УДК 519.216.76; 519.712

©2004 г. О.Н. Граничин, доктор физ.–мат.наук, А.Г. Владимирович
(Санкт–Петербургский государственный университет)

ОБОБЩЕНИЯ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА НА НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ

В статье обсуждаются возможности обобщения классической схемы машины Тьюринга на случай непрерывных пространств состояний и памяти, а также непрерывного времени. В частности, предлагается модель непрерывной машины Тьюринга, позволяющей описывать гибридные системы. Для примера, рассматривается задача о многокритериальной оптимизации в случае многомерного пространства состояний и способы ее решения в рамках новых моделей процессов вычислений.

1. Введение

В 1936 г. А. Тьюринг [1] предложил модель абстрактного вычислительного устройства (машина Тьюринга), при помощи которого можно реализовать любой конечный дискретный алгоритм (см. [2]). Долгое время для развития цифровой вычислительной техники и информатики концепции машины Тьюринга были вполне достаточными. Вместе с тем, в "классической" информатике в рамках теории сложности алгоритмов получен целый ряд результатов, обосновывающих теоретическую невозможность эффективного решения многих значимых с практической точки зрения задач, в частности, связанных с моделированием естественных процессов в живой и неживой природе. Это означает, что при попытке описания интересующего нас процесса с заданной точностью при помощи машины Тьюринга ее алфавиты состояний и памяти и/или время функционирования оказываются недопустимо велики. В качестве примера можно привести задачу квантовомеханического вычисления молекулы метана, требующую порядка 10^{43} элементарных операций [3].

По указанной причине машина Тьюринга неприменима для описания непрерывных (в пространстве и времени) неустоявшихся (нестационарных) процессов, которые собственно и определяют наиболее важные переходные процессы в тех или иных системах. Для многих реальных задач теоретические описания таких процессов все еще отсутствуют, в ряде задач они выходят за рамки классической физики.

Одними из первых с этими теоретическими трудностями столкнулись разработчики систем автоматического управления, все современные исследования которых как раз и ведутся на стыке информатики и той или иной конкретной научной дисцилины (физики, механики, биологии, менеджмента и т.п.). Реализации целого ряда современных методов теории автоматического управления не укладываются в рамки дискретной машины Тьюринга. Например, активно используемые в последнее время модели "гибридных систем" по своей сути представляют комбинацию "цифровой" и "аналоговой" части. На практике оказалась плодотворной идея релейного регулирования, заключающаяся в переключении системы управления с одного "скользящего" режима на другой. В последнее десятилетие в системах управления активно внедряется нейросетевой подход. Часто говорят об использовании в управляющих контурах нейрокомпьютеров. Но работа всех перечисленных устройств не описывается полностью классической схемой машины Тьюринга. Это приводит к некоторому разрыву между теорией управления и информатикой, которые иногда неоправданно удаляются друг от друга, что негативно сказывается на развитии той и другой науки. В ближайшем будущем человечество подойдет к порогу развития цифровых технологий, размер элементарного вычислительного устройства приблизится к размеру молекулы, появятся квантовые компьютеры. На физическом уровне исчезнет понятие "бит" (вкл./выкл.), являющееся основой современных цифровых электронных устройств. Этот факт также указывает на необходимость пересмотра основ теории вычислительных процессов.

Основным (и наиболее спорным с современной точки зрения) понятием дискретной схемы машины Тьюринга является понятие "такт". Его "метафизичность" была замечена еще древними греками и сформулирована в виде парадокса Зенона, доказывающего, что Ахиллес никогда не догонит черепаху. Таковы по сути и многие пессимистические ответы

"теории сложности". Но практические решения реальных задач опровергают такие теории (Ахиллес без особого труда догоняет черепаху).

Ниже будет предложена модель обобщенной машины Тьюринга, позволяющяя описывать непрерывные динамические процессы с изменяющейся структурой пространства состояний и, в частности, гибридные системы. Эта модель допускает простое стохастическое обобщение, что дает возможность описывать также процессы статистической физики и квантовой механики.

