УДК 519.216.76; 519.712

©2003 г. О.Н.Граничин, доктор.физ.–мат.наук
(Санкт–Петербургский государственный университет)

ОПТИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РАНДОМИЗИРОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОМЕХАХ

Многомерная стохастическая оптимизация играет важную роль в анализе и управлении многими техническими системами. Для решения трудных многомерных задач оптимизации предлагается использовать рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации с возмущением на входе, которые не только имеют простой вид, но и дают состоятельные оценки неизвестных параметров при "почти произвольных" помехах в наблюдениях. В работе обосновываются оптимальные способы выбора параметров алгоритмов.

1. Введение

Для примера рассмотрим задачу о нахождении стационарной точки $\theta^\star$ некоторой функции $f(\cdot)$ (точки локального минимума или максимума) при условии, что для каждого значения $\theta \in \mathbb{R}$ — входа алгоритма (управляемой переменной) — наблюдается случайная величина $Y(\theta)$, являющаяся зашумленным значением функции $f(\cdot)$ в точке θ

$$Y(\theta) = f(\theta) + V.$$

Дж.Кифер и Дж.Вольфовиц [1] для решения этой задачи при некоторых дополнительных ограничениях обосновали сходимость к точке $\theta^\star$ рекуррентной последовательности, определяемой по правилу (алгоритму)

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \frac{Y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n) - Y(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n)}{2\beta_n},$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — некоторые заданные убывающие числовые последовательности с определенными свойствами.

Основное условие–ограничение на свойства помех наблюдения, которое обычно предполагается выполненным, — это условная центрированность помех наблюдения. Его можно сформулировать таким образом. Для статистики, выборочные значения которой точно наблюдаются или вычисляются,

$$z(\theta, \beta) = \frac{Y(\theta + \beta) - Y(\theta - \beta)}{2\beta}$$

математическое ожидание при малом β близко к значению производной функции $\mathrm{E}\{z(\theta, \beta)\} \approx f'(\theta)$.

Поведение последовательности оценок, доставляемых алгоритмом стохастической аппроксимации (СА), зависит от выбора наблюдаемых функций– статистик $z(\theta, \beta)$. В ряде практических приложений бывает недостаточно информации относительно статистических свойств ошибок измерения, или они могут просто задаваться неизвестной экспериментатору детерминированной функцией. При этом возникают существенные трудности в обосновании применимости обычной процедуры Кифера–Вольфовица (КВ), и часто её оценки не сходится к искомой точке. Но это не означает, что, решая такие проблемы, надо вообще отказаться от использования достаточно простых в представлении алгоритмов СА. Предположим, что функция $f(\cdot)$ дважды непрерывно–дифференцируема, и задана наблюдаемая реализация некоторой бернуллиевской последовательности независимых случайных величин $\{\Delta_n\}$, равных с одинаковой вероятностью плюс/минус единице, некоррелированных с ошибками наблюдения на шаге n. Модифицируем процедуру КВ, используя рандомизированную статистику $\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta) = z(\theta, \beta\Delta)$. Разложив функцию $f(\theta)$ по формуле Тейлора и воспользовавшись некоррелированностью Δ_n и помех наблюдения, для этой новой статистики имеем

$$\mathrm{E}\{\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta)|\theta\} = f'(\theta) + \mathrm{E}\{\frac{1}{\Delta}V\} + \mathcal{O}(\beta) = f'(\theta) + \mathcal{O}(\beta).$$

Если значения числовой последовательности $\{\beta_n\}$ в алгоритме стремятся к нулю, то в пределе эта статистика "в среднем" совпадает со значением производной функции $f(\cdot)$. Такими же свойствами обладает и более простая статистика

$$\bar{z}(\theta, \beta, \Delta) = \frac{\Delta}{\beta} Y(\theta + \beta\Delta),$$

использующая только одно наблюдение на каждой итерации (шаге). Добавление в алгоритм и канал наблюдения нового случайного процесса $\{\Delta_n\}$, называемого *пробным одновременным возмущением*, приводит к обогащению последовательности наблюдений. Пробное возмущение по своей сути является возбуждающим воздействием, так как главная цель его использования заключается в стремлении добиться невырожденности получаемых наблюдений.

В многомерном случае, когда $\theta \in \mathbb{R}^r$, для построения последовательности оценок обычная процедура КВ, основанная на конечно–разностных аппроксиациях вектора–градиента функции, использует $2r$ наблюдений на каждой итерации (по два наблюдения для аппроксимации каждой компоненты r-мерного вектора–градиента). Рандомизированные статистики $\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta)$ и $\bar{z}(\theta, \beta, \Delta)$ допускают более простой с вычислительной точки зрения способ обобщения на многомерный случай, использующий всего два или одно измерение функции на каждой итерации. Пусть $\{\Delta_n\}$ — бернуллиевский r-мерный случайный процесс. Тогда

$$\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta^{(1)}} \\ \frac{1}{\Delta^{(2)}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta^{(r)}} \end{pmatrix} \frac{Y(\theta + \beta\Delta) - Y(\theta - \beta\Delta)}{2\beta},$$

