государственный университет)

РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ САМООБУЧЕНИЯ[1]

Для решения задачи самообучения рассматривается новый алгоритм типа стохастической аппроксимации с возмущением на входе. Алгоритм основывается на использовании пробных возмущений и обладает такими полезными свойствами как состоятельность оценок при почти произвольных помехах и сохранение простоты и работоспособности при росте размерности пространства состояний и увеличении количества классов. В конце статьи работа алгоритма иллюстрируется примером моделирования процесса самообучения на ЭВМ.

1. Введение

Пусть имеется некоторая классифицирующая система, организованная следующим образом: при предъявлении ей входного сигнала (стимула) x она вырабатывает, в зависимости от значения матрицы параметров η, значения функций $\{a^i(x,\eta)\}$ и вычисляет их сумму $s(x,\eta)$ с определенными весовыми коэффициентами [1–4]. Так задаются множества (образы)

$$\mathbb{X}^1(\eta) = \{x : s(x,\eta) > 0\}, \quad \mathbb{X}^2(\eta) = \{x : s(x,\eta) \leq 0\}$$

и рассматриваемая система в состоянии классифицировать любой входной сигнал x, относя его либо к множеству $\mathbb{X}^1(\eta)$, либо к $\mathbb{X}^2(\eta)$. Эта классификация может изменяться, если варьировать параметры η. Система, дополненная способом изменения параметров, может подгонять свою классификацию к некоторой требуемой и, тем самым, демонстрировать

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ по проекту 05-07-90179.

свойство обучаемости или адаптации. Такая подгонка требует определенной дополнительной информации о классификации. Обычно эта информация поступает с обучающей последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_N$, состоящей из классифицированных требуемым образом входных сигналов. Уточнение характера этой информации приводит к различным постановкам задачи обучения. Сам процесс подбора параметров с помощью обучающей последовательности носит название *процесса обучения.* По окончании процесса обучения весовые коэффициенты фиксируются, и соответствующие множества $\mathbb{X}^1(\eta)$, $\mathbb{X}^2(\eta)$ принимаются в качестве требуемого разбиения. Они могут не совпадать с реальным разбиением. Это отличие, выраженное каким-либо способом, будет определять качество работы *обученной системы.* На самом деле, для любых непересекающихся ограниченных множеств, разделенных положительным расстоянием, существует конечный набор *пороговых функций*, отображающий их в линейно–разделимые множества. Этот фундаментальный факт лежит в основании методов моделирования с использованием нейронных сетей [5–8].

Описанная схема обучаемой системы может быть реализована с помощью так называемых персептронов - сложных сетей из пороговых элементов (формальных нейронов), предназначенных для моделирования процессов в сложных системах, в частности, в живых организмах. Роль функций $\left\{a^i(x,\eta)\right\}$ здесь играют реакции выходных нейронов сети на входной стимул x (по аналогии с работой зрительной системы входные стимулы иногда называют изображениями). Сигналы выходных нейронов сети поступают в эффекторный нейрон, где они суммируются и сравниваются с порогом (в рассматриваемом примере с нулём). В результате такого сравнения принимается решение о принадлежности входного стимула к одному из двух классов. Естественным образом задача может быть обобщена на случай большего количества классов.

Если процедуры построения оценок в задачах обучения опираются на использование при обучении указаний *учителя* о классификации обучающей последовательности, то их называют *обучением с учителем.* Возможна похожая постановка задачи обучения, в которой указания учителя не используются. Тогда говорят о *задаче самообучения*, а сам процесс обучения сводится к определению последовательности оценок, минимизирующей функционал специального вида [3].

2. Автоматическая классификация входных сигналов

С содержательной точки зрения, смысл автоматической классификации состоит в построении правила, сопоставляющего каждой точке x множества $\mathbb{X}$ некоторый образ (класс). Подразумевается, что сопоставленные одному и тому же образу точки обладают некоторым общим свойством, которое и порождает этот образ. Например, таким свойством может быть близость расположения точек к некоторому "центру", и тогда понятие образа (класса) связано с обычным представлением о компактном расположении точек, принадлежащих тому или иному образу (классу).

Правило классификации может быть однозначным (детерминированным), при котором каждой точке x множества $\mathbb{X}$ сопоставляется вполне определенный образ, либо недетерминированным, когда каждой точке x множества $\mathbb{X}$ сопоставляются значения некоторого набора функций, определяющих степень достоверности принадлежности точки x к каждому из возможных образов. Для упрощения будем предполагать, что количество образов (классов) конечно и равно l. В обоих случаях для формальной записи правила классификации целесообразно ввести набор функций $\rho(\cdot) = \left\{\rho^1(\cdot), \rho^2(\cdot), \dots, \rho^l(\cdot)\right\}$ - степеней достоверности, обладающих свойствами

$$0 \leq \rho^k(x) \leq 1,\ k = 1, \dots, l,\ \sum_{k=1}^{l} \rho^k(x) = 1.$$

Всякий способ классификации связан с *потерями*, которые обычно характеризуются с помощью *штрафных функций (стоимости)* $q^k(x, \eta)$, $k = 1, 2, \dots, l$. В типичных случаях, когда $\mathbb{X}$ - вещественное векторное пространство, значения штрафных функций $q^k(x, \eta)$ возрастают при удалении x от центра соответствующего образа (класса).