2. Классическая машина Тьюринга

Существует несколько эквивалентных вариантов классической машины Тьюринга; мы в основном будем следовать [4], но в целях дальнейшего изложения несколько изменим обозначения. Будем рассматривать классическую машину Тьюринга как следующую структуру:

$$\langle S, q, X, Y, s, s_0, f, f_0, U, P, T, E\rangle. \tag{1}$$

Здесь S — пространство состояний; мы считаем, что оно разбито на не более чем счетное множество подпространств $S_1, S_2, \ \ldots$, имеющих, вообще говоря, разную структуру. В классической машине Тьюринга S совпадает с единственным подпространством S_1 и $S = \hat{S} \times X \times \{0, 1\}$, где $\hat{S}$ — некоторый конечный алфавит;
q — номер текущего подпространства (функция дискретного времени: $q: \ \mathrm{N}_0 \to \mathrm{N}$, где $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}$). В классической машине Тьюринга, естественно, $q_t \equiv 1$;
X — память (лента); в нашем случае $X = \mathrm{Z}$;
Y — конечный алфавит состояний памяти;
s — текущее состояние, $s: \ \mathrm{N}_0 \to S$; $s^{(1)}$ — это текущее состояние в узком смысле (один из элементов множества $\hat{S}$), $s^{(2)}$ — текущее положение головки чтения/записи, $s^{(3)}$ — индикатор останова машины: машина останавливается, если $s^{(3)} = 1$;
s_0 — состояние в начальный момент времени; ясно, что $s_0^{(3)} = 0$;
f — текущее содержимое памяти; $f: \ \mathrm{N}_0 \times X \to Y$;
f_0 — начальное содержимое памяти; в классической машине Тьюринга $f_0(x) \equiv y_0$, где $y_0 \in Y$;

U — рабочее подмножество памяти, $U:\ \mathrm{N}_0 \to X$; в классической машине Тьюринга $\forall t\ U_t = \{s_t^{(2)}\}$;
P — программа; в классической машине Тьюринга она состоит из четверок следующего вида:

$$\forall p_i \in P\ p_i = (\hat{s}_i, \hat{y}_i, y_i', s_i'),$$

где

$$\hat{s}_i, s_i' \in \hat{S}, \hat{y}_i \in Y, y_i' \in Y \cup \{L, R\}$$

(предполагается, что $\{L, R\} \cap Y = \emptyset$), причем

$$\nexists p_i, p_j \in P:\ i \neq j\ \&\ \hat{p}_i = \hat{p}_j\ \&\ \hat{s}_i = \hat{s}_j; \tag{2}$$

$T:\ \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ — время последнего переключения (дискретного изменения системы); в классической машине Тьюринга $T(t-0)$ равно наибольшему целому, меньшему t:

$$T(t-0) = \begin{cases} [t], \{t\} > 0, \\ t-1, \{t\} = 0. \end{cases}$$

В свою очередь, $T(t+0) = [t]$, т.е. в точках $t \in \mathrm{N}$ происходит разрыв;
$E \subset S$ — терминальное множество (множество состояний, в которых происходит останов машины); в нашем случае $E = \{s:\ s^{(3)} = 1\}$.

Алгоритм работы классической машины Тьюринга описывается следующим образом.

Если $\exists p_i \in P:\ \hat{s}_i = s_t^{(1)}\ \&\ \hat{y}_i = f_t(s_t^{(2)})$ (согласно (2) такое p_i может быть только одно), то

$$s_{t+1}^{(1)} = s_i',$$

$$f_{t+1}(s_t^{(2)}) = y_i', \text{если } y_i' \notin \{L, R\},$$

$$f_{t+1}(x) = f_t(x) \text{ во всех остальных случаях},$$

$$s_{t+1}^{(2)} = \begin{cases} s_t^{(2)} - 1, \text{если } y_i' = L, \\ s_t^{(2)} + 1, \text{если } y_i' = R, \\ s_t^{(2)} \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$s_{t+1}^{(3)} = 0.$$

Если же такое p_i отсутствует, то $s_{t+1}^{(3)} = 1$ (остальные компоненты состояния и память остаются неизменными), после чего машина останавливается.