а вид формулы для $\bar{z}(\theta, \beta, \Delta)$ такой же, как и в скалярном случае. Использовать статистику $\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta)$ было предложено Дж.Спалом в [2], где было показано, что для больших n вероятностное распределение соответствующим образом отмасштабированных ошибок оценивания является приблизительно нормальным. Полученная формула для асимптотической дисперсии ошибки вместе с подобной характеристикой обыкновенной процедуры КВ была им использована для сравнения двух алгоритмов. Выяснилось, что при прочих равных условиях новый алгоритм имеет ту же скорость сходимости, что и обычная процедура КВ, несмотря на то, что в многомерном случае использует существенно меньше наблюдений (в r раз меньше при $n \to \infty$). В скалярном случае статистика $\bar{z}(\theta, \beta, \Delta)$ впервые была предложена автором в [3], где она использовалась для построения последовательности оценок, состоятельных при почти произвольных помехах в наблюдении.

Вопрос о скорости сходимости оценок алгоритмов СА был, наверное, основным, стимулирующим модификации первоначальных алгоритмов. Свойства оценок обычной процедуры КВ и некоторых её обобщений детально изучены во многих работах (например, [4–11]). Скорость сходимости оценок зависит от гладкости функции $f(\cdot)$. Если она дважды дифференцируема, то среднеквадратичная ошибка обыкновенного алгоритма КВ убывает как $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$, если трижды дифференцируема — как $\mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})$ [4]. В.Фабиан в [12] модифицировал процедуру КВ, предложив использовать кроме аппроксимации первой производной конечно–разностные аппроксимации производных высших порядков с определенными весами. Если функция $f(\cdot)$ имеет ℓ непрерывных производных, тогда алгоритм Фабиана обеспечивает среднеквадратичную скорость сходимости порядка $\mathcal{O}(n^{-\frac{\ell-1}{\ell}})$ для нечетных ℓ. С вычислительной точки зрения алгоритм Фабиана очень усложнен, число наблюдений на одной итерации быстро увеличивается с ростом гладкости и размерности, кроме этого, на каждом шаге приходится обращать некоторую матрицу. При использовании рандомизированных алгоритмов СА в задачах с достаточно гладкими исследуемыми функциями $f(\cdot)$ добиться увеличения асмптотической среднеквадратичной скорости сходимости удаётся без увеличения количества измерений функции на каждой итерации. В том случае, когда некоторый обобщенный показатель гладкости функции $f(\cdot)$ равен γ ($\gamma = \ell + 1$, если все частные производные функции порядка до ℓ включительно удовлетворяют условию Липшица) Б.Т.Поляком и А.Б.Цыбаковым в [13] было предложено использовать статистики вида

$$\tilde{z}_\gamma(\theta, \beta, \Delta) = \mathrm{K}(\Delta) \frac{Y(\theta + \beta\Delta) - Y(\theta - \beta\Delta)}{2\beta}, \ \bar{z}_\gamma(\theta, \beta, \Delta) = \frac{1}{\beta} \mathrm{K}(\Delta) Y(\theta + \beta\Delta),$$

где $\mathrm{K}(\cdot)$ — некоторая вектор–функция с конечным носителем (дифференцирующее ядро), определяемая с помощью ортогональных многочленов Лежандра степени меньшей γ. Два соответствующих рандомизрованных алгоритма дают среднеквадратичную скорость сходимости последовательности оценок, равную $\mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}})$. В той же работе было показано, что для широкого класса алгоритмов эта скорость сходимости оптимальна в некотором асимптотически минимаксном смысле, т. е. не может быть улучшена ни для какого–либо другого алгоритма, ни для любого другого допустимого правила выбора точек измерения. Для нечетных ℓ этот же факт ранее был установлен Х.-Ф.Ченом [14].

В [13] также замечено, что алгоритм с одним измерением в асимптотическом смысле ведет себя хуже, чем алгоритм с двумя измерениями. Как будет показано ниже, это не совсем так, если при сравнении алгоритмов рассматривать количество итераций, умноженное на количество измерений. Кроме того, во многих практических применениях, в частности, при оптимизации работы систем реального времени, лежащие в основе математической модели динамические процессы могут изменяться слишком быстро, не позволяя успеть получить два последовательных измерения. В некоторых задачах просто невозможно для одного шага алгоритма сделать два измерения таких, чтобы помехи наблюдения в обеих точках $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n\Delta_n$ и $\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n\Delta_n$ были некоррелированны с Δ_n. (Это одно из основных условий применимости алгоритма!).

Условия сходимости рандомизированных алгоритмов СА при "почти произвольных" помехах и соответсвующие историко–библиографические ссылки можно найти, например, в [15]. Детерминированный анализ сходимости рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации проводился в работах [16–17]. Скорость сходимости алгоритмов исследуется и в [18–19].

2. Постановка задачи и основные предположения

Пусть $F(w,\theta) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^1$ — дифференцируемая по второму аргументу функция, $x_1, x_2 \ldots$ — выбираемая экспериментатором последовательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $n = 1, 2, \ldots$ доступно наблюдению с аддитивными помехами v_n значение функции $F(w_n, \cdot)$

$$y_n = F(w_n, x_n) + v_n,$$

где $\{w_n\}$ — неконтролируемая последовательность случайных величин

($w_n \in \mathbb{R}^p$), имеющих одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $\mathrm{P}_w(\cdot)$ с конечным носителем.