Предположим, что на множестве $\mathbb{X}$ задано некоторое распределение вероятностей $\mathrm{P}(\cdot)$. Одна из возможных постановок задачи автоматической классификации состоит в определении наборов $\rho_\star(\cdot)$ и $\eta_\star$ из некоторого компактного множества Θ, минимизирующих средние потери классификации, равные

$$\int_{\mathbb{X}} \sum_{k=1}^{l} q^k(x,\eta)\rho^k(x)\mathrm{P}(dx).$$

Для фиксированных x и η при варьировании функций $\rho^k(x)$ значения суммы, стоящей под знаком интеграла, заполняют всю выпуклую оболочку точек $q^k(x,\eta)$, $k=1,2,\ldots,l$. Следовательно, минимизация средних потерь классификации достигается на наборе функций $\rho_\star(\cdot)$, в котором $\rho_\star^k(x)=\delta_{k\,j(x,\eta)}$, где

$$\delta_{k\,j(x,\eta)} = \begin{cases} 1, & k=j(x,\eta), \\ 0, & k\neq j(x,\eta), \end{cases}$$

а целочисленная функция $j(\cdot,\eta)$ определяется как номер, соответствующий штрафной функции с минимальным значением

$$j(x,\eta)=\arg\min_k q^k(x,\eta).$$

Разобьём множество $\mathbb{X}$ на l классов (образов) $\mathbb{X}^1(\eta),\mathbb{X}^2(\eta),\ldots,\mathbb{X}^l(\eta)$ по правилу

$$\mathbb{X}^k(\eta)=\big\{x\in\mathbb{X} : q^k(x,\eta)<q^j(x,\eta),\ j=1,2,\ldots,k-1,$$
$$q^k(x,\eta)\leq q^j(x,\eta),\ j=k+1,\ldots,l\big\}\,,\ k=1,2,\ldots,l.$$

Обозначим через $\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\eta)}(x)$, $k=1,2,\ldots,l$ характеристические функции соответствующих множеств, а через $J(x,\eta)$ и $Q(x,\eta)$ - l-мерные векторы, первый из которых составлен из значений $\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\eta)}(x)$ и состоит из нулей и единицы, а второй - из $q^k(x,\eta)$. Учитывая последние замечания и введённые обозначения, можно определить функционал качества классификации

$$(1)\quad F(\eta)=\int_{\mathbb{X}}\langle J(x,\eta),Q(x,\eta)\rangle\,\mathrm{P}(dx)=\int_{\mathbb{X}}\sum_{k=1}^{l}\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\eta)}(x)q^k(x,\eta)\mathrm{P}(dx),$$

рассматривая его как функцию набора θ центров классов. Этот функционал обычно называют *функционалом среднего риска* в задаче самообучения. (Здесь и далее использованы обозначения $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для евклидовой нормы и скалярного произведения.)

Разбиение множества

$$\mathbb{X} = \cup_{k=1}^{l} \mathbb{X}^k(\eta_\star)$$

называется *байесовским* (оптимальным среди $\eta \in \Theta$), если параметр разбиения $\eta_\star$ выбран из условия минимизации функционала среднего риска.

В рассмотренном варианте оптимальная классификация соответствует *чистым стратегиям.* Если изменить постановку задачи и рассматривать минимизацию функции

$$\int_{\mathbb{X}} \sum_{k=1}^{l} q^k(x,\eta)|\rho^k(x)|^p \mathrm{P}(dx),\ p \neq 1,$$

то оптимальная классификация может иметь вид *смешанной стратегии*, т. е. не быть однозначной.

Поясним геометрический смысл формально описанной выше задачи автоматической классификации. Пусть $\mathbb{X}$ - вещественное векторное пространство, $\eta = \left(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^l\right)$ и штрафные функции имеют похожий друг на друга вид

$$q^k(x,\eta) = \|x - \theta^k\|^2,\ k = 1, 2, \ldots, l.$$

Рассмотрим разбиение множества $\mathbb{X}$ на l классов $\mathbb{X}^1(\eta), \mathbb{X}^2(\eta), \ldots, \mathbb{X}^l(\eta)$ по правилу: к множеству $\mathbb{X}^k(\eta)$ относятся все точки x, которые находятся к центру θ^k ближе, чем к любому другому. Для однозначности считаем, что в случае равенства расстояний до нескольких центров, точка x относится к классу, соответствующему центру с меньшим номером. Интеграл

$$\int_{\mathbb{X}^k(\eta)} \|x - \theta^k\|^2 \mathrm{P}(dx)$$

определяет рассеивание точек x в множестве $\mathbb{X}^k(\eta)$. Определенный выше функционал среднего риска (1) принимает вид

$$F(\eta) = \sum_{k=1}^{l} \int_{\mathbb{X}^k(\eta)} \|x - \theta^k\|^2 \mathrm{P}(dx).$$

Таким образом, в рассмотренном случае задача автоматической классификации состоит в определении набора центров $\left\{\theta_\star^k,\ k = 1, 2, \ldots, l\right\}$, при которых суммарное рассеивание минимально. Заметим, что при перестановке местами векторов внутри набора $\left\{\theta^k_\star,\ k = 1, 2, \dots, l\right\}$ значение определенного выше функционал среднего риска (1) не изменяется. А, следовательно, если рассматриваемая задача имеет решение, то оно не обязательно должно быть единственным.