Отметим принципиальную разницу между понятиями состояния и памяти (отсутствующую в большинстве реальных вычислительных устройств). Память предполагается разбитой на отдельные ячейки, изменяющие свое содержимое, вообще говоря, независимо друг от друга. Состояние же — это интегральная характеристика машины, возможно, влияющая на изменение содержимого памяти. Результатом вычисления в машине Тьюринга считается именно содержимое памяти по окончании работы.

3.Обобщение машины Тьюринга на случай непрерывной памяти

Будем теперь считать, что S, X и Y — произвольные множества любой мощности, причем на Y некоторым образом задана σ-алгебра, f_0 - произвольная функция из X в Y, единственное ограничение на U_t — то, что оно открыто для всех t, E — произвольное подмножество S, P — четверка $\langle F_1, F_2, F_3, F_4 \rangle$ функций вида

$$F_1 : \ \mathrm{Z} \times X \to Y^n, \ \ F_2 : \ S \times Y^n \to S,$$

$$F_3 : \ S \times Y \times X \to Y, \ \ F_4 : \ S \to X^\star,$$

где $n \in \mathrm{N}$.

Работа машины описывается следующим образом:

$$s_{t+1} = F_2 \left(s_t, \int_{U_t} F_1(t,x)dx\right),$$

$$f_{t+1}(x) = F_3(s_t, f_t(x), x),$$

$$U_t = F_4(s_t).$$

Здесь и далее предполагается, что соответствующие функции определены таким образом, что для любого t все интегралы существуют и конечны.

Лемма 1 . *Классическая машина Тьюринга есть частный случай обобщенной машины Тьюринга с непрерывной памятью.*

Доказательство леммы 1 приведено в приложении.

4.Обобщение машины Тьюринга на случай непрерывного времени

Будем теперь считать, что время в нашей модели непрерывно, т.е. область задания функций q, s, U и первая компонента области задания функции f в (1) — R (мы будем рассматривать только случай $t \geq 0$), а σ-алгебра задана также и на S. Чтобы не нарушать общности, будем считать, что $T(t)$ может быть определена произвольным образом, в том числе и так, как в классической машине Тьюринга. Программа P теперь будет состоять из шести функций $\langle F_1, \ldots, F_6 \rangle$ вида

$$F_1 : \ \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times X \to S^{n_1} \times Y^{n_2},$$

$$F_2 : \ \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times X \to S^{n_3} \times Y^{n_4},$$

$$F_3 : \ \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to S^{n_5}, \tag{3}$$

$$F_4 : \ S^{n_1} \times Y^{n_2} \to S,$$

$$F_5 : \ S^{n_3} \times Y^{n_4} \times X \to Y,$$

$$F_6 : \ S^{n_5} \to X^{\star},$$

где $n_i \in \mathrm{N}, n = 1, \ \ldots, \ 5$.

Работа машины теперь описывается следующим образом:

$$s(t) = F_4(\int_0^t \int_{U(t)} F_1(t, \tau, x)\, dx\, d\tau),$$

$$f(t, x) = F_5(\int_0^t F_2(t, \tau, x) d\tau, x), \tag{4}$$

$$U(t) = F_6(\int_0^t F_3(t, \tau) d\tau).$$

Лемма 2 . *Классическая машина Тьюринга есть частный случай обобщенной машины Тьюринга с непрерывным временем.*

Доказательство леммы 2 приведено в приложении.

Покажем, что существуют задачи, не решаемые за конечное время на классической машине Тьюринга, но решаемые на обобщенной машине Тьюринга с непрерывным временем. Пусть $g(x)$ — непрерывная функция из R в R, причем $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$. Требуется найти глобальный минимум этой функции. Очевидно, что данная задача не решается на классической машине Тьюринга за конечное время.

Идея нашего алгоритма состоит в следующем. Пусть $g(0) = A$. Загрузим $g(x)$ в память и будем ее увеличивать с единичной скоростью, обрезая все значения, большие A. При этом будем вычислять $\int_{\mathrm{R}}(A - f(t,x))dx$. Процесс останавливается, когда данный интеграл станет равным нулю. Если это призошло в момент $t^\star$, то значение глобального минимума равно $A - t^\star$.

