УДК 62.50;517.972

©2001 г. О.Н.Граничин, канд.физ.-мат.наук
(Санкт-Петербургский государственный университет)

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОМЕХАХ

Рассматриваются новые алгоритмы стохастической аппроксимации с возмущением на входе, которые в многомерном случае не только имеют простой вид и дают состоятельные оценки неизвестных параметров при "почти произвольных" помехах, но и естественно "вписываются" в конструкцию нового квантового электронного устройства для вычисления оценки вектора-градиента функции многих переменных.

1. Введение

При разработке алгоритмов оценивания и оптимизации в большинстве математических исследований помехам и ошибкам в измерениях или в описании свойств модели приписываются какие-либо полезные статистические характеристики, на основании которых доказывают обоснованность алгоритма. Наиболее часто предполагается, например, центрированность помех. В инженерной практике используются алгоритмы, основанные на идеях обыкновенного метода наименьших квадратов, представляющего собой простое усреднение данных наблюдения. Если при этом предположение о центрированности помех было сделано без достаточного обоснования, то практическое использование такого типа алгоритмов нецелесообразно, а иногда и вредно. Так обстоят дела, например, в условиях возможного противодействия "противника". В частности, если помеха определяется детерминированной (неслучайной) неизвестной функцией (противник глушит сигнал) или помехи измерения — зависимая последовательность, то результат применения к наблюдениям обычной операции усреднения никакой полезной информации в себе не несет.

Анализ типичных в такой ситуации теоретических результатов показывает, что получаемые по обыкновенным алгоритмам оценки плохие, последовательность наблюдений при этом обычно называют вырожденной и чаще всего вопрос о решении таких задач не рассматривают.

Другая близкая проблема, с которой сталкиваются при практическом применении многих рекуррентных алгоритмов оценивания, это недостаточная вариативность последовательности наблюдений. Например, при синтезе адаптивного управления главная цель состоит в минимизации отклонения вектора состояния системы от заданной траектории, что часто приводит к вырожденной последовательности наблюдений. Это обуславливает сложность проблемы идентификации, для успешного проведения которой должно быть обеспечено "разнообразие" наблюдений.

Основой достаточно нового подхода к решению задач оценивания и оптимизации в плохих условиях (например, при вырожденных наблюдениях) является использование *пробных возмущений*. Для "обогащения" информации в канале наблюдения при решении ряда задач удается через входные каналы системы или алгоритма включить в рассмотрение некоторое новое пробное возмущение, с задаваемыми экспериментатором или хорошо известными статистическими свойствами. Иногда роль пробного возмущения может играть уже присутствующий в системе измеряемый случайный процесс. В системах управления пробные воздействия можно добавлять через канал управления, в других случаях роль пробного воздействия может играть рандомизированный план наблюдений (эксперимента). При исследовании обновленной системы с пробным возмущением, которая иногда является просто в другой форме записанной старой, часто удается, использовав традиционные методы теории оценивания, получить соответствующие результаты о сходимости и области применимости новых алгоритмов. Одна из замечательных характеристик такого типа алгоритмов — сходимость при "почти произвольных" помехах. Существенное ограничение их применимости — предположение о независимости добавляемого в систему пробного возмущения и собственно помех. Во многих задачах это ограничение на свойства пробного возмущения и помех естественно и выполнимо. Так обстоит дело в случаях, когда в качестве помехи выступает либо неизвестная ограниченная детерминированная функция, либо другое постороннее случайное возмущение, генерируемое не знающим статистических свойств нашего пробного возмущения противником, пытающимся оказать противодействие нашим исследованиям.

Как ни странно, долгое время исследователи не замечали того факта, что в случае зашумленных наблюдений алгоритмы поиска с последовательным ($n = 1, 2, \ldots$) изменением оценки $\hat{\theta}_{n-1}$ в направлении по оси некоторого случайного центрированного вектора Δ_n:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \bar{y}_n,$$

могут сходиться к истинному вектору регулируемых параметров $\theta^\star$ не только при "хороших" помехах, но и при "почти произвольных". Это достигается в условиях, когда наблюдения $\bar{y}_n$ производятся в некоторой точке, определяемой предыдущей оценкой $\hat{\theta}_{n-1}$ и вектором Δ_n, называемым *пробным одновременным возмущением*. Алгоритмы такого типа предлагается называть *рандомизированными алгоритмами оценивания*, так как обоснование их сходимости при "почти произвольных" помехах существенно использует стохастическую (вероятностную) природу пробного возмущения. В недалеком будущем несколько настороженное отношение практиков к стохастическим алгоритмам и к их результатам кардинально изменится. На смену современному поколению вычислительной техники придут квантум–компьютеры, работающие в силу квантового принципа неопределенности Гейзенберга как стохастические системы. С учётом возможности квантового параллелизма алгоритмы оценивания типа рандомизированного, наверное, просто и естественно лягут в основу будущих квантовых вычислительных устройств.