Искомый набор центров $\eta_\star$ должен удовлетворять уравнению $\nabla F(\eta_\star) = 0$. Нетрудно убедиться, что в последнем примере множества $\mathbb{X}^k(\eta)$ имеют вид многогранников, а минимизирующий функционал среднего риска набор центров $\eta_\star = \left(\theta^1_\star, \theta^2_\star, \dots, \theta^l_\star\right)$ совпадает с *центрами тяжести* этих множеств, т. е.

$$\theta^k_\star = \frac{\int_{\mathbb{X}^k(\eta)} x\mathrm{P}(dx)}{\int_{\mathbb{X}^k(\eta)} \mathrm{P}(dx)},\ k = 1, 2, \dots, l.$$

Приведенные соображения отвечают интуитивному представлению о разбиении множества $\mathbb{X}$ на l непересекающихся классов, причём центры тяжести соседних множеств находятся на прямой, ортогональной разделяющей множества грани [3].

Задача самообучения тесно связана с задачей автоматической классификации и является обобщением последней на случай неизвестного распределения, определяющего статистику показа классифицируемых сигналов. Пусть распределение вероятностей $\mathrm{P}(\cdot)$ неизвестно, но предполагается известной *обучающая* последовательность $x_1, x_2, \dots$, им порожденная. *Требуется* предложить алгоритм построения последовательности оценок $\{\hat{\eta}_n\}$ набора $\eta_\star$, минимизирующего функционал среднего риска (1). Решение задачи самообучения осложняется тем, что на практике функции $q^k(\cdot,\cdot)$, $k = 1, 2, \dots, l$ не всегда заданы аналитически, но их значения доступны измерению (может быть с помехами):

$$y^k(x, \eta) = q^k(x, \eta) + v^k,\ k = 1, 2, \dots, l.$$

Через $Y(x, \eta)$ будем обозначать l-мерный вектор, составленный из величин $y^k(x, \eta)$, $k = 1, 2, \dots, l$; через V_n - l-мерный вектор помех. Также будем использовать прежние обозначения $\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\eta)}(x)$, $k = 1, 2, \dots, l$ для характеристических функций, определяемых по измерениями с помехами $y^k(x, \eta)$, $k = 1, 2, \dots, l$.

3. Пробное возмущение и алгоритм оценивания

Для формирования последовательности оценок $\{\hat{\eta}_n\}$ оптимального набора векторов $\eta_\star$ воспользуемся рандомизированным алгоритмом стохастической аппроксимации [4,9], основанном на использовании наблюдаемой последовательности серии случайных независимых друг от друга векторов $\Delta_n \in \mathbb{R}^m$, $n = 1, 2, \ldots$, называемых в дальнейшем *пробным одновременным возмущением* и составленных из независимых бернуллиевских, равных ± 1 случайных величин.

Зафиксируем некоторый начальный набор $\hat{\eta}_0 \in \mathbb{R}^{m \times l}$ и выберем последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю: $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Рассмотрим следующий алгоритм построения последовательности оценок

$$(2) \begin{cases} \tilde{\eta}_n^{\pm} = \hat{\eta}_{n-1} \pm \beta_n \Delta_n J^T(x_n, \hat{\eta}_{n-1}), \\ \hat{\eta}_n = \mathcal{P}_\Theta \left(\hat{\eta}_{n-1} - \alpha_n J^T(x_n, \hat{\eta}_{n-1}) \frac{Y(x_n, \tilde{\eta}_n^+) - Y(x_n, \tilde{\eta}_n^-)}{2\beta_n} \Delta_n J^T(x_n, \hat{\eta}_{n-1}) \right). \end{cases}$$

Здесь, в соответствии с принятыми ранее обозначениями, $J(x_n, \hat{\eta}_n)$ - l-мерный вектор, составленный из значений характеристических функций $\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\hat{\eta}_n)}(x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, l$; $Y(x_n, \tilde{\eta}_n^{\pm}) = Q(x_n, \tilde{\eta}_n^{\pm}) + V_n^{\pm}$ - l-мерные векторы, составленные из измеренных с помехами в соответствующих точках значений функций потерь; $V_n^{\pm}$ - соответствующие вектора из ошибок наблюдений; $\mathcal{P}_\Theta(\cdot)$ - проектор в множество Θ.

Похожего типа алгоритм предлагался в [4], но без достаточного обоснования. К сожалению, при $l > 1$ для анализа свойств получающейся последовательности оценок $\{\hat{\eta}_n\}$ нельзя непосредственно воспользоваться общим результатом [4] о сходимости процедуры стохастической аппроксимации с возмущением на входе, так как характеристические функции $\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\eta)}(x)$ недифференцируемы.

4. Основные предположения и состоятельность оценок

Для упрощения формулировок основного результата и доказательства ограничимся случаем однотипных функций $q^k(x, \eta)$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Будем считать, что набор η состоит из l векторов $\eta = \left(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^l\right)$ и функции $q^k(x,\eta) = \bar{q}(x,\theta^k)$ и не зависят от других векторных элементов набора η. Здесь $\bar{q}(\cdot,\cdot): \mathbb{X}\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - некоторая общая для разных классов штрафная функция. Векторы $\theta^k,\ k=1,2,\ldots,l$ удобно интерпретировать как *центры классов*.

Сформулируем предположения, которым должна будет удовлетворять штрафная функция $\bar{q}(\cdot,\cdot)$:

П.1. Функции $\bar{q}(x,\cdot): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - дифференцируемые при любом $x \in \mathbb{X}$ и их градиенты *удовлетворяют условию Липшица*, т.е.

$$\|\nabla_\theta \bar{q}(x,\theta_1) - \nabla_\theta \bar{q}(x,\theta_2)\| \le M\|\theta_1-\theta_2\|,\ \forall \theta_1,\theta_2 \in \mathbb{R}^m$$

с некоторой постоянной $M>0$, не зависящей от $x \in \mathbb{X}$.