Постановка задачи. Требуется по наблюдениям $y_1, y_2 \ldots$ построить последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ неизвестного вектора $\theta^\star$, минимизирующего функцию

$$f(\theta) = \int_{\mathbb{R}^p} F(w,\theta)\mathrm{P}_w(dw)$$

типа функционала среднего риска. Такая же постановка задачи рассматривалась и в [15]. В этой работе дополнительно стоит цель: оптимизировать скорость сходимости последовательности оценок.

Сформулируем основные предположения, используя обозначения $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ для евклидовой нормы и скалярного произведения в $\mathbb{R}^r$.

A.1 Функция $f(\cdot)$ — сильновыпуклая, т.е. имеет единственный минимум в $\mathbb{R}^r$ в некоторой точке $\theta^\star = \theta^\star(f(\cdot))$ и

$$(x-\theta^\star, \nabla f(x)) \geq \mu\|x-\theta^\star\|^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$.

A.2 Условие Липшица на градиент функции $f(\cdot)$

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(\theta)\| \leq A\|x-\theta\|, \ \forall x, \theta \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $A > \mu$.

A.3 Функция $f(\cdot) \in C^\ell$ (ℓ-раз непрерывно дифференцируема) и все её частные производные до порядка ℓ включительно удовлетворяют на $\mathbb{R}^r$ условию Гёльдера порядка ρ, $0 < \rho \leq 1$:

$$|f(x) - \sum_{|\bar{l}|\leq \ell} \frac{1}{\bar{l}!} D^{\bar{l}} f(\theta)(x-\theta)^{\bar{l}}| \leq M\|x-\theta\|^\gamma,$$

где $\gamma = \ell + \rho \geq 2$, M — некоторая постоянная,
$\bar{l} = (l^{(1)}, \ldots, l^{(r)})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{N}^r$ — мультииндекс, $l^{(i)} \geq 0$, $i = 1, \ldots, r$,
$|\ \bar{l}\ | = l^{(1)} + \ldots + l^{(r)}, \bar{l}! = l^{(1)}! \cdots l^{(r)}!$,
$x \in \mathbb{R}^r, x^{\bar{l}} = (x^{(1)})^{l^{(1)}} \cdots (x^{(r)})^{l^{(r)}}, D^{\bar{l}} = \partial^{|\bar{l}|}/(\partial x^{(1)})^{l^{(1)}} \cdots (\partial x^{(r)})^{l^{(r)}}$.
При $\gamma = 2$ полагаем $M = A/2$.

3. Пробное возмущение и основные алгоритмы

Пусть $\Delta_n,\ n = 1, 2, \dots$ — наблюдаемая последовательность независимых друг от друга одинаково распределенных случайных величин в $\mathbb{R}^r$, называемая в дальнейшем *пробным одновременным возмущением.* Все компоненты вектора Δ_n не зависят друг от друга и имеют одинаковую скалярную функцию распределения $\mathrm{P}_\Delta(\cdot)$ с конечным носителем.

Зафиксируем некоторый начальный вектор $\hat\theta_0 \in \mathbb{R}^r$, выберем положительные числа α, β и две скалярные ограниченные функции (ядра) $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$, удовлетворяющие условиям

$$\int u K_0(u)\mathrm{P}_\Delta(du) = 1, \int u^k K_0(u)\mathrm{P}_\Delta(du) = 0,\ k = 0, 2, \dots, \ell,$$

(1)

$$\int K_1(u)\mathrm{P}_\Delta(du) = 1,\ \int u^k K_1(u)\mathrm{P}_\Delta(du) = 0,\ k = 1, \dots, \ell - 1.$$

Для построения последовательностей точек измерения $\{x_n\}$ и оценок $\{\hat\theta_n\}$ предлагаются два алгоритма. Первый из них использует на каждом шаге (итерации) два наблюдения:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_{2n} = \hat\theta_{n-1} + \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}\Delta_n,\ \ x_{2n-1} = \hat\theta_{n-1} - \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}\Delta_n, \\ y_{2n} = F(w_{2n}, x_{2n}) + v_{2n},\ y_{2n-1} = F(w_{2n-1}, x_{2n-1}) + v_{2n-1}, \\ \hat\theta_n = \hat\theta_{n-1} - \alpha n^{-1+\frac{1}{2\gamma}}\mathrm{K}(\Delta_n)\frac{y_{2n}-y_{2n-1}}{2}, \end{cases}$$

а второй — одно наблюдение:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_n = \hat\theta_{n-1} + \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}\Delta_n,\ y_n = F(w_n, x_n) + v_n, \\ \hat\theta_n = \mathcal{P}_{\Theta_n}(\hat\theta_{n-1} - \alpha n^{-1+\frac{1}{2\gamma}}\mathrm{K}(\Delta_n) y_n). \end{cases}$$

В обоих алгоритмах $\mathrm{K}(\cdot)$ — вектор–функция, компоненты которой вычисляются по формулам

$$(4)\qquad \mathrm{K}^{(i)}(x) = K_0(x^{(i)}) \prod_{j\neq i} K_1(x^{(j)}),\ i, j = 1, \dots, r,\ x \in \mathbb{R}^r.$$

В алгоритме (3) обозначены $\mathcal{P}_{\Theta_n}(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$ — операторы проектирования на некоторые выпуклые замкнутые ограниченные подмножества $\Theta_n \subset \mathbb{R}^r$, которые содержат, начиная с некоторого $n \geq 1$, точку $\theta^\star$. Если заранее известно ограниченное замкнутое выпуклое множество Θ, содержащее точку $\theta^\star$, то можно считать $\Theta_n = \Theta$. В противном случае, множества $\{\Theta_n\}$ могут расширяться до бесконечности.

