УДК 62-50 Вестник ЛГУ. Сер. 1, 1989, вып. 1 (№ 1)

О. Н. Граничин

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ ПРОЦЕДУРЕ ПРИ ЗАВИСИМЫХ ПОМЕХАХ В НАБЛЮДЕНИИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ НА ВХОДЕ ПРОБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Введение. Широко известна задача определения корня x_0 уравнения $b(x)=0$, если в эксперименте с номером $t (t=1, 2, \ldots)$ доступным наблюдению для исследователя является измерение функции $b(x)$ с аддитивной помехой $\xi(t)$, т. е. величина $b(X(t))+\xi(t)$, где $X(t)\in \in R^1$ — выбираемое исследователем значение аргумента. Роббинсом и Монро для решения этой задачи была предложена следующая рекуррентная процедура (см. [1]):

$$X(t+1)=X(t)+\gamma(t)[b(X(t))+\xi(t)], \tag{1}$$

где $\{\gamma(t)\}$ — детерминированная последовательность положительных чисел (коэффициентов).

К настоящему времени вопрос об условиях сходимости процедуры (1) к точке x_0 достаточно хорошо изучен (см., например, [2, 3]), но при этом для сходимости процедуры в случае зависимых возмущений $\xi(t)$ практически во всех работах требуется, чтобы зависимость между случайными величинами $\xi(t)$ и $\xi(t')$ в той или иной мере ослабевала при увеличении разности аргументов $|t-t'|\to\infty$. Например, в работах [4, 5] рассматриваются некоторые условия на последовательность помех, называемые условиями сильного перемешивания, проверка которых на практике весьма затруднительна.

В случае, когда трудно утверждать что-либо существенное о свойствах зависимости помех в [6], для «обогащения» последовательности наблюдений предложено подавать на вход «пробное» возмущение, статистические свойства которого известны. В [7—9] предложено несколько алгоритмов стохастической аппроксимации с возмущением на входе для задачи идентификации линейного динамического объекта, функционирующего в условиях внешних возмущений, для которых, используя мартингальные методы, доказана состоятельность оценок.

Можно несколько изменить процедуру (1), включив в нее пробные возмущения, как это предлагается, например, в [7, 8]. В данной работе доказывается, что при этом полученная процедура сходится к стационарной точке функции $b(x)$.

Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе. Предположим, что некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция $b(x)$ задана на компактном множестве $D\subset R^1$. Рассмотрим следующую задачу: определить корень уравнения $b'(x)$, если в эксперименте с номером t $(t=1, 2, \ldots)$ доступным наблюдению для исследователя является измерение функции $b(x)$ с аддитивной помехой $\xi(t)$, т. е. величина $b(X(t))+\xi(t)$, где $X(t)\in R^1$ — выбираемое исследователем значение аргумента.

Для формирования последовательности оценок $X(t)$ $(t=1, 2, \ldots)$ воспользуемся алгоритмом

$$X(t+1)=P_D(X(t)+\gamma(t)w(t)[b(X(t)+\delta(t)w(t))+\xi(t)]),\quad X(0)\in D, \tag{2}$$

в котором $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ — последовательность центрированных, одинаково распределенных, ограниченных, независимых случайных величин, называемых пробными возмущениями:

$$|w(t)|\leqslant C_w,\ Ew(t)=0,\ Ew^2(t)=\sigma_w^2>0\quad t=0,\ 1,\ \ldots \tag{3}$$

E — знак математического ожидания, $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{\delta(t)\}_{t=0}^{\infty}$ — детерминированные последовательности положительных чисел, $P_D(x): \mathbf{R}^1 \to D$ — функция, сопоставляющая числу x ближайшее к нему число из множества D.

О сходимости процедуры (2) можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Пусть точка x_0 — корень уравнения $b'(x)=0$, и выполняются условия:*

а) случайные величины $\xi(t)$ и $w(t)$ независимы при каждом $t=0, 1, \ldots$,

б) вторые моменты случайных величин $\xi(t)$, $t=0, 1, \ldots$, равномерно ограничены,

в) функция $b'(x)$ такова, что для $x \in D$ и некоторого L

$$(x-x_0)b'(x) \leqslant -L(x-x_0)^2, \tag{4}$$

г) для последовательностей чисел $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{\delta(t)\}_{t=0}^{\infty}$ выполнено

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma(t)\delta(t) = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \gamma(t)(\delta(t)^2 + \gamma(t)) < \infty. \tag{5}$$

Тогда последовательность оценок $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$, определяемая по алгоритму (2) с вероятностью 1, сходится к точке x_0.

Замечания 1. Наиболее серьезным является первое условие теоремы, но оно значительно более слабое, чем какие-либо предположения о свойствах зависимостей между возмущениями в наблюдении.

2. Остальные условия теоремы могут быть заменены на более слабые, но это значительно усложняет доказательство.

3. Последовательности чисел $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{\delta(t)\}_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющие условию г), получить нетрудно. Например, можно выбрать $\gamma(t) = t^{-3/4}$, $\delta(t) = t^{-1/4}$.

Сформулированную теорему, вероятно, нужно рассматривать как некоторый пример целесообразности использования пробных возмущений.