П.2. При любом $\theta \in \mathbb{R}^m$ функции $\bar{q}(\cdot,\theta)$ и $\nabla_\theta \bar{q}(\cdot,\theta)$ равномерно ограничены на $\mathbb{X}$;

П.3. Каждая из функций

$$f^k(\theta) = \int_{\mathbb{X}^k(\eta_\star)} \bar{q}(x,\theta)\mathrm{P}(dx),\ k=1,2,\ldots,l$$

имеет единственный минимум в $\mathbb{R}^m$ в некоторой точке $\theta^k_\star$ и

$$\left\langle \theta-\theta^k_\star, \nabla f^k(\theta)\right\rangle \ge \mu\|\theta-\theta^k_\star\|^2,\ \ \forall\theta \in \mathbb{R}^m$$

с некоторой постоянной $\mu>0:\ M>\mu$ (*условие сильной выпуклости*).

Обозначим

$$d_{\max} = \max_{k\in\{1,2,\ldots,l\}} \max_{x\in\mathbb{X}^k(\theta_\star)} |\bar{q}(x,\theta^k_\star)|.$$

Т е о р е м а *Пусть выполнены условия:*
(П.1,2,3) *для функции* $\bar{q}(\cdot,\cdot)$*;*
$\forall n\ge 1$ *случайные вектора* $V_1^\pm, V_2^\pm \ldots, V_n^\pm$ *и* $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ *не зависят от* x_n,Δ_n*, а случайный вектор* x_n *не зависит от* Δ_n*;*
$\mathrm{E}\{v_n\}<\infty,\ \mathrm{E}\{v_n^2\}\le\sigma_n^2,\ |v_n|\le C_v,\ C_v>0;$
$\sum_n \alpha_n = \infty$ *и* $\alpha_n\to 0,\ \beta_n\to 0,\ \alpha_n\beta_n^{-2}\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Если обучающая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ состоит из независимых, одинаково распределенных векторных случайных величин с таким законом распределения, что они с ненулевой вероятностью принимают значения в каждом из l классов в пространстве признаков и из выполнения для некоторых k из $1, 2, \ldots, l$, $x \in \mathbb{X}^k(\eta_\star)$ и θ неравенства $|\bar{q}(x, \theta)| \leq d_{\max}$ следует

$$(3) \quad |\bar{q}(x', \theta)| > d_{\max} + 2C_v \ \ \forall x' \in \mathbb{X}^i(\eta_\star), \ i \neq k, \ i \in \{1, 2, \ldots, l\},$$

тогда *последовательность оценок $\{\hat{\eta}_n\}$, доставляемых алгоритмом (2) при произвольном выборе $\hat{\eta}_0$, сходится в среднеквадратичном смысле: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\|\hat{\eta}_n - \eta_\star\|^2\} = 0$, к одному из наборов $\eta_\star$, состоящему из векторов $\theta^1_\star, \theta^2_\star, \ldots, \theta^l_\star$, в том случае, когда*

$$(4) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle J(x_n, \hat{\eta}_{n-1}), Q(x_n, \hat{\eta}_{n-1})\rangle \leq d_{\max} + C_v.$$

Если, более того, $\sum_n \alpha_n \beta_n^2 + \alpha_n^2 \beta_n^{-2} < \infty$, **то** *$\hat{\eta}_n \to \eta_\star$ при $n \to \infty$ с вероятностью единица.*

Доказательство Теоремы приведено в Приложении.

Замечания: 1. Выполнение условия (4) в общем случае предварительно не проверить. Если для какой-то последовательности оценок $\{\hat{\eta}_n\}$ условие (4) не выполняется, то это еще не означает невозможность получения состоятельных оценок с помощью алгоритма (2). Можно взять другие начальные данные и попробовать воспользоваться алгоритмом еще раз.

2. Легко убедиться в том, что условия (П.1,2,3) выполняются для функции $\bar{q}(x, \theta) = \|x - \theta\|^2$. В этом случае выполнение условия (3) означает, что расстояние между различными классами должно быть больше, чем максимальный среди всех классов радиус.

3. В Теореме помехи наблюдения $V_n^\pm$ можно условно назвать *почти произвольными*, так как они могут быть неслучайными, но неизвестными и ограниченными, или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей.

4. Из анализа доказательства видно, что в качестве пробного одновременного возмущения не обязательно брать бернуллиевские случайные величины. Достаточно потребовать для их распределения симметричности и конечности носителя. Другие соображения показывают, что при

прочих равных условиях использование бернуллиевских случайных величин дает большую эффективность.

5. Можно рассматривать подпоследовательности $\{\alpha_n^k\}$ и $\{\beta_n^k\}$, изменяющиеся отдельно для оценок соответствующего класса. Это оказывается удобным особенно в том случае, когда представители разных классов появляются в обучающей последовательности неравномерно.