Основная особенность предлагаемых в этой работе алгоритмов стохастической аппроксимации состоит в том, что неизвестная минимизируемая функция на каждом шаге измеряется не в точке, соответствующей предыдущей оценке, а в ее слегка возбужденной позиции. Это "возбуждение" и играет роль пробного одновременного возмущения, "обогащая" поступающую в канал наблюдения информацию. Анализ сходимости рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации при "почти произвольных" помехах был начат в работах [1–4]. В [5] рассматривались алгоритмы такого же типа, но в условиях "хороших" помех в наблюдении, при этом среди большого класса рекуррентных алгоритмов удалось доказать их асимптотическую оптимальность в некотором минимаксном смысле. Похожий алгоритм был предложен в [6–7], где было показано, что в многомерном случае существенное сокращение количества измерений на каждом шаге по сравнению с классической процедурой Кифера–Вольфовица не приводит к увеличению количества итераций, необходимого для получения заданной точности оценивания. В англоязычной литературе новый тип алгоритмов получил название *одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация (Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, SPSA)*. При разработке алгоритмов настройки нейронных сетей похожие алгоритмы были предложены в [8] и [9]. Вопрос о состоятельности рекуррентных алгоритмов при "почти произвольных" помехах рассматривался и в [10], и в [11].

В этой работе будет рассмотрена более общая, чем обычно, постановка задачи минимизации функционала типа среднего риска при условии измерения значений подынтегральной функции стоимости с "почти произвольными" помехами. Для последовательностей оценок, формируемых по разным алгоритмам, будет доказана сходимость к истинному значению неизвестных параметров с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле.

2. Постановка задачи и основные предположения

Пусть $F(w,\theta)\,:\;\;\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^r\;\to\;\mathbb{R}^1$ — дифференцируемая по второму аргументу функция, $x_1,x_2\ldots$ — выбираемая экспериментатором последовательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $n=1,2,\ldots$ доступно наблюдению с аддитивными помехами v_n значение функции $F(w_n,\cdot)$

$$y_n=F(w_n,x_n)+v_n,$$

где $\{w_n\}$ — неконтролируемая последовательность случайных величин ($w_n\in\mathbb{R}^p$), имеющих одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $\mathrm{P}_w(\cdot)$ с конечным носителем.

Постановка задачи. Требуется по наблюдениям $y_1,y_2\ldots$ построить последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ неизвестного вектора $\theta^\star$, минимизирующего функцию

$$f(\theta) = \int_{\mathbb{R}^p} F(w, \theta) \mathrm{P}_w(dw)$$

типа функционала среднего риска.

Обычно рассматривается задача минимизации функции $f(\cdot)$ при более простой модели наблюдений

$$y_n = f(x_n) + v_n,$$

которая легко укладывается в общую схему. Сделанное обобщение в постановке задачи диктуется стремлением учесть случай мультипликативных помех в наблюдениях

$$y_n = w_n f(x_n) + v_n,$$

который входит в общую схему с функцией $F(w, x) = w f(x)$, и желанием обобщить модель наблюдений из [12], где

$$F(w, x) = \frac{1}{2}(x - \theta^\star - w)^{\mathrm{T}}(x - \theta^\star - w).$$

Сформулируем основные предположения, используя обозначения $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для евклидовой нормы и скалярного произведения в $\mathbb{R}^r$.

SA.1 Функция $f(\cdot)$ — сильновыпуклая, т.е. имеет единственный минимум в $\mathbb{R}^r$ в некоторой точке $\theta^\star = \theta^\star(f(\cdot))$ и

$$(x - \theta^\star, \nabla f(x)) \geq \mu\|x - \theta^\star\|^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$.

SA.2 Условие Липшица на градиент функции $f(\cdot)$

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(\theta)\| \leq A\|x - \theta\|, \ \forall x, \theta \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $A > \mu$.

3. Пробное возмущение и основные алгоритмы

Пусть $\Delta_n,\ n = 1, 2, \dots$ — наблюдаемая последовательность независимых друг от друга случайных величин в $\mathbb{R}^r$, называемая в дальнейшем *пробным одновременным возмущением*, с функциями распределения $\mathrm{P}_n(\cdot)$.

Зафиксируем некоторый начальный вектор $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r$ и выберем последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю: $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Для построения последовательностей точек измерения $\{x_n\}$ и оценок $\{\theta_n\}$ предлагаются три алгоритма. Первый из них использует на каждом шаге (итерации) одно наблюдение:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n,\ y_n = F(w_n, x_n) + v_n\ , \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n, \end{cases}$$

а второй и третий алгоритмы, представляющие собой рандомизированные версии процедуры Кифера–Вольфовица, — по два наблюдения:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n,\ x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{2\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}), \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, \qquad x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1}, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}). \end{cases}$$

Во всех трех алгоритмах используются некоторые вектор-функции (ядра) $\mathcal{K}_n(\cdot) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r,\ n = 1, 2, \dots$ с компактным носителем, удовлетворяющие вместе с функциями распределения пробного возмущения $\mathrm{P}_n(\cdot)$ условиям:

$$(4)\qquad \int \mathcal{K}_n(x) \mathrm{P}_n(dx) = 0,\ \int \mathcal{K}_n(x) x^{\mathrm{T}} \mathrm{P}_n(dx) = \mathrm{I},$$

$$\sup_n \int \|\mathcal{K}_n(x)\|^2 \mathrm{P}_n(dx) < \infty,\ \ n = 1, 2, \dots,$$

где I — r-мерная единичная матрица.