Следуя работам В.Я.Катковника [7] и Б.Т.Поляка с А.Б.Цыбаковым [13], укажем один из возможных способов построения ядер $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$, удовлетворяющих условиям (1). Заметим, что в скалярном случае для задания $\mathrm{K}(x)$ достаточно одной функции $K_0(x)$. Пусть $\{p_m(\cdot)\}_{m=0}^{\ell}$ — некоторая система многочленов, заданных на носителе распределения $\mathrm{P}_\Delta(\cdot)$, ортогональных относительно порождаемой им меры. По аналогии с доказательством из [13] несложно убедиться в том, что функции

$$K_0(u) = \sum_{m=0}^{\ell} a_m p_m(u) \ , \qquad a_m = {p'}_m(0) / \int p_m^2(u) \mathrm{P}_\Delta(du) \ ,$$

$$K_1(u) = \sum_{m=0}^{\ell-1} b_m p_m(u) \ , \qquad b_m = p_m(0) \ / \int p_m^2(u) \mathrm{P}_\Delta(du).$$

удовлетворяют условиям (1).

В [13] в качестве вероятностного распределения компонент пробного возмущения $\mathrm{P}_\Delta(\cdot)$ было выбрано равномерное на интервале $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и для построения ядер $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$ на интервале $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ было предложено использовать ортогональные многочлены Лежандра. В этом случае для начальных значений $\ell = 1, 2$ (т.е. $2 \leq \gamma \leq 3$) имеем
$K_0(u) = 12u, K_1(u) = 1,$
для следующих значений $\ell = 3, 4$ (т.е. $3 < \gamma \leq 5$) —
$K_0(u) = 5u(15 - 84u^2), \quad K_1(u) = 9/4 - 15u^2,$
и при $|u| > 1/2$ обе функции равны нулю.

Рассмотрение более общего, чем равномерное из [13], типа вероятностных распределений пробного возмущения обуславливается тем, что часто на практике постановка задачи иногда сама по себе задает определенный тип распределения пробного возмущения $\mathrm{P}_\Delta(\cdot)$, которое удобнее моделировать, или в некоторых случаях можно использовать распределения только из некоторого узкого фиксированного класса. Возможность выбора среди различных систем ортогональных многочленов позволяет получить то или иное качество оценивания при одинаковом асимптотическом порядке скорости сходимости.

4. Скорость сходимости

Обозначим $\mathbb{W} = \mathrm{supp}(\mathrm{P}_w(\cdot)) \subset \mathbb{R}^p$ — носитель распределения $\mathrm{P}_w(\cdot)$; $\mathcal{F}_{n-1}$ — σ-алгебру вероятностных событий, порождаемую случайными величинами $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_{n-1}$, формируемыми по алгоритму (2) (или (3));

$$\bar{v}_n = v_{2n} - v_{2n-1},\ \bar{w}_n = \begin{pmatrix} w_{2n} \\ w_{2n-1} \end{pmatrix},\ d_n = 1,$$

при использовании алгоритма (2), $\bar{v}_n = v_n,\ \bar{w}_n = w_n,\ d_n = \mathrm{diam}(\Theta_n)$, при построении оценок по алгоритму (3). Здесь $\mathrm{diam}(\cdot)$ — евклидовый диаметр множества.

Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы асимптотическая скорость сходимости алгоритмов (2) и (3) была оптимальной.

Т е о р е м а 1 *Если выполнены условия:*
(1) *для функций* $K_0(\cdot), K_1(\cdot)$ *и* $\mathrm{P}_\Delta(\cdot)$*;*
(A.1,3) *при* $\gamma \geq 2,\ \alpha\beta > \frac{\gamma-1}{2\mu\gamma}$ *для функции* $f(\theta) = \mathrm{E}\{F(w,\theta)\}$;
(A.2) *для функций* $F(w,\cdot)\ \forall w \in \mathbb{W}$*;*
$\forall \theta \in \mathbb{R}^r$ *функции* $F(\cdot,\theta)$ *и* $\nabla_\theta F(\cdot,\theta)$ *равномерно на* $\mathbb{W}$ *ограничены;*
$d_n n^{-1+\frac{1}{2\gamma}} \to 0$ *при* $n \to \infty$*;*
$\forall n \geq 1$ *случайные векторы* $\bar{w}_n, \Delta_n$ *не зависят от* $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{n-1}$, *и случайный вектор* Δ_n *не зависит от* $\bar{w}_n$*;*
$\mathrm{E}\{(v_{2n} - v_{2n-1})^2/2\} \leq \sigma_2^2,\ (\mathrm{E}\{v_n^2\} \leq \sigma_1^2)$;

тогда *для среднеквадратичной скорости сходимости последовательности оценок* $\{\hat{\theta}_n\}$*, сгенерированных алгоритмом (2) (или (3)), асимптотически при* $n \to \infty$ *выполняется*

$$\mathrm{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2\} = \mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}).$$

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

В работе [15] доказано, что при выполнении дополнительного условия: $\sum_n n^{-2+1/\gamma}\mathrm{E}\{\bar{v}_n^2|\mathcal{F}_{n-1}\} < \infty$ с вероятностью единица, последовательность оценок сходится с вероятностью единица: $\hat{\theta}_n \to \theta^\star$ при $n \to \infty$.