Дадим формальное описание данного алгоритма. Пусть $S = \mathrm{R},\ X = \mathrm{R} \cup \{x_{res}\},\ Y = \mathrm{R},\ n_i = 1, i = 1,\ \ldots,\ 5,\ N = 1,$

$$f(0,x) = \begin{cases} g(x),\ x \neq x_{res}\ \&\ g(x) < A, \\ A \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$F_1^{(1)}(t,\tau,x) = \delta(t)(A - f(\tau,x)),$$

$$F_2^{(2)}(t,\tau,x) = \begin{cases} 1 + \delta(0)f(\tau,x),\ x \neq x_{res}, \\ -1 + \delta(0)A,\ x = x_{res}, \end{cases}$$

$$F_4(s,y) = s,$$

$$F_5(s,y,x) = \begin{cases} y,\ y < A, \\ A,\ y \geq A, \end{cases}$$

$$F_6(s) \equiv X,$$

$$E = \{s :\ s = 0\}.$$

Данный алгоритм можно применить для решения десятой проблемы Гильберта, которая заключается в том, чтобы указать алгоритм, позволяющий за конечное время дать ответ на вопрос: имеет ли диофантово уравнение $D(x_1,\ \ldots,\ x_m) = 0$, где D — некоторый многочлен от m переменных, решение в целых числах. В [5] доказано, что на классической машине Тьюринга эта проблема неразрешима.

Мы воспользуемся идеей, высказанной в [6], и будем искать глобальный минимум $(D(x_1,\ \ldots,\ x_m))^2$ на множестве целых чисел. Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда этот минимум равен 0.

Нам достаточно видоизменить алгоритм следующим образом: положить $X = \mathrm{Z}^m$ и определить

$$\int_X G(x)dx = \sum_{z\in X} \frac{1}{\|z\|^2} G(z).$$

Последнее необходимо для того, чтобы интеграл был конечен, т.к. локальных (и даже глобальных) минимумов может быть бесконечно много.

5. Гибридная обобщенная машина Тьюринга

В реальных задачах часто бывает, что процесс некоторое время развивается по определенному закону, после чего происходит качественный скачок, при котором резко меняются не только законы функционирования процесса, но, может быть, и само фазовое пространство (в нашей терминологии — пространство состояний). Момент этого скачка зависит от состояния системы.

Моделью таких процессов являются т.н. гибридные системы [7]. Ниже будет построена гибридная модель обобщенной машины Тьюринга.

Мы будем теперь считать, что количество подпространств $S_1, S_2,\ \ldots$ пространства S произвольно (но, как указывалось выше, не более чем счетно), причем на всех S_i определена σ-алгебра. $T(t)$, как и раньше, будет означать время последнего переключения, $T(0) = 0$.

Программа P будет состоять из шести функций $F_1,\ \ldots,\ F_6$ вида (3), которым добавлен еще один (первый) параметр — натуральное число, и пяти функций $\Phi,\ \Psi,\ \Upsilon,\ \phi$ и ξ вида

$$\Phi:\ S \times \mathrm{R} \times Y^N \to \mathrm{N} \times S,$$

$$\Psi:\ S \times Y \times X \to Y,\ \Upsilon:\ S \times Y \times X^\star \to X^\star,$$

$$\phi:\ S \times \mathrm{R} \times X \to Y^N,$$

$$\xi:\ S \to X^\star,$$

где $N \in \mathrm{N}$ и, кроме того, выполняется следующие условия:

Пусть

$$(i^\dagger(t), s^\dagger(t)) = \Phi(s(t),\ t, \int_{\xi(s(t))} \phi(s(t), t, x)dx).$$

Тогда:

1. Если $s^\dagger(t) \neq s(t)$, то

$$s^{\dagger\dagger}(t) = s^\dagger(t),$$

2. Если $s^\dagger(t) \neq s(t)$, то

$$s^\dagger(t) \in S_{i^\dagger}(t).$$

3. Если $s(0) \in S_i$, процесс описывается уравнениями (4) с первым параметром функций $F_1,\ \ldots,\ F_6$, равным i, и $\exists t > 0\ s(t) \notin S_i$, то $\exists t^\star < t\ s^\dagger(t^\star) \neq s(t^\star)$.