Алгоритм (2) впервые был предложен в работе Г.Кушнера и Д.Кларка [13] для случая равномерного распределения и функции $\mathcal{K}_n(\Delta_n) = \Delta_n$. В [1] с той же простой функцией ядра, но для более общего класса пробных возмущений, был впервые предложен алгоритм (1) построения последовательности оценок, состоятельных при "почти произвольных" помехах в наблюдении. Б.Т.Поляком и А.Б.Цыбаковым в [5] были рассмотрены оба алгоритма (1) и (2) с вектор–функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$ достаточно общего вида для случая равномерно распределенного пробного возмущения и в предположении о независимости и центрированности помех наблюдения. Дж.Спал в [6,7] рассматривал алгоритм (2) для случая распределения пробного возмущения с конечными обратными моментами и вектор–функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$, задаваемой по правилу

$$\mathcal{K}_n((x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)})^{\mathrm{T}}) = (\frac{1}{x^{(1)}}, \frac{1}{x^{(2)}}, \ldots, \frac{1}{x^{(r)}})^{\mathrm{T}}.$$

С теми же вектор–функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и ограничениями на вид распределения пробного одновременного возмущения Х.-Ф.Ченом и др. в [10] было предложено рассматривать алгоритм (3).

4. Сходимость с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле

Вместо алгоритма (1) будем рассматривать близкий к нему алгоритм с проектированием

$$\begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n,\ y_n = F(w_n, x_n) + v_n\ , \\ \\ \hat{\theta}_n = \mathcal{P}_{\Theta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n), \end{cases} \tag{5}$$

для которого удобнее провести доказательство состоятельности последовательности формируемых оценок. В этом алгоритме $\mathcal{P}_{\Theta_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ — операторы проектирования на некоторые выпуклые замкнутые ограниченные подмножества $\Theta_n \subset \mathbb{R}^r$, которые содержат, начиная с некоторого $n \geq 1$, точку $\theta^\star$. Если заранее известно ограниченное замкнутое выпуклое множество Θ, содержащее точку $\theta^\star$, то можно считать $\Theta_n = \Theta$. В противном случае, множества $\{\Theta_n\}$ могут расширяться до бесконечности.

Обозначим $\mathbb{W} = \mathrm{supp}(\mathrm{P}_w(\cdot)) \subset \mathbb{R}^p$ — носитель распределения $\mathrm{P}_w(\cdot)$; $\mathcal{F}_{n-1}$ — σ-алгебру вероятностных событий, порождаемую случайными величинами $\hat\theta_0, \hat\theta_1, \ldots, \hat\theta_{n-1}$, формируемыми по алгоритму (5) (или (2), или (3)); при использовании алгоритма (2) или (3)

$$\bar v_n = v_{2n} - v_{2n-1},\ \bar w_n = \begin{pmatrix} w_{2n} \\ w_{2n-1} \end{pmatrix},\ d_n = 1,$$

а при построении оценок по алгоритму (5)

$$\bar v_n = v_n,\ \bar w_n = w_n,\ d_n = \mathrm{diam}(\Theta_n),$$

где $\mathrm{diam}(\cdot)$ — евклидовый диаметр множества.

Т е о р е м а 1 *Пусть выполнены условия:*
(SA.1) *для функции* $f(\theta) = \mathrm{E}\{F(w,\theta)\}$*;*
(SA.2) *для функций* $F(w,\cdot)\ \forall w \in \mathbb{W}$*;*
(4) *для функций* $\mathcal{K}_n(\cdot)$ *и* $\mathrm{P}_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$*;*
$\forall \theta \in \mathbb{R}^r$ *функции* $F(\cdot,\theta)$ *и* $\nabla_\theta F(\cdot,\theta)$ *равномерно на* $\mathbb{W}$ *ограничены;*
$\forall n \geq 1$ *случайные величины* $\bar v_1, \ldots, \bar v_n$ *и вектора* $\bar w_1, \ldots, \bar w_{n-1}$ *не зависят от* $\bar w_n, \Delta_n$*, а случайный вектор* $\bar w_n$ *не зависит от* Δ_n*;*
$\mathrm{E}\{\bar v_n^2\} \leq \sigma_n^2,\ n = 1, 2, \ldots.$

Если $\sum_n \alpha_n = \infty$ *и* $\alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0,\ \alpha_n^2\beta_n^{-2}(1 + d_n^2 + \sigma_n^2) \to 0$ *при* $n \to \infty$,

