КРАТКИЕ НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.281.2

О. Н. Граничин

АЛГОРИТМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ НА ВХОДЕ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАТИЧЕСКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИСКРЕТНОГО ОБЪЕКТА

В статье в условиях неполной информации о параметрах объекта и действующих на него возмущений устанавливается сходимость процедуры стохастической аппроксимации с задаваемым возмущением на входе объекта к средним значениям изменяющихся во времени параметров объекта.

Рассмотрим задачу построения состоятельных оценок средних значений параметров объекта управления со скалярными входом и выходом, функционирующего в дискретном времени и описываемого линейным разностным уравнением вида

$$y_t = b_t^{(0)} u_{t-k} + b_t^{(1)} u_{t-k-1} + \ldots + b_t^{(m)} u_{t-m-k} + v_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

в котором y_t, u_t, v_t — соответственно выходная, управляющая и возмущающая переменные; k — натуральное число (запаздывание в управлении); $b_t^{(i)}$, $i = 0, \ldots, m$, — случайным образом изменяющиеся коэффициенты уравнения объекта (1) (параметры объекта), образующие последовательности независимых ограниченных случайных величин $\{b_t^{(i)}\}_{t=0}^{\infty}$, $i = 0, \ldots, m$, $b_{\min}^{(i)} \leqslant b_t^{(i)} \leqslant b_{\max}^{(i)}$ с одинаковыми средними значениями $Mb_t^{(i)} = b^{(i)}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 0, \ldots, m$.

О последовательности неконтролируемых возмущений (помех) $\{v_t\}_{t=0}^{\infty}$ известно только то, что она ограничена $|v_t| \leqslant \sigma_v$, либо $Mv_t^2 \leqslant \sigma_v^2$, если v_t - случайные величины (M — знак математического ожидания).

Предположим, что в моменты времени $t = (m+1)s - k$ в канал управления дополнительно к собственному управлению $\bar{u}_t$, формируемому, например, по закону обратной связи, подаются возмущения $\bar{w}_s$ (пробные сигналы)

$$u_{(m+1)s-k} = \bar{u}_{(m+1)s-k} + \bar{w}_s, \tag{2}$$

в остальные моменты времени $u_t = \bar{u}_t$, $t = (m+1)s - k + i$, $i = 1, \ldots, m$, $s = 0, 1 \ldots$

Для построения оценок средних значений коэффициентов $b_t^{(i)}$, $i = 0, \ldots, m$, воспользуемся алгоритмом стохастической аппроксимации с возмущением на входе (см., например, [1—3])

$$b_{s+1}^{(i)} = P_i \left[\bar{b}_s^{(i)} + \gamma_s r_s^{-1} \left(y_{(m+1)s} - \sum_{j=0}^{m} \bar{b}_s^{(j)} u_{(m+1)s+i-j-k} \right) \bar{w}_s \right],$$

$$s = 0, 1, \ldots, \quad i = 0, \ldots, m. \tag{3}$$

Здесь $r_s = \left(1 + \sum_{i=0}^{m} |\bar{u}_{(m+1)s-i-k}|^2 \right)$, $P_i(x)$ — функции, проектирующие x в отрезок $[b_{\min}^{(i)}, b_{\max}^{(i)}]$, пробные сигналы $\bar{w}_s$ определяются соотношениями $\bar{w}_s = \alpha_s \sqrt{r_s} w_s$, $s = 0, 1, \ldots$, где $\{w_s\}_{s=0}^{\infty}$ — последовательность независимых ограниченных случайных величин с нулевым средним и одинаковой дисперсией $\sigma_w^2 > 0$, α_s, γ_s - неотрицательные числа, последовательности которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^2 \gamma_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^2 \gamma_s^2 (1 + \alpha_s^2) < \infty. \tag{4}$$

Обозначим через F_s σ-алгебру, порождаемую случайными величинами $y_0, \ldots, y_{(m+1)s-1}$, $u_0, \ldots, u_{(m+1)s-k-1}$, $w_0, \ldots, w_{s-1}$.

Теорема. *Если последовательности случайных величин* $\{v_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$,

$\{b_t^{(i)}\}_{t=0}^{\infty}$, $i=0, \ldots, m$, *независимы и собственно управляющие воздействия* u_t *удовлетворяют с некоторой постоянной* C *условиям*

$$M\{\bar{u}_{(m+1)s-k+i} w_s \mid F_s\} < C\sqrt{\alpha_s} r_s, \quad M\{|u_{(m+1)s-k+i}|^2 \mid F_s\} < Cr_s, \tag{5}$$

то последовательности оценок $\{\bar{b}_s^{(i)}\}_{s=0}^{\infty}$, $i=0, \ldots, m$, *определяемые* (3), *сходятся с вероятностью* 1 *к средним значениям параметров* (1), *т. е.* $\lim\limits_{s\to\infty} b_s^{(i)} = Mb_t^{(i)} + b^{(i)}$ *с вероятностью* 1 *при любых начальных данных* $b_0^{(i)}$, $i=0, \ldots, m$.