5. Пример

Рассмотрим пример применения рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации (2) к решению задачи самообучения. Пусть известно, что в пространстве входов существует три класса изображений, которые с помощью набора признаков отображаются в соответствующие классы в пространстве признаков, содержащемся в $\mathbb{R}^2$. Решение задачи самообучения в этом случае сводится к разбиению пространства признаков на три подмножества, что эквивалентно нахождению трех центров этих множеств. В примере моделирования роль "настояших"классов в пространстве признаков играли множества

$$\mathbb{X}^1 = [-1,0 \pm 1,8] \times [-1,0 \pm 1,8],\ \mathbb{X}^2 = [2,0 \pm 1,1] \times [0,5 \pm 2,8],$$

$$\mathbb{X}^3 = [-0,5 \pm 1,3] \times [3,0 \pm 2,0].$$

В качестве штрафных функций были выбраны $q^k(x,\eta) = \|x - \theta^k\|^2,\ k = 1,2,3$. На рис. 1 показаны результаты компьютерного моделирования применения алгоритма (2) для решения задачи самообучения после наблюдений на интервале времени от 1 до 300. При этом роль пробного одновременного возмущения играли случайные величины равномерно распределенные в квадрате $[-1;1] \times [-1;1]$ В результате были получены оценки центров:

$$\hat{\theta}^1_{300} = \begin{pmatrix} -1,21 \\ -1,03 \end{pmatrix},\ \ \hat{\theta}^2_{300} = \begin{pmatrix} 1,85 \\ 0,52 \end{pmatrix},\ \ \hat{\theta}^3_{300} = \begin{pmatrix} -0,42 \\ 3,23 \end{pmatrix},$$

которые, как не трудно видеть, недалеки от "настоящих". Скорость и характер сходимости текущих оценок к "настоящим"центрам приведены на рис. 2.

Стоит отметить, что для рассмотренного примера достаточное условие (3) не выполняется. Этот пример численного моделирования, в частности, показывает эффективность применения алгоритма (2) и в более общей ситуации по сравнению с результатом Теоремы.

6. Заключение

В работе представлен и обоснован алгоритм типа стохастической аппроксимации с возмущением на входе, который адаптирован для решения задачи самообучения. Оценки, доставляемые алгоритмом, состоятельны при почти произвольных помехах. Алгоритм обладает еще одной замечательной особенностью: его работоспособность сохраняется при росте размерности вектора оцениваемых параметров. Численное моделирование представленного алгоритма при решении конкретной задачи самообучения подтверждает его эффективность.

Представленный метод решения задачи самообучения демонстрирует применимость рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в задачах распознавания. Актуальность такого подхода обусловлена тем, что характерные особенности алгоритмов, использующих идею рандомизации, указывают на возможность их успешного использование при конструировании систем "искусственного интеллекта", в частности при обучении нейронных сетей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Д о к а з а т е л ь с т в о Т е о р е м ы. Заметим, что на каждом шаге алгоритма (2) корректировке подвергается оценка центра только одного множества, оценки остальных центров остаются без изменений. Выберем некоторое k из $1, 2, \ldots, l$, и выделим из последовательности оценок $\{\hat{\eta}_n\}$ подпоследовательность $\{\hat{\eta}_{n_j}\}$, при построении которой корректировке подвергались оценки центра k-ого класса, и изучим свойства последовательности $\{\hat{\theta}^k_{n_j}\}$.

Вначале покажем, что, начиная с некоторого момента N_k, в обучающей подпоследовательности $\{x_{n_j}\}$ встречаются только представители одного класса. Не умаляя общности будем считать, что номер этого класса

k (в противном случае мы можем просто перенумеровать классы). Т.е. надо доказать, что существует N_k такое, что $x_{n_j} \in \mathbb{X}^k(\eta_\star) \ \ \forall j \geq N_k$.

Пусть это не так. Значит, найдется бесконечная увеличивающаяся подпоследовательность индексов $\{n_{j_t}\}$, для которой $x_{n_{j_t}} \in \mathbb{X}^k(\eta_\star)$ и $x_{n_{j_{t+1}}} \notin \mathbb{X}^k(\eta_\star)$. Сравним значения $\bar{q}(x_{n_{j_t}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1})$ и $\bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}})$ при достаточно больших t. Предварительно оценим норму разности $\|\hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1} - \hat{\theta}^k_{n_{j_t}}\|$.

В силу алгоритма (2), теоремы о среднем, компактности множества Θ и условия (П.1) имеем

$$\|\hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1} - \hat{\theta}^k_{n_{j_t}}\| \leq \alpha_{n_{j_t}} m(2C_v + \max_{s\in[-1;1]} |\nabla_\theta \bar{q}(x_{n_{j_t}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1} + s\alpha_{n_{j_t}}\Delta_{n_{j_t}})|) \leq \alpha_{n_{j_t}} \bar{C},$$

с некоторой постоянной $\bar{C}$. Следовательно, при достаточно больших t разность $|\bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}}) - \bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1})|$ становится меньше $C_v/3$. Так как $x_{n_{j_{t+1}}} \notin \mathbb{X}^k(\eta_\star)$, то в силу (3)

$$|\bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1})| > d_{\max} + 2C_v.$$

Из полученных соотношений при достаточно больших t, с одной стороны, имеем

$$|\bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}})| \geq |\bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1})| - |\bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}}) - \bar{q}(x_{n_{j_{t+1}}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1})| \geq$$

$$\geq d_{\max} + 2C_v - C_v/3 = d_{\max} + \frac{5}{3}C_v,$$

С другой стороны, из условия (4) следует, что при достаточно больших t

$$|\bar{q}(x_{n_{j_t}}, \hat{\theta}^k_{n_{j_t}-1})| < d_{\max} + \frac{4}{3}C_v.$$

Получили противоречие. Следовательно, начиная с некоторого момента N_k, в обучающей подпоследовательности $\{x_{n_j}\}$ встречаются только представители k-го класса.