тогда *последовательность оценок* $\{\hat\theta_n\}$*, доставляемых алгоритмом (5) (или (2), или (3)), сходится к точке* $\theta^\star$ *в среднеквадратичном смысле:* $\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n - \theta^\star\|^2\} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Если, более того, $\sum_n \alpha_n\beta_n^2 < \infty$ *и с вероятностью единица*

$$\sum_n \alpha_n^2\beta_n^{-2}(1 + \mathrm{E}\{\bar v_n^2|\mathcal{F}_{n-1}\}) < \infty,$$

тогда $\hat\theta_n \to \theta^\star$ *при* $n \to \infty$ *с вероятностью единица.*

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Для функции $F(w,x) = wf(x)$ условия теоремы 1 выполняются, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям **(SA.1,2)**.

В теореме 1 помехи наблюдения v_n можно условно назвать "почти произвольными", так как они могут быть неслучайными, но неизвестными и ограниченными, или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей. В частности, для доказательства утверждений теоремы 1 нет необходимости предполагать что-либо о зависимости между $\bar{v}_n$ и $\mathcal{F}_{n-1}$.

Утверждения теоремы 1 становятся неверными, если помехи $\bar{v}_n$ имеют определенную структуру зависимости от точки наблюдения $\bar{v}_n = \bar{v}_n(x_n)$. Если такая зависимость имеет место, например, в связи с ошибками округления, то при попытках решения такого типа задач, наверное, целесообразно помеху наблюдения разбить на две части: $\bar{v}_n(x_n) = \tilde{v}_n + \xi(x_n)$, первая из которых, может быть, удовлетворяет условиям теоремы 1, а, если вторая является результатом ошибок округления, то, как правило, она обладает хорошими статистическими свойствами и, может быть, её наличие не помешает сходимости алгоритмов.

Условие независимости помех наблюдения от пробного возмущения может быть ослаблено. Достаточно потребовать стремление к нулю с вероятностью единица при $n \to \infty$ условной взаимной корреляции между $\bar{v}_n$ и $\mathcal{K}_n(\Delta_n)$ со скоростью, неменьшей чем $\alpha_n \beta_n^{-1}$.

Несмотря на кажущуюся близость алгоритмов (2) и (3), в случае произвольных помех в наблюдениях использование второго из них в системах реального времени более целесообразно. Для алгоритма (2) выполнение условия о независимости помехи наблюдения v_{2n} от пробного возмущения Δ_n слишком ограничительно, так как в предыдущий момент времени $2n-1$ вектор Δ_n уже использовался в системе. При работе с алгоритмом (3) помеха v_{2n} и вектор пробного возмущения Δ_n появляются в системе одновременно, что позволяет надеяться на их независимость.

В случае когда функции $F(w,\cdot)$ ℓ-раз непрерывно-дифференцируемы в [5] для построения вектор–функции $\mathcal{K}_n(\cdot)$ было предложено использовать ортогональные многочлены Лежандра $p_m(\cdot), m = 0, 1, \dots, \ell$, а в качестве вероятностного распределения пробного возмущения было выбрано равномерное на r-мерном кубе $[-1/2, 1/2]^r$. При этом было показано, что среднеквадратичная скорость сходимости асимптотически ведет себя как $\mathcal{O}(n^{\frac{\ell}{\ell+1}})$. Аналогичный результат можно получить и для рассматриваемого здесь случая общего распределения пробного возмущения.

5. Квантовый компьютер и вычисление оценки вектора-градиента функции

Простота в представлении рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации позволяет использовать их не только в специальных программируемых вычислительных устройствах, но и заложить принцип *одновременного возмущения* в конструкцию разных электронных устройств классического типа. Фундаментальным вопросом обоснования сходимости при использовании метода на практике является способ генерации пробного возмущения, такой, чтобы помехи в канале наблюдения были с ним независимы, кроме того, компоненты вектора пробного возмущения должны быть независимыми между собой. При реализации алгоритма на классическом компьютере, последовательно выполняющим элементарные операции одну за другой, эффективность предлагаемых алгоритмов снижается по сравнению с теоретическими ожиданиями. В самом названии "одновременно возмущаемый" заложено настойчивое требование к практической реализации — быть *параллельной*. Вместе с тем, при большой размерности векторов-аргументов функции (несколько сотен, тысяч) задача организации параллельных вычислений на компьютерах классического типа достаточно сложна.

Здесь будет рассмотрена модель "гипотетического" квантового вычислителя, в которой не только естественно генерируется пробное одновременное возмущение, но и основное нетривиальное понятие — *измерение результата квантового вычисления* — реализуется за счет того, что оно само по себе заложено в структуре рандомизированного алгоритма в виде умножения результата вычисления значения исследуемой функции на пробное возмущение. Другими словами, ниже будет приведен пример построения квантового устройства, вычисляющего хорошую оценку вектора–градиента неизвестной функции от многих переменных за *один такт*. Слово "гипотетический" сознательно написано в кавычках, так как после доклада П.Шора на Берлинском математическом конгрессе в 1998 г. [14] многие серьезные исследователи стали писать о квантовых компьютерах как о технике ближайшего будущего.