Полученные оценки для порядка скорости среднеквадратичной сходимости оценок являются оптимальными. В [13] показано, что для класса всех функций, удовлетворяющих условиям **A.1**–**A.3**, не существует алгоритмов асимптотически более эффективных в некотором минимаксном смысле. В частном случае, для оценки неизвестных параметров линейной регрессии, правила выбора соответствующих оптимальных рандомзированных алгоритмов можно найти в [20].

В теореме 1 помехи наблюдения v_n можно условно назвать "почти произвольными", так как они могут быть неслучайными, но неизвестными и ограниченными, или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей. В частности, для доказательства утверждений теоремы 1 нет необходимости предполагать что-либо о зависимости между $\bar{v}_n$ и $\mathcal{F}_{n-1}$.

Условие независимости помех наблюдения от пробного возмущения может быть ослаблено. Достаточно потребовать стремление к нулю с вероятностью единица при $n \to \infty$ условной взаимной корреляции между $\bar{v}_n$ и $\mathrm{K}(\Delta_n)$: $\|\mathrm{E}\{\bar{v}_n \mathrm{K}(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\}\| = \mathcal{O}(n^{-1+\frac{1}{2\gamma}})$.

Для удобства записи последующих формул определим константу χ, равную единице, если помехи наблюдения $\{v_n\}$ — независимые и центрированные, и двум — в остальных случаях. Обозначим $\hat{K} = \int \|\mathrm{K}(x)\|^2 \mathrm{P}(dx)$, $\bar{K} = \int \|x\|^\gamma \|\mathrm{K}(x)\| \mathrm{P}(dx)$, $\mathrm{P}(x) = \prod_{i=1}^r \mathrm{P}_\Delta(x^{(i)})$. Величины $\hat{K}$ и $\bar{K}$ конечны из–за ограниченности вектор–функции $\mathrm{K}(\cdot)$ и конечности носителя распределения $\mathrm{P}_\Delta(\cdot)$. При доказательстве теоремы 1 для случая $M > 0$ будут установлены оптимальные значения параметров

$$\alpha^\star = 1/(\mu\beta^\star),\ \beta^\star = (2\chi(\nu_i + \sigma_i^2/i)\hat{K})^{\frac{1}{2\gamma}} (\sqrt{\gamma(\gamma-1)} M \bar{K})^{-\frac{1}{\gamma}}$$

и количественные оценки асимптотической скорости сходимости алгоритмов (2) и (3):

$$\mathrm{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2\} \le n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \kappa_i \hat{K}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \bar{K}^{\frac{2}{\gamma}} + o(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}),$$

$$\kappa_i = \gamma^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} (\gamma-1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \mu^{-2} (\chi(\nu_i + \sigma_i^2/i))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} M^{\frac{2}{\gamma}},\ \ i = 1, 2,$$

где $\nu_1 = \sup_{w\in\mathbb{W}} \Big(F(w,\theta^\star) + \frac{1}{2}(\nabla_\theta F(w,\theta^\star))^2\Big)^2$, соответствует алгоритму с одним измерением (3), а для (2) $\nu_2 =$

$$= \sup_{w_1, w_2 \in \mathbb{W}} \Big(2|F(w_1,\theta^\star) - F(w_2,\theta^\star)| + (\nabla_\theta F(w_1,\theta^\star))^2 + (\nabla_\theta F(w_2,\theta^\star))^2\Big)^2/8.$$

Если $F(w,x) = f(x)$, то, как видно из сравнения κ_1 и κ_2, асимптотическая скорость сходимости по итерациям последовательности оценок, формируемой по алгоритму (2), использующему два наблюдения, всегда лучше, чем для алгоритма (3). Если произвести сравнение по принципу, учитывающему количество измерений, то преимущество алгоритма (2) перестает быть бесспорным. Сравнивая значения κ_1 и $2\kappa_2$, несложно убедиться в том, что при $2^{\frac{1}{\gamma-1}}\sigma_2^2 - \sigma_1^2 > \nu_1 - 2^{\frac{1}{\gamma-1}}\nu_2$ асимптотическая скорость сходимости, учитывающая количество измерений, для алгоритма (3) лучше, чем для (2).