Машина функционирует следующим образом. Пока $s^\dagger(t) = s(t)$, ее работа описывается уравнениями (4), причем первый параметр функций $F_1, \ldots, F_6$ равен q_t, а нижний предел интегрирования по времени равен не 0, а $T(t)$. $T(t)$ остается неизменным. Согласно третьему условию, мы не выйдем при этом за пределы текущего подпространства состояний. Как только $s^\dagger(t)$ становится не равным $s(t)$, происходит переключение:

$$s(t+0) = s^\dagger(t),$$

$$q_{t+0} = i^\dagger(t),$$

$$f(t+0, x) = \Psi(s(t), f(t, x), x),$$

$$U(t+0) = \Upsilon(s(t), f(t, x), U(t)),$$

$$T(t+0) = t.$$

Первое условие гарантирует нам, что сразу после переключения не произойдет еще одно переключение. Смысл $i^\dagger$ состоит в выборе текущего подпространства состояний в том случае, когда $s^\dagger$ принадлежит нескольким из них.

Теперь ясно, почему нижним пределом интегрирования по времени является $T(t)$. Это связано с тем, что до момента $T(t)$ значения $s(t)$, вообще говоря, принадлежат другому пространству с другой σ-алгеброй. Если нам необходима какая-либо информация о состоянии до момента $T(t)$, то в момент переключения ее следует перенести в текущее состояние.

Лемма 3 . *Классическая машина Тьюринга есть частный случай гибридной обобщенной машины Тьюринга.*

Доказательство леммы 3 приведено в приложении.

Заметим, что все функции из P в этом и предыдущих разделах могут быть случайными, что не меняет структуру моделей, но позволяет рассматривать более широкий класс процессов.

6. Модель динамической системы

В классической физике обычно применяется следующая модель динамической системы (мы сразу введем обозначения, соответствующие принятым в предыдущих разделах):

$$\frac{d}{dt}f(t,x) = G(t, f(t,x)).$$

Здесь $x \in X$ — набор параметров системы, $f:\ \mathrm{R} \times X \to Y$ — функция, сопоставляющая параметрам их значения в данный момент времени (множество значений параметров обычно называют фазовым пространством), Y — пространство значений параметров (обычно равное R).

Такая модель, однако, оказывается неприменимой для задач с большим количеством параметров, а также в случаях, когда их число, смысл и законы изменения их значений меняются с течением процесса. Мы поэтому рассмотрим другую, несколько более сложную модель:

$$\frac{d}{dt}f(t,x) = G(s(t), f(t,x)),$$

или, что то же самое,

$$f(t,x) = \int_0^t (G(s(\tau), f(\tau,x)) + \delta(0)G(s(0), f(0,x)))d\tau,$$

где $x \in U(s(t)) \subset X,\ s(t)$ — структура пространства:

$$s(t) = \int_0^t \int_{U(s(t))} H(\tau,x)dx\, d\tau,\ s(t) \in S.$$

Нам осталось ввести понятие переключения (резкого изменения фазового пространства и структуры). Будем считать, что множество S разбито

на не более чем счетное количество непересекающихся топологических пространств $D_1, D_2, \ldots$ (вообще говоря, с разной топологией; как правило, это пространства R^m разной размерности), а также на не более чем счетное количество непересекающихся подмножеств $S_1, S_2, \ldots$, причем каждое S_i целиком лежит в некотором D_j и открыто в нем. Будем полагать, что на каждом S_i определена (вообще говоря, своя собственная) σ-алгебра. Пусть ∂S_i - граница множества S_i.

Предположим, что

$$\forall t > 0 \; \exists i \; s(t) \in S_i \cup \partial S_i$$

и будем считать, что функции G, H и U имеют еще один (первый) параметр, равный номеру текущего подмножества, а нижний предел интегрирования по времени равен моменту вступления $s(t)$ в это подмножество.

Теперь определим, что переключение происходит, если текущее состояние вышло на границу подмножества:

$$s(t) \in \partial S_i.$$

В этом случае необходимо определить значения состояния и параметров системы после переключения:

$$(s(t+0), f(t+0, x)) = W(s(t), f(t, x)).$$

Еще одно естественное условие — состояние после переключения попадет в одно из множеств S_i :

$$s(t) \in \partial S_i \Rightarrow \exists j \; s(t+0) \in S_j.$$

Теорема 1 . *Динамический