Далее перенумеруем для удобства последовательность $\{\hat{\theta}^k_{n_j}\}$ с $j = N_k$ в $\{\hat{\theta}^k_i\}$. В соответствии с представленным алгоритмом оценивания имеем

$$\|\hat{\theta}^k_i - \theta^k_\star\|^2 \leq \|\hat{\theta}^k_{i-1} - \theta^k_\star - \frac{\alpha_i}{2\beta_i}\left(y(x_i, \tilde{\theta}^{k,+}_i) - y(x_i, \tilde{\theta}^{k,-}_i)\right)\Delta_i\|^2 .$$

Обозначим через $\mathcal{F}^k_{n-1}$ - σ-алгебру событий, порождаемую случайными величинами $\hat\theta^k_0, \hat\theta^k_1, \ldots, \hat\theta^k_{n-1}$, формируемыми по алгоритму (2). Применив к последнему равенству операцию условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^k_{i-1}$, получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\{\, \|\hat\theta^k_i - \theta^k_\star\|^2 | \mathcal{F}^k_{i-1}\,\} \le \|\hat\theta^k_{i-1} - \theta^k_\star\|^2 - \\ &-\alpha_i \left\langle \hat\theta^k_{i-1} - \theta^k_\star, \frac{1}{\beta_i}\mathrm{E}\left\{\Delta_i \left(y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,+}_i) - y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,-}_i)\right) | \mathcal{F}^k_{i-1}\right\}\right\rangle + \\ &+\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2}\mathrm{E}\left\{\|\Delta_i\|^2 \left(y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,+}_i) - y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,-}_i)\right)^2 |\mathcal{F}^k_{i-1}\right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части неравенства (5). Учитывая, что для функций $\bar q(x_i, \cdot)$ выполнено условие (П.1), $\|\Delta_i\|^2 = m$, и используя теорему о среднем и неравенство Коши-Буняковского последовательно выводим

$$\mathrm{E}\{\|\Delta_i\|^2 \left(y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,+}_i) - y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,-}_i)\right)^2 |\mathcal{F}^k_{i-1}\} =$$

$$= 2m(\mathrm{E}\{\left(v^{k,+}_i - v^{k,-}_i\right)^2 |\mathcal{F}^k_{i-1}\} +$$

$$+\mathrm{E}\{\left(\bar q(x_i, \hat\theta^k_{i-1} + \beta_i\Delta_i) - \bar q(x_i, \hat\theta^k_{i-1} - \beta_i\Delta_i)\right)^2 |\mathcal{F}^k_{i-1}\}) \le$$

$$\le 2m\mathrm{E}\{(\bar v^k_i)^2|\mathcal{F}^k_{i-1}\} + 2m\mathrm{E}\{(|\bar q(x_i, \hat\theta^k_{i-1} + \beta_i\Delta_i) - \bar q(x_i, \theta^k_\star)| +$$

$$|\bar q(x_i, \hat\theta^k_{i-1} - \beta_i\Delta_i) - \bar q(x_i, \theta^k_\star)|)^2|\mathcal{F}^k_{i-1}\} \le$$

$$\le 2m\mathrm{E}\{((M+0.5)\left(\|\hat\theta^k_{i-1} + \Delta_i\beta_i\|^2 + \|\hat\theta^k_{i-1} - \Delta_i\beta_i\|^2\right) +$$

$$+\|\nabla_\theta \bar q(x_i, \theta^k_\star)\|^2)^2|\mathcal{F}^k_{i-1}\} + 2m\mathrm{E}\{(\bar v^k_i)^2|\mathcal{F}^k_{i-1}\}.$$

В силу равномерной ограниченности функции $\nabla_\theta \bar q(\cdot, \theta^k_\star)$ получаем

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left\{\|\Delta_i\|^2 \left(y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,+}_i) - y^k_i(x_i, \tilde\theta^{k,-}_i)\right)^2 |\mathcal{F}^k_{i-1}\right\} \le \\ &\le C_1\mathrm{E}\left\{(\bar v^k_i)^2|\mathcal{F}^k_{i-1}\right\} + C_2\beta_i^2\|\hat\theta^k_{i-1} - \theta^k_\star\|^2 + o(\beta_i^2), \end{aligned}$$

здесь и ниже через $C_i,\ i = 1, 2\ldots$ обозначены некоторые положительные константы.

Перейдем ко второму слагаемому правой части (5). Рассмотрим

$$\frac{1}{\beta_i}\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left(y_i^k(x_i,\tilde{\theta}_i^{k,+})-y_i^k(x_i,\tilde{\theta}_i^{k,-})\right)|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}=\frac{1}{\beta_i}\mathrm{E}\left\{\Delta_i\bar{v}_i^k|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta_i}\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left(\bar{q}(x_i,\hat{\theta}_{i-1}^k+\beta_i\Delta_i)-\bar{q}(x_i,\hat{\theta}_{i-1}^k-\beta_i\Delta_i)\right)|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}. \tag{6}$$