Опишем, следуя [14], математическую модель квантового компьютера, производящего вычисления по определенной цепи. При этом будем опираться, где это возможно, на обобщение понятий, характерных для модели классического компьютера. Классический компьютер обрабатывает биты, принимающие значения из множества $\{0, 1\}$. Он оборудован конечным набором схем, которые могут применяться к наборам битов. Квантовый компьютер обрабатывает q-биты (квантовые биты), представляющие собой квантовую систему двух состояний (микроскопическая система, соответствующая описанию, например, возбужденного иона или поляризованного фотона, или спина ядра атома). Характеристики поведения этой квантовой системы такие, как интерференция, суперпозиция, стохастичность и т.п., можно точно объяснить, только используя правила квантовой механики [15]. Математически q-бит принимает значения из комплексного проекционного (гильбертового) пространства $\mathbb{C}^2$. Квантовые состояния инвариантны относительно умножения на скалярное значение. Обозначим базис этого пространства $|0\rangle$, $|1\rangle$. Будем предполагать, что квантовый компьютер как и классический оборудован дискретным набором фундаментальных компонент, называемых квантовыми схемами. Каждая квантовая схема по своей сути является унитарным преобразованием, которое действует на фиксированное число q-битов. Один из фундаментальных принципов квантовой механики состоит в том, что совместное квантовое пространство состояний системы, состоящей из l систем с двумя состояниями, является тензорным произведением их индивидуальных пространств-состояний. Таким образом, квантовое пространство состояний системы из l q-битов является проекционным гильбертовым пространством $\mathbb{C}^{2^l}$. Набор базисных векторов этого пространства состояний можно параметризовать строками битов длины l: $|b_1 b_2 \dots b_l\rangle$. Предположим, что на вход квантового компьютера подается классическая информация — строка i длины k, $k \leq l$. В квантовом вычислении первоначально l q-битов установлены в состояние $|i00...0\rangle$. Выполняемая цепь строится из конечного числа квантовых схем, действующих на эти q-биты. В конце вычисления квантовый компьютер переходит в некоторое состояние, являющееся единичным вектором в пространстве $\mathbb{C}^{2^l}$. Это состояние можно представить в виде

$$W = \sum_s \psi^{(s)} |s\rangle,$$

где суммирование по s идет по всем двоичным строкам длины l, $\psi^{(s)} \in \mathbb{C}$, $\sum_s |\psi^{(s)}|^2 = 1$. Величины $\psi^{(s)}$ называются вероятностными амплитудами, а W называют суперпозицией базисных векторов $|s\rangle$. В квантовой механике принцип неопределенности Гейзенберга состоит в том, что невозможно точно ответить на вопрос о состоянии квантовой системы. Но существует несколько возможностей выполнить измерение всех q-битов (или подмножества q-битов). Пространство состояний квантовой системы является гильбертовым, понятие измерение состояния эквивалентно скалярному произведению в этом гильбертовом пространстве с некоторым заданным вектором V:

$$\langle V, W \rangle.$$

Обычно при измерении используется проекция каждого из q-битов на основание базиса $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Результат этого измерения — итог вычисления.

Рассмотрим ту часть рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации (3) (или (1), или (2), которая используется для вычисления в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^r$ приближенного значения вектора–градиента $\hat{g}(x)$ функции $f(\cdot) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$. Будем считать, что для представления чисел в нашем гипотетическом компьютере используется p двоичных разрядов и $l = p \times r$ (в современных компьютерах, наиболее часто $p = 16, 32, 64$). Пусть в алгоритме $\mathcal{K}_n(x) = x$, $\beta = 2^{-j}$, $0 \leq j < p$ и подаваемое на вход алгоритма пробное одновременное возмущение задается распределением Бернулли. Для любого числа $u \in \mathbb{R}$ обозначим s_u его двоичное представление в виде строки битов $s_u = \overline{b_u^{(1)} \ldots b_u^{(p)}}$. Предположим, что у нас в распоряжении есть квантовая цепь, вычисляющая значения функции $f(x)$. Более точно, можно считать, что задано унитарное преобразование $U_f : \mathbb{C}^{2^l} \to \mathbb{C}^{2^l}$, которое для любого $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(r)})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^r$ базисному элементу

$$|s_{x^{(1)}} \ldots s_{x^{(r)}}\rangle = |b_{x^{(1)}}^{(1)} \ldots b_{x^{(1)}}^{(p)} \ldots b_{x^{(r)}}^{(1)} \ldots b_{x^{(r)}}^{(p)}\rangle$$