В скалярном случае при $F(w,x) = f(x)$ с пробным одновременным возмущением $\{\Delta_n\}$, формируемым независимыми, одинаково равномерно распределенными случайными величинами из отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, и независимыми, центрированными помехами наблюдения $\{v_n\} : \mathrm{E}\{v_n^2\} \le \sigma_v^2$, при $\gamma = 2$ и $\mathrm{K}(x) = 12x,\ |x| \le 1/2$, в силу полученных оценок скорости сходимости, для алгоритма (2) имеем

$$\mathrm{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2\} \le \frac{9A\sigma_v}{4\sqrt{3}\mu^2} n^{-1/2} + o(n^{-1/2}),\ \alpha^\star = \frac{1}{\mu\beta^\star},\ \beta^\star = \frac{4\sqrt{\sigma_v}}{\sqrt{A}\sqrt[4]{3}},$$

а для (3) — $\mathrm{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2\} \le 4,5\sqrt{f(\theta^\star)^2 + \sigma_v^2}/(\sqrt{6}\mu^2)\, n^{-1/2} + o(n^{-1/2})$. Отсюда, если $f(\theta^\star)^2 < \sigma_v^2$, то предпочтительнее пользоваться алгоритмом (3).

5. Пример

Для иллюстрации типичного поведения оценок рандомизированных алгоритмов СА было проведено несколько серий иммитационного моделирования на ЭВМ. В частности, рассматривался элементарный пример из [17]. Пусть $F(w,x) = f(x) = x^2 - 4x - 2$. Эта функция гладкая и имеет единственный минимум при $x = 2$. Константы A и μ для неё равны двум. Измерения значений функции производятся на фоне неизвестных аддитивных помех, равномерно распределенных на интервале $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$E\{v_n^2\} = 1/12$. На рис. 1 приведены типичные траектории оценок для двух алгоритмов типа (2), соответствующих выбору $\gamma = 2$

$$(5) \qquad \begin{cases} y_{2n-i} = f(\hat{\theta}_{n-1} + (-1)^i \frac{2}{\sqrt{3}} n^{-\frac{1}{4}} \Delta_n) + v_{2n-i},\ i = 0, 1, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - 1,5\sqrt{3} n^{-\frac{3}{4}} \Delta_n (y_{2n} - y_{2n-1}), \end{cases}$$

и $\gamma = 5$

$$(6) \qquad \begin{cases} y_{2n-i} = f(\hat{\theta}_{n-1} + (-1)^i 2 n^{-\frac{1}{10}} \Delta_n) + v_{2n-i},\ i = 0, 1, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{5}{16} n^{-\frac{9}{10}} (15\Delta_n - 84\Delta_n^3)(y_{2n} - y_{2n-1}), \end{cases}$$

Начальное приближение $\hat{\theta}_0 = 3$. В качестве пробного одновременного возмущения в обоих алгоритмах использовались реализации независимой равномерно распределенной на интервале $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ случайной величины.

6. Заключение

Замечательной особенностью рассмотренных в работе рандомизированных алгоритмов СА является сохранение их простоты, работоспособности и оптимальности скорости схдимости при росте размерности вектора оцениваемых параметров. Так как при этом не растет необходимое для каждой итерации количество измерений, то важным дальнейшим шагом в развитии может стать применение этих алгоритмов в системах с бесконечномерными и распределенными параметрами. На взгляд автора, замена в многомерном случае большого количества конечно–разностных аппроксимаций градиента целевой функции на всего одно или два измерения в случайно выбираемых точках на интуитивном уровне кажется гораздо более близкой к модели поведенния высокоорганизованных живых систем. Наверное, такого типа алгоритмы более естественно использовать при конструировании систем "искусственного интеллекта".

Автор благодарит Б.Т.Поляка за помощь и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Рассмотрим сначала алгоритм (3). Для достаточно больших n, при которых $\theta^\star \in \Theta_n$, используя свойства проекции, нетрудно получить

$$\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2 \le \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^\star - \alpha n^{-1+\frac{1}{2\gamma}} \mathrm{K}(\Delta_n) y_n\|^2.$$

Применив к последнему неравенству операцию условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$, имеем

$$\mathrm{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\} \le \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^\star\|^2 - \tag{7}$$

$$-2\alpha n^{-1+\frac{1}{2\gamma}}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^\star, \mathrm{E}\{y_n \mathrm{K}(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\}) + \alpha^2 n^{-2+\frac{1}{\gamma}} \mathrm{E}\{y_n^2 \|\mathrm{K}(\Delta_n)\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\}.$$

Из формулы (4) и условия (1) несложно получить, что $\int \mathrm{K}(x)\mathrm{P}(dx) = 0$. Значит, в силу независимости Δ_n с v_n, имеем $\mathrm{E}\{v_n \mathrm{K}(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} = 0$, и, следовательно,

$$\mathrm{E}\{y_n \mathrm{K}(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} = \int\int F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}} x)\mathrm{K}(x)\mathrm{P}(dx)\mathrm{P}_w(dw).$$

Заметим, что также, в силу (4) и (1),

$$\beta^{-1} n^{\frac{1}{2\gamma}} \int \sum_{|\bar{l}| \le \ell} \frac{1}{\bar{l}!} D^{\bar{l}} f(\hat{\theta}_{n-1}) \beta^{|\bar{l}|} n^{-\frac{|\bar{l}|}{2\gamma}} x^{\bar{l}} \mathrm{K}(x)\mathrm{P}(dx) \ = \ \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}).$$