Первое слагаемое правой части (6) равно нулю в силу свойств пробного одновременного возмущения и независимости Δ_i и $v_i^{k,\pm}$. Используя теорему о среднем, равномерную ограниченность функции $\nabla_\theta\bar{q}(\cdot,\theta)$ и определение функции $f^k(\theta)$, преобразуем второе слагаемое правой части (6) к виду

$$\frac{1}{\beta_i}\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left(y_i^k(x_i,\tilde{\theta}_i^{k,+})-y_i^k(x_i,\tilde{\theta}_i^{k,-})\right)|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}=$$

$$=2\nabla f^k(\hat{\theta}_{i-1}^k)+\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left\langle\Delta_i,\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\theta_{i-1}^{k,+})-\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\hat{\theta}_{i-1}^k)\right\rangle|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}+$$

$$+\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left\langle\Delta_i,\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\theta_{i-1}^{k,-})-\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\hat{\theta}_{i-1}^k)\right\rangle|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\},$$

здесь $\theta_{i-1}^{k,\pm}\in\left[\theta_{i-1}^k,\theta_{i-1}^k\pm\beta_i\Delta_i\right]$. В силу условия (П.1) для функций $\bar{q}(x,\cdot)$ и условия (П.3) для функций $f^k(\cdot)$, используя справедливое при любом $\varepsilon>0$ неравенство

$$\|\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star^k\|\le\frac{\varepsilon^{-1}\beta_i+\varepsilon\beta_i^{-1}\|\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star^k\|^2}{2},$$

выводим

$$-\alpha_i\left\langle\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star^k,\frac{1}{\beta_i}\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left(y_i^k(x_i,\tilde{\theta}_i^{k,+})-y_i^k(x_i,\tilde{\theta}_i^{k,-})\right)|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}\right\rangle=$$

$$=-2\alpha_i\left\langle\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star^k,\nabla f^k(\hat{\theta}_{i-1}^k)\right\rangle$$

$$-\alpha_i\left\langle\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star^k,\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left\langle\Delta_i,\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\theta_{i-1}^{k,+})-\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\hat{\theta}_{i-1}^k)\right\rangle|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}\right\rangle$$

$$-\alpha_i\left\langle\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star^k,\mathrm{E}\left\{\Delta_i\left\langle\Delta_i,\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\theta_{i-1}^{k,-})-\nabla_\theta\bar{q}(x_i,\hat{\theta}_{i-1}^k)\right\rangle|\mathcal{F}_{i-1}^k\right\}\right\rangle\le$$

$$\le-2\mu\alpha_i\|\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star\|^2+Mm^{3/2}\alpha_i\beta_i\left(\varepsilon^{-1}\beta_i+\varepsilon\beta_i^{-1}\|\hat{\theta}_{i-1}^k-\theta_\star\|^2\right).$$

С учетом полученных оценок, для условного среднего невязки выполняется неравенство

$$\mathrm{E}\left\{ \|\hat{\theta}_i^k - \theta_\star^k\|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^k \right\} \leq \|\hat{\theta}_{i-1}^k - \theta_\star^k\|^2 \left(1 - 2\mu\alpha_i + Mm^{3/2}\alpha_i\varepsilon + \frac{C_2}{4}\alpha_i^2\right) +$$

$$+ Mm^{3/2}\alpha_i\beta_i^2\varepsilon^{-1} + \frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2}\left(C_1 \mathrm{E}\left\{(\bar{v}_i^k)^2 | \mathcal{F}_{i-1}^k\right\} + o(\beta_i^2)\right)$$

Выберем ε настолько малым, чтобы $Mm^{3/2}\varepsilon < 2\mu$ и пусть i достаточно велико. Используя условия Теоремы для числовых последовательностей, преобразуем последнее неравенство к виду

$$\mathrm{E}\left\{\|\hat{\theta}_i^k - \theta_\star^k\|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^k\right\} \leq \|\hat{\theta}_{i-1}^k - \theta_\star^k\|^2 (1 - C_3\alpha_i) +$$

$$+ C_4\left(\alpha_i\beta_i^2 + \alpha_i^2\beta_i^{-2}(1 + \mathrm{E}\left\{(\bar{v}_i^k)^2 | \mathcal{F}_{i-1}^k\right\})\right).$$

В силу условий Теоремы, выполнены все условия леммы Роббинса–Сигмунда [10, гл.2, лемма 10; 11], необходимые для сходимости с вероятностью единица $\hat{\theta}_i^k \to \theta_\star^k$ при $i \to \infty$. Для доказательства в соответствующих условиях Теоремы сходимости в среднеквадратичном смысле возьмем безусловное математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства

$$\mathrm{E}\left\{\|\hat{\theta}_i^k - \theta_\star^k\|^2\right\} \leq \mathrm{E}\left\{\|\hat{\theta}_{i-1}^k - \theta_\star^k\|^2\right\}$$

Сходимость к точке $\theta_\star^k$ последовательности оценок $\{\hat{\theta}_i^k\}$ в среднеквадратичном смысле следует из [10, гл.2, лемма 5].

Доказательство Теоремы закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И.* Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М.: Наука, 1970.

2. *Фомин В. Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л., 1976.

3. *Фомин В. Н.* Рекурентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984.

4. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.*, "Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах."М.: Наука, 2003.

5. *Haykin S.*, Neural Networks: A Comprehensive Foundation. New York: Macmillan, 1984.

6. *White H.* Artifical Neural Networks. Oxford: Blackwell, UK, 1992.

7. *Vidyasagar M.* A Theory of Learning and Generalization with Applications to Neural Networks and Control Systems. Springer, London, 1997.

8. *Poznyak A.S., Sanches E.N., Wen Yu* Dynamic Neural Networks for Nonlinear Control: Identification, State Estimation and Trajectory Tracking. World Scientific, 2001.