сопоставляет другой базисный элемент

$$|s_{f(x)} 00 \ldots 0\rangle = |b_{f(x)}^{(1)} \ldots b_{f(x)}^{(p)} 00 \ldots 0\rangle = U_f |s_{x^{(1)}} \ldots s_{x^{(r)}}\rangle.$$

Пусть наш гипотетический квантовый вычислитель содержит, по крайней мере, четыре l q-битных регистра: $\mathcal{I}$ - входной, преобразующий классические входные данные в квантовые, два рабочих W_1, W_2, позволяющих манипулировать с квантовыми данными, и выходной Δ, в котором хранится то квантовое значение, проекция на которое дает результат вычисления в классической форме (измерение). Для построения квантовой цепи, реализующей вычисление оценки вектора-градиента функции $f(\cdot)$, потребуется несколько стандартных квантовых (унитарных) преобразований, которые можно применять к данным, хранящимся в регистрах. Считаем, что результат преобразования сохраняется в том же регистре, к которому оно применялось.

Сложение/Вычитание $U_{\pm X}$ Сложение/Вычитание одного вектора с другим, хранящимся в регистре X.

Поворот первых q-битов $U_{R_{1,p+1,\ldots,(r-1)p+1}}$ Преобразует состояние q-битов с номерами $1, p+1, \ldots, (r-1)p+1$ в $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$.

Сдвиг на j q-битов U_{S_j} Сдвигает вектор состояния на j q-битов, добавляя новые $|0\rangle$.

Для вычисления оценки вектора–градиента функции $f(\cdot)$ в точке x можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Обнулить состояния всех регистров $\mathcal{I}, W_1, W_2, \Delta$.

2. Подать на вход $\mathcal{I}$ строку битов s_x, преобразовать регистр Δ :
$$\Delta := U_{R_{1,p+1,\ldots,(r-1)p+1}} \Delta.$$

3. Вычислить значения функции $f(x)$ и $f(x + 2^{-j}\Delta)$
$$W_1 := U_f U_{+\mathcal{I}} W_1,$$
$$W_2 := U_f U_{+\mathcal{I}} U_{S_j} U_{+\Delta} W_2,$$

4. Вычислить разность $W_2 := U_{-W_1} W_2$.

5. Последовательно $i = 1, 2, \ldots, r$ измерить компоненты результата
$$\hat{g}^{(i)}(x) = \langle \Delta, W_2 \rangle, \; W_2 := U_{S_p} W_2.$$

Выражение для измерения результата вычисления эквивалентно формуле для оценки вектора–градиента функции $f(\cdot)$:

$$\nabla f(x) \approx \Delta \frac{f(x+\beta\Delta) - f(x)}{\beta}.$$

6. Заключение

По сравнению со стандартными детерминированными методами стохастическая оптимизация значительно расширяет диапазон практических задач, для которых можно найти точное оптимальное решение. Алгоритмы типа стохастической оптимизации позволяют эффективно решать проблемы в таких областях, как анализ информационных сетей; оптимизация, основанная на моделировании; обработка изображений и распознавание образов; обучение нейронных сетей и адаптивное управление. Ожидается, что роль стохастической оптимизации будет возрастать вместе с усложнением современных систем аналогично тому, как прирост населения и истощение природных богатств инициирует использование более интенсивных технологий там, где прежде они были не нужны. Логика современного развития вычислительной техники также ведет к замене традиционных детерминированных алгоритмов стохастическими, так как уже начали появляться первые квантовые компьютеры, работающие на стохастических принципах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим алгоритм (5). Для алгоритмов (2) и (3) доказательство незначительно отличается и может быть проведено по аналогии. Для достаточно больших n, при которых $\theta^\star = \theta^\star(f(\cdot)) \in \Theta_n$, используя свойства проекции, нетрудно получить

$$\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2 \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^\star - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n\|^2 .$$

Применив к последнему неравенству операцию условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$, имеем

$$\mathrm{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^\star\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^\star\|^2 -$$

$$(6)\qquad -2\frac{\alpha_n}{\beta_n}\langle\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\,,\mathrm{E}\{\mathcal{K}_n(\Delta_n)y_n|\mathcal{F}_{n-1}\}\rangle+$$

$$+\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\mathrm{E}\{y_n^2\|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\}.$$

В силу теоремы о среднем значении, из условия **(SA.2)** для функции $F(\cdot,\cdot)$ следует

$$|F(w,x)-F(w,\theta^\star)|\le\frac{1}{2}\nabla_\theta F(w,\theta^\star)^2+(A+\frac{1}{2})\|x-\theta^\star\|^2,\ x\in\mathbb{R}^r.$$

Отсюда, в силу равномерной ограниченности функции $F(\cdot,\theta)$, обозначив

$$\nu_1=\sup_{w\in\mathbb{W}}(|F(w,\theta^\star)|+\frac{1}{2}\nabla_\theta F(w,\theta^\star)^2),$$

получаем

$$F(w,\hat\theta_{n-1}+\beta_n x)^2\le(\nu_1+(2A+1)(\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2+\|\beta_n x\|^2))^2$$