Используя определение функции $f(\cdot)$, получаем

$$\beta^{-1} n^{\frac{1}{2\gamma}} \mathrm{E}\{y_n \mathrm{K}(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} = \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) +$$

$$+\beta^{-1} n^{\frac{1}{2\gamma}} \int (f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}} x) - \sum_{|\bar{l}| \le \ell} \frac{1}{\bar{l}!} D^{\bar{l}} f(\hat{\theta}_{n-1}) \beta^{|\bar{l}|} n^{-\frac{|\bar{l}|}{2\gamma}} x^{\bar{l}}) \mathrm{K}(x)\mathrm{P}(dx).$$

Выполение условия **A.3** влечёт за собой справедливость неравенства

$$\Big| \int (f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) - \sum_{|\bar{l}| \le \ell} \frac{1}{\bar{l}!} D^{\bar{l}} f(\hat{\theta}_{n-1}) \beta^{|\bar{l}|} n^{-\frac{|\bar{l}|}{2\gamma}} x^{\bar{l}}) \mathrm{K}(x)\mathrm{P}(dx) \Big| \le$$

$$\le \ M \int \|x \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}\|^\gamma \|\mathrm{K}(x)\|\mathrm{P}(dx) \le M \bar{K} \beta^\gamma n^{-\frac{1}{2}}.$$

Используя справедливое при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^\star\| \le \frac{\varepsilon^{-1} n^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}} M \bar{K} \beta^{\gamma-1} + \varepsilon (n^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}} M \bar{K} \beta^{\gamma-1})^{-1} \|\theta_{n-1} - \theta^\star\|^2}{2},$$

подставив полученные выше соотношения во второе слагаемое в правой части (7), из условия **A.1** последовательно выводим

$$\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n-\theta^\star\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\}\le\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2-2\alpha\beta n^{-1}(\hat\theta_{n-1}-\theta^\star,\nabla f(\hat\theta_{n-1}))+$$
$$+\,2\alpha\beta n^{-1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}}M\bar K\beta^{\gamma-1}\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|+\alpha^2n^{-2+\frac{1}{\gamma}}\mathrm{E}\{y_n^2\|\mathrm{K}(\Delta_n)\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\}\le$$
$$\le\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2(1-\alpha\beta(2\mu-\varepsilon)n^{-1})+n^{-2+\frac{1}{\gamma}}(\alpha\beta^{2\gamma-1}\varepsilon^{-1}M^2\bar K^2+$$
$$+\alpha^2\hat K\chi(\int\int F(w,\hat\theta_{n-1}+\beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}x)^2\mathrm{P}(dx)\mathrm{P}_w(dw)+\mathrm{E}\{v_n^2|\mathcal{F}_{n-1}\})).$$

Как и при доказательстве теоремы 1 в [15] из условия **A.2** можно получить, что

$$|F(w,\hat\theta_{n-1}+\beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}x)|\le\sqrt{\nu_1}+(2A+1)(\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2+\|\beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}x\|^2)$$

равномерно по $w\in\mathbb{W}$. С учетом этого факта, взяв безусловное математическое ожидание, имея в виду условие теоремы для $\{d_n\}$, заключаем

$$\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n-\theta^\star\|^2\}\le\mathrm{E}\{\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2\}(1-\psi n^{-1}+o(n^{-1}))+C_1n^{\frac{1}{\gamma}-2}+o(n^{\frac{1}{\gamma}-2}),$$

где $\psi=\alpha\beta(2\mu-\varepsilon)$, $C_1=\alpha\beta^{2\gamma-1}\varepsilon^{-1}M^2\bar K^2+\alpha^2\hat K\chi(\nu_1+\sigma_1^2)$. По лемме Чжуна (см. [8], стр. 51), если $\psi>(\gamma-1)/\gamma$, то

$$n^{1-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n-\theta^\star\|^2\}\le C_1(\alpha\beta(2\mu-\varepsilon)-\frac{\gamma-1}{\gamma})^{-1}+o(1). \tag{8}$$

Остается заметить, что, в силу произвольности $\varepsilon>0$, выполнение неравенства $\psi>(\gamma-1)/\gamma$ эквивалентно условию $2\mu\alpha\beta>(\gamma-1)/\gamma$.

Для алгоритма (2) доказательство отличается только некоторыми техническими деталями. В частности, надо использовать равномерную по $w\in\mathbb{W}$ оценку

$$\frac{1}{2}(F(w_1,\theta+x)-F(w_2,\theta-x))^2\le\nu_2+2(2A+1)^2(\|x\|^2+\|\theta-\theta^\star\|^2)^2,$$

которую нетрудно получить при выполнении условий теоремы 1.

В итоге доказательства выводится аналогичная (8) асимптотическая оценка среднеквадратичной скорости сходимости, в которой вместо константы C_1 получается $C_2=\alpha\beta^{2\gamma-1}\varepsilon^{-1}M^2\bar K^2+\alpha^2\hat K\chi(\nu_2+\sigma_2^2/2)$. Интересно отметить связь между константами C_1 и C_2: $C_1=C_2+\hat K\alpha^2\chi(\nu_1+\sigma_1^2-$

$\sigma_2^2/2 - \nu_2)$. Как видно, если $F(w, x) = f(x)$, то асимптотическая скорость сходимости по итерациям алгоритма, использующего два наблюдения, всегда лучше, чем алгоритма (3). В общем случае необходимо сравнивать величины $\nu_1 + \sigma_1^2$ и $\nu_2 + \sigma_2^2/2$.