9. *Граничин О.Н.*, "Стохастическая аппроксимация с возмущением на входе при зависимых помехах наблюдения"// Вестн. ЛГУ. 1989. Сер. 1. Вып. 4. С. 27–31.

10. *Поляк Б.Т.* "Введение в оптимизацию."М.: Наука, 1983.

11. *Robbins H., Siegmuud D.*, "A convergence theorem for nonnegative almost super-marlingales and some applications"// In: Optimizing Methods in Statistics, J.S.Rustagi ed. Academic Press, NY. 1971. P. 233–257.

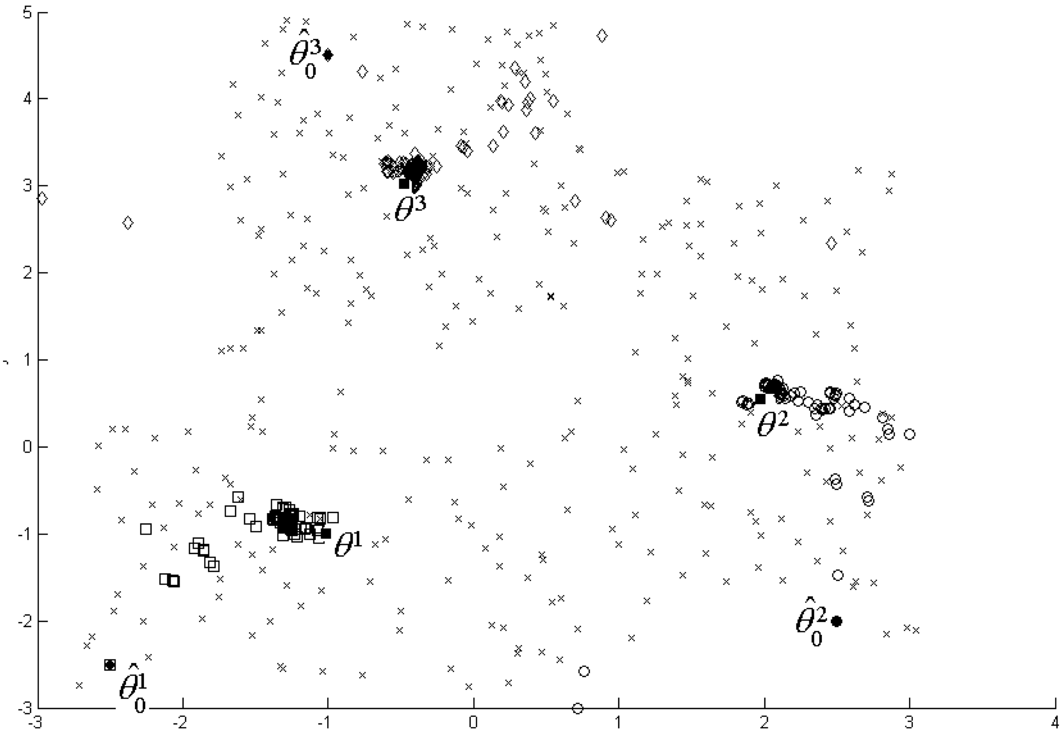

Рис. 1. Классы множеств и последовательности оценок

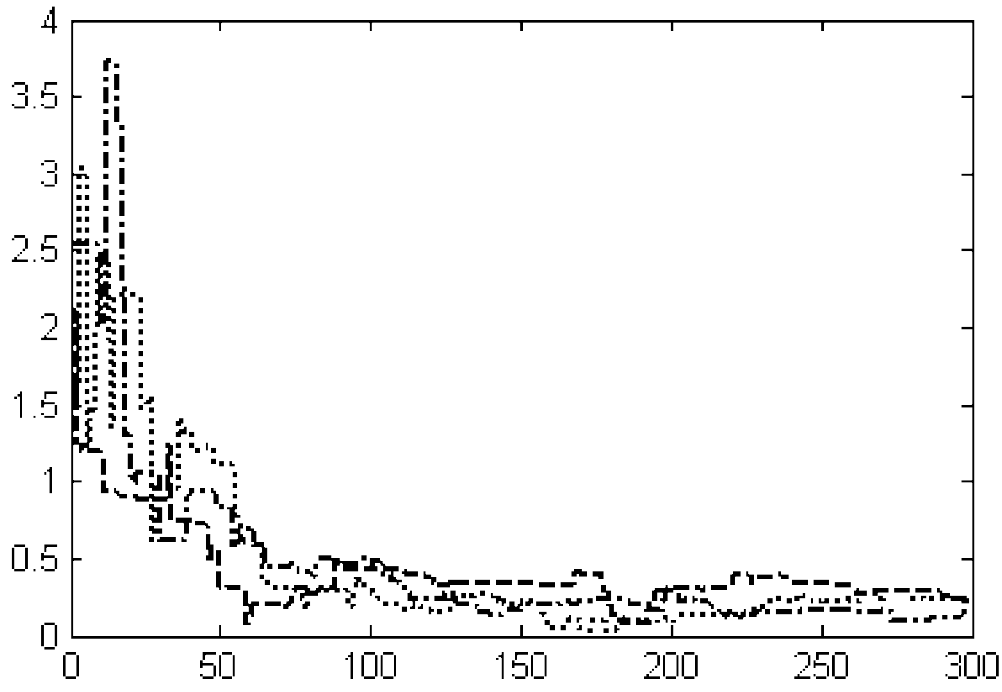

Рис. 2. Сходимость оценок к “настоящим” центрам