равномерно по $w\in\mathbb{W}$. В силу условия (4) имеем

$$\mathrm{E}\{v_n^2\|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\}\le\sup_x\mathcal{K}_n(x)^2\xi_n^2.$$

Для последнего слагаемого в правой части (6) из двух последних неравенств, учитывая ограниченность вектор–функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и компактность их носителя, последовательно выводим

$$\mathrm{E}\{\|y_n\|^2\|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\}\ \le\ 2\mathrm{E}\{v_n^2\|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\}+$$

$$+2\int\int F(w,\hat\theta_{n-1}+\beta_n x)^2\|\mathcal{K}_n(x)\|^2\mathrm{P}_n(dx)\mathrm{P}_w(dw)\ \le$$

$$\le\ C_1+C_2((d_n^2+1)\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2+\beta_n^2)+C_3\xi_n^2.$$

Здесь и ниже обозначены через $C_i,\ i=1,2,\dots$ некоторые положительные константы.

Далее рассмотрим

$$\beta_n^{-1}\mathrm{E}\{y_n\mathcal{K}_n(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\}\ =$$

$$(7)\qquad =\ \beta_n^{-1}\int\int F(w,\hat\theta_{n-1}+\beta_n x)\mathcal{K}_n(x)\mathrm{P}_n(dx)\mathrm{P}_w(dw)+$$

$$+\beta_n^{-1}\mathrm{E}\{v_n\mathcal{K}_n(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\}.$$

Для второго слагаемого в последнем соотношении, в силу независимости v_n и Δ_n и условия (4), имеем

$$\mathrm{E}\{v_n\mathcal{K}_n(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} = \mathrm{E}\{v_n|\mathcal{F}_{n-1}\}\int \mathcal{K}_n(x)\mathrm{P}_n(dx) = 0.$$

В силу равномерной ограниченности функции $\nabla_\theta F(\cdot,\theta)$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \nabla_\theta F(w,x)\mathrm{P}_w(dw) = \nabla f(x).$$

Используя последнее соотношение и условие (4), преобразуем первое слагаемое в (7) к виду

$$\beta_n^{-1}\int\int F(w,\hat\theta_{n-1}+\beta_n x)\mathcal{K}_n(x)\mathrm{P}_n(dx)\mathrm{P}_w(dw) = \nabla f(\hat\theta_{n-1}) +$$

$$\int\Big(\beta_n^{-1}\int F(w,\hat\theta_{n-1}+\beta_n x)\mathcal{K}_n(x)\mathrm{P}_n(dx) - \nabla_\theta F(w,\hat\theta_{n-1})\Big)\mathrm{P}_w(dw) = \nabla f(\hat\theta_{n-1}) +$$

$$+\int\int \mathcal{K}_n(x)x^{\mathrm{T}}\int_0^1(\nabla_\theta F(w,\hat\theta_{n-1}+t\beta_n x) - \nabla_\theta F(w,\hat\theta_{n-1}))dt\mathrm{P}_n(dx)\mathrm{P}_w(dw).$$

Для абсолютной величины второго слагаемого в последнем равенстве, в силу выполнения условий **(SA.2)** для любой из функций $F(w,\cdot)$ и (4) для $\mathcal{K}_n(\cdot)$, имеем

$$\Big|\int\int \mathcal{K}_n(x)x^{\mathrm{T}}\int_0^1(\nabla_\theta F(w,\hat\theta_{n-1}+t\beta_n x) - \nabla_\theta F(w,\hat\theta_{n-1}))dt\mathrm{P}_n(dx)\mathrm{P}_w(dw)\Big| \le$$

$$\le \int\int \|\mathcal{K}_n(x)\|\|x\|A\|\beta_n x\|\mathrm{P}_n(dx)\mathrm{P}_w(dw) \le C_4\beta_n.$$

Следовательно, для второго слагаемого в правой части неравенства (6) получаем

$$-2\frac{\alpha_n}{\beta_n}\langle\hat\theta_{n-1}-\theta^\star, \mathrm{E}\{\mathcal{K}_n(\Delta_n)y_n|\mathcal{F}_{n-1}\}\rangle \le -2\alpha_n\langle\hat\theta_{n-1}-\theta^\star, \nabla f(\hat\theta_{n-1})\rangle +$$

$$+2C_4\alpha_n\beta_n\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|.$$

Подставив в (6) полученные выше соотношения для второго и третьего слагаемых в правой части, можно заключить, что

$$\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n-\theta^\star\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\} \le \|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2 - 2\alpha_n\langle\hat\theta_{n-1}-\theta^\star, \nabla f(\hat\theta_{n-1})\rangle +$$

$$+2C_4\alpha_n\beta_n\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\| + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\Big(C_1 + C_2((d_n^2+1)\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2+\beta_n^2)+C_3\xi_n^2\Big).$$