Правая часть в (8) представляет собой функцию от α, β и ε. Оптимизируя по этим параметрам, получаем значения $\alpha^\star$, $\beta^\star$ и $\varepsilon^\star = 2\mu/\gamma$. Аналогично, оптимизируя по α, β и ε верхнюю границу асимптотической скорости сходимости для оценок алгоритма (2), находятся оптимальные значения его параметров.

Доказательство теоремы 1 и замечания к ней закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kiefer J., Wolfowitz J.* Statistical estimation on the maximum of a regression function // Ann.Math.Statist.. 1952. V. 23. P. 462–466.

2. *Spall J.C.* Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. 37. P. 332–341.

3. *Граничин О.Н.* Стохастическая аппроксимация с возмущением на входе при зависимых помехах наблюдения // Вестн. ЛГУ. 1989. Сер. 1. Вып. 4. С. 27–31.

4. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир. 1972.

5. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука. 1972.

6. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука. 1976.

7. *Катковник В.Я.* Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. М.: Наука. 1976.

8. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983.

9. *Фомин В.Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука. 1984.

10. *Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И.* Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука. 1987.

11. *Kushner H.J., Yin G.G.* Stochastic Approximation Algorithms and Applications. New York: Springer–Verlag. 1997.

12. *Fabian V.* Stochastic approximation of minima with improved asymptotic speed // Ann. Math. Statist.. 1967. V. 38, P. 191–200.

13. *Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Пробл. передачи информ.. 1990. No 2. C. 45–53.

14. *Chen H.F.* Lower rate of convergence for locating a maximum of a function // Ann. Statist.. 1988. V. 16. P. 1330–1334.

15. *Граничин О.Н.* Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // АиТ. 2002. No 2. C. 44–55.

16. *Wang I.-J., Chong E.* A deterministic analysis of stochastic approximation with randomized directions // IEEE Trans. on Automat. Control. 1998. V. 43, P. 1745–1749.

17. *Chen H.F., Duncan T.E., Pasik–Duncan B.*, A Kiefer–Wolfowitz algorithm with randomized differences // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 3. P. 442–453.

18. *Polyak B.T., Tsybakov A.B.*, On stochastic approximation with arbitrary noise (the KW case) / In: Topics in Nonparametric Estimation. Ed. R.Z. Khasminskii // Adv. in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc.. 1992. No. 12. P. 107–113.

19. *Gerencser L.* Convergence rate of moments in stochastic approximation with simultaneous perturbation gradient approximation and resetting // IEEE Trans. on Automat. Control. 1999. V. 44. P. 894–905.

20. *Граничин О.Н.*, Оценивание параметров линейной регрессии при произвольных помехах // АиТ. 2002. No 1. C. 30–41.

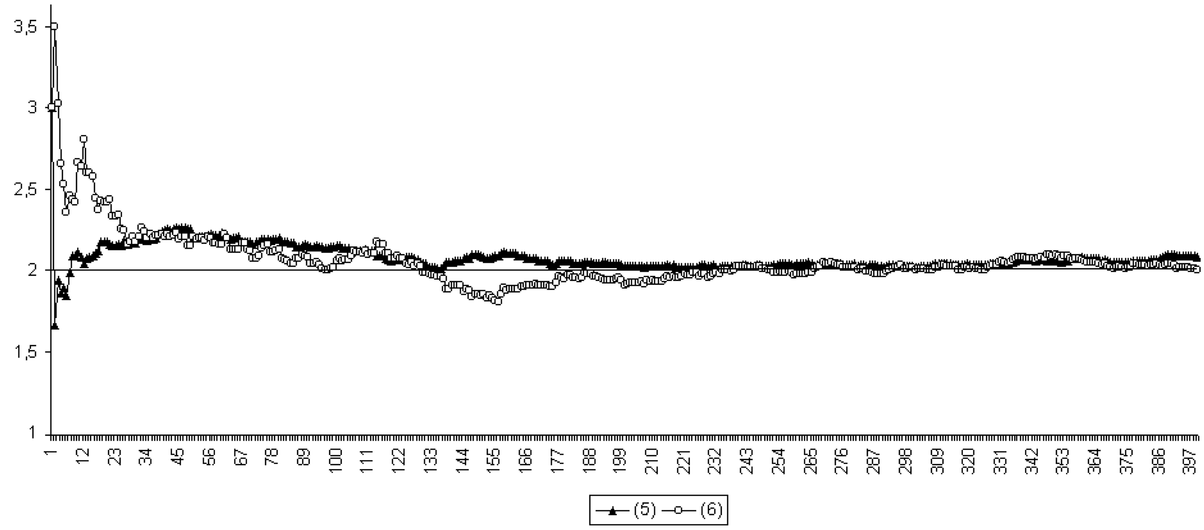

Рис. 1. Траектории оценок алгоритмов (5) и (6)