Доказательство. Из соотношений (3) для величин $\Delta b_s^{(i)} = b_s^{(i)} - \bar{b}^{(i)}$ в силу уравнения объекта (1) имеем

$$|\Delta b_{s+1}^{(i)}|^2 \leqslant |\Delta \bar{b}_s^{(i)}|^2 + 2\gamma_s^{-1} r_s \Delta b_s^{(i)} \bar{w}_s \left(v_{t+i} - \sum_{j=0}^{i}\left(b_s^{(i)} - b_{(m+1)s+i-j}\right) \times \right.$$

$$\left. \times u_{(m+1)s+i-j-k}\right) + \gamma_s^2 r_s^{-2}\left(v_{t+i} - \sum_{j=0}^{i}\left(b_s^{(i)} - b_{(m+1)s+i-j-k}\right)\right)^2 \bar{w}_t^{-2}.$$

Производя усреднение при условии σ-алгебры F_s, используя (2) и (5), получаем с некоторыми постоянными C_1, C_2 и C_3

$$M(|\Delta \bar{b}_{s+1}^{(i)}|^2 \mid F_s) \leqslant |\Delta b_s^{(i)}|^2 - 2\alpha_s^2\gamma_s \Delta \bar{b}^{(i)}(b_s^{(i)} - b^{(i)})\sigma_w^2 +$$

$$+ 2C_1\alpha_s^2\gamma_s |\Delta b_s^{(i)}| \sum_{j=0}^{i-1} |\Delta \bar{b}_s^{(j)}| + C_2\alpha_s^2\gamma_s^2 + C_3\alpha_s^4\gamma_s^2. \tag{6}$$

При $i=0$ последнее неравенство принимает вид

$$M\{|\Delta \bar{b}_{s+1}^{(0)}|^2 \mid F_s\} \leqslant (1 - 2\alpha_s^2\gamma_s\sigma_w^2)|\Delta \bar{b}_s^{(0)}|^2 + C_2\alpha_s^2\gamma_s^2 + C_3\alpha_s^4\gamma_s^2. \tag{7}$$

В силу (4) и следствия к теореме Дуба о сходимости полумартингалов (см., например, [4, теорема 2.II.2]) из (7) получаем равенство $\lim\limits_{s\to\infty} |\Delta b_s^{(0)}| = 0$ с вероятностью 1 и неравенство $M\sum\limits_{s=1}^{\infty} \alpha_s^2\gamma_s |\Delta \bar{b}_s^{(0)}|^2 < \infty$.

Достаточно легко (6) может быть преобразовано к виду

$$M\{|\Delta \bar{b}_{s+1}^{(i)}|^2 \mid F_s\} \leqslant (1 - \alpha_s^2\gamma_s\sigma_w^2)|\Delta \bar{b}_s^{(i)}|^2 +$$

$$+ \alpha_s^2\gamma_s \sum_{j=0}^{i-1} |\Delta \bar{b}_s^{(j)}|^2 \frac{4C_1^2 m}{\sigma_w^2} + C_2\alpha_s^2\gamma_s^2 + C_3\alpha_s^4\gamma_s^2. \tag{8}$$

Воспользуемся методом математической индукции. Пусть при $j < i$ выполняется $M\sum\limits_{s=0}^{\infty} \alpha_s^2\gamma_s |\Delta \bar{b}_s^{(j)}|^2 < \infty$. Учитывая это, из (8) в силу упомянутого выше следстви к теореме Дуба получаем равенство $\lim\limits_{s\to\infty} |\Delta b_s^{(i)}|^2 = 0$ с вероятностью 1 и неравенство $M\sum\limits_{s=0}^{\infty} \alpha_s^2\gamma_s |\Delta \bar{b}_s^{(i)}| < \infty$, обеспечивающее индукционный переход от $i-1$ к i. База индукции (при $i=0$) была доказана выше. Теорема доказана.

Summary

A discrete scalar static plant subjected to additive unobserved noise is considered. The plant parameters are unknown random processes. The method of stochastic approximation with probing control sygnals is used for the system identification.

Литература

1. Saridis G. N., Stein G. A. // IEEE Trans. Aut. Contr. 1968. Vol. AC-13, N 5. P. 592—594. 2. Агафонов С. А. Алгоритмы стохастической аппроксимации с возмущением на входе в задаче адаптивного управления линейным объектом. Деп. в ВИНИТИ, № 5682-81. 3. Граничин О. Н., Фомин В. Н. // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 100—110. 4. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. М., 1981.

Статья поступила в редакцию 25 мая 1986 г.