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность квадратов разностей $\Delta(t) = (X(t)-x_0)^2$, $t=0, 1, \ldots$ В силу алгоритма (2) имеем

$$\Delta(t+1) \leqslant \Delta(t) + 2\gamma(t)w(t)(X(t)-x_0)[b(X(t)+\delta(t)w(t)) + \xi(t)] + \\ + \gamma(t)^2 w(t)^2 [b(X(t)+\delta(t)w(t)) + \xi(t)]^2. \tag{6}$$

Заметим, что функцию $b(x)$ в окрестности точки $X(t)$ можно разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$b(X(t)+\delta(t)w(t)) = b(X(t)) + b'(X(t))\delta(t)w(t) + \\ + \frac{1}{2}b''(y(t))\delta^2(t)w(t)^2,$$

в котором величина $y(t)$ расположена на числовой оси между $X(t)$ и $X(t)+\delta(t)w(t)$. Учитывая, что из-за компактности множества D функции $b(x)$ и $b''(x)$ на D ограничены, из (6), используя последнее равенство, нетрудно получить

$$\Delta(t+1) \leqslant \Delta(t) + 2\gamma(t)\delta(t)(X(t)-x_0)b'(X(t))w(t)^2 + \\ + 2(X(t)-x_0)\gamma(t)[b(X(t)) + \xi(t)]w(t) + C_1\gamma(t)\delta(t)|w(t)|^3 + \\ + \gamma(t)^2(C_2 + \xi^2(t))w^2(t),$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные.

В силу условия (4) и ограниченности последовательности пробных возмущений последнее неравенство можно усилить:

$$\Delta(t+1)\leqslant(1-2L\gamma(t)\delta(t)w^2(t))\Delta(t)+2(X(t)-x_0)\times$$
$$\times\gamma(t)[b(X(t))+\xi(t)]w(t)+C_1C_w^3\gamma(t)\delta^2(t)+\gamma^2(t)C_w^2(C_2+\xi^2(t)). \qquad (7)$$

Обозначим через F_t σ-алгебру, порождаемую случайными величинами $X(0), \ldots, X(t)$. Производя в последнем неравенстве усреднение при условии σ-алгебры F_t, получаем

$$E(\Delta(t+1)|F_t)\leqslant(1-\alpha(t))\Delta(t)+C_3\beta(t) \qquad (8)$$

с некоторой постоянной $C_3>0$, так как в силу независимости случайных величин $\xi(t)$ и $w(t)$ второе слагаемое в правой части (7) после усреднения при условии σ-алгебры F_t становится равным нулю. Здесь обозначено: $\alpha(t)=2L\sigma_w^2\gamma(t)\delta(t)$, $\beta(t)=\gamma(t)\delta^2(t)+\gamma^2(t)$.

По условию (5) теоремы имеем $\sum\limits_{t=0}^{\infty}\alpha(t)=\infty$, $\sum\limits_{t=0}^{\infty}\beta(t)<\infty$. Таким, образом, получилось, что последовательность $\{\Delta(t)\}_{t=0}^{\infty}$ в определенном смысле почти супермартингал. В силу известного следствия к теореме Дуба о сходимости полумартингалов (см., например, [9]) из (8) выводим равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\Delta(t)=0$ с вероятностью 1, т. е. при $t\to\infty$ последовательность оценок $X(t)$, формируемая по алгоритму (2), с вероятностью 1 сходится к x_0 — корню уравнения $b'(x)=0$. Доказательство теоремы закончено.

Summary

The paper presents a new method of stochastic appromaximation with probing noise.

Литература

1. Robbins H., Monro S. // Ann. Math. Statist. 1958. N 2. P. 373—405. 2. Blum J. R. // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 9. P. 404—407. 3. Коростелев А. П. Стохастические рекуррентные процедуры. Локальные свойства. М., 1984. 4. Бородин А. П. Теория вероятн. и ее применение. 1979. Вып. 1. С. 34—51. 5. Красулина Т. П. // Автоматика и телемеханика. 1976. № 11. С. 76—79. 6. Saridis G. N., Stein G. A. // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1968. Vol. AC-13. N 5. P. 512—594. 7. Агафонов С. А., Фомин В. Н. Идентификация объектов управления с использованием подобных сигналов. Деп. в ВИНИТИ, № 4226—82 от 3 августа 1982 г. 8. Граничин О. Н., Фомин В. Н. // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 100—110. 9. Фомин В. Н. Методы управления линейными дискретными объектами. Л., 1985.

Статья поступила в редакцию 23 апреля 1987 г.

УДК 517.98 Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1989. вып. 1 (№ 1)

И. К. Даугавет

О ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть X и Y — два вещественных банаховых пространства, $K\subset X$ — компакт, $F:K\to Y$ — непрерывный оператор. Известно [1], что такой оператор сколь угодно точно может быть равномерно на K приближен полиномиальным оператором, т. е. оператором вида $P(x)=L_0+L_1x+ +\ldots+L_nx^n$, где $L_0\in Y$, при $1\leqslant k\leqslant n$ L_k — k-линейный оператор, $L_kx^k=L_k(x, \ldots, x)$. Если оператор F обладает некоторыми специальными свойствами, то возникает вопрос, можно ли аппроксимирующий