Используя выполнение условия **(SA.1)** для функции $f(\cdot)$ и справедливое при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\| \le \frac{\varepsilon^{-1}\beta_n + \varepsilon\beta_n^{-1}\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2}{2},$$

выводим

$$\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n-\theta^\star\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\} \le \|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2\Big(1-(2\mu-\varepsilon C_4)\alpha_n + C_2\alpha_n^2\beta_n^{-2}(d_n^2+1)\Big)+$$

$$+\varepsilon^{-1}C_4\alpha_n\beta_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\Big(C_1+C_2\beta_n^2+C_3\xi_n^2\Big).$$

Выберем ε настолько малым, чтобы $\varepsilon C_4 < \mu$ и пусть n достаточно велико. Используя условия теоремы 1 для числовых последовательностей, преобразуем последнее неравенство к виду

$$\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n-\theta^\star\|^2|\mathcal{F}_{n-1}\} \le \|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2(1-C_5\alpha_n) + C_6(\alpha_n\beta_n^2+\alpha_n^2\beta_n^{-2}(1+\xi_n^2)).$$

Отсюда в силу условий теоремы видно, что выполнены все условия леммы Роббинса–Сигмунда [16], необходимые для сходимости с вероятностью единица $\hat\theta_n \to \theta^\star$ при $n\to\infty$. Для доказательства в соответствующих условиях теоремы 1 сходимости в среднеквадратичном смысле возьмем безусловное математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства

$$\mathrm{E}\{\|\hat\theta_n-\theta^\star\|^2\} \le \mathrm{E}\{\|\hat\theta_{n-1}-\theta^\star\|^2\}(1-C_5\alpha_n) + C_6(\alpha_n\beta_n^2+\alpha_n^2\beta_n^{-2}(1+\sigma_n^2)).$$

Сходимость к точке $\theta^\star$ последовательности оценок $\{\hat\theta_n\}$ в среднеквадратичном смысле следует из [17, гл.2, лемма 5].

Доказательство теоремы 1 закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Граничин О.Н.*, "Стохастическая аппроксимация с возмущением на входе при зависимых помехах наблюдения" // Вестн. ЛГУ. 1989. Сер. 1. Вып. 4. С. 27–31.

2. *Граничин О.Н.*, "Процедура стохастической аппроксимации с возмущением на входе" // АиТ. 1992. No 2. С. 97–104.

3. *Граничин О.Н.*, "Оценивание точки минимума неизвестной функции, наблюдаемой на фоне зависимых помех" // Пробл. передачи информ.. 1992. No 2. С. 16–20.

4. *Polyak B.T., Tsybakov A.B.*, "On stochastic approximation with arbitrary noise (the KW case)"// In: Topics in Nonparametric Estimation, R.Z. Khasminskii ed., Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, 1992. No. 12. P. 107–113.

5. *Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.*, "Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации" // Пробл. передачи информ.. 1990. No 2. С. 45–53.

6. *Spall J.C.*, "A Stochastic Approximation Technique for Generating Maximum Likelihood Parameter Estimates" // Proc. Amer. Control Conf.. 1987. P. 1161–1167.

7. *Spall J.C.*, "Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation" // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. 37. P. 332–341.

8. *Alspector J., Meir R., Jayakumar A. et al*, "A Parallel Gradient Descent Method for Learning in Analog VLSI Neural Networks"// In: Hanson S.J. et al eds. "Advances in Neural Information Processing Systems". San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc. 1993. P. 834–844.

9. *Maeda Y., Kanata Y.*, "Learning Rules for Reccurent Neural Networks Using Perturbation and their Application to Neuro-control" // Trans. IEE of Japan. 1993. V. 113-C. P. 402–408.

10. *Chen H.F., Duncan T.E., Pasik–Duncan B.*, "A Kiefer–Wolfowitz Algorithm with Randomized Differences"// IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 3. P. 442–453.

11. *Ljung L., Guo L.*, "The Role of Model Validation for Assessing the Size of the Unmodeled Dynamics" // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No 9. P. 1230–1239.

12. *Граничин О.Н.*, "Оценивание параметров линейной регрессии при произвольных помехах" // АиТ. 2001. No 11. С. – .

13. *Kushner H.J., Clark D.S.,* "Stochastic Approximation Methods for Constraine and Unconstraind System". Berlin–Germany Springer–Verlag, 1978.

14. *Shor P.W.*, "Quantum computing" // Proc. 9-th Int. Math. Congress.. Berlin. 1998.
www.math.nine.edu/documenta/xvol-icm/Fields/Fields.html

15. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.*, "Лекции по квантовой механике для студентов-математиков." Изд-во РХД, 2001.

16. *Robbins H., Siegmuud D.*, "A convergence theorem for nonnegative almost super-marlingales and some applications"// In: Optimizing Methods in Statistics, J.S.Rustagi ed.. Academic Press, NY. 1971. P. 233–257.

17. *Поляк Б.Т.* "Введение в оптимизацию." М.: Наука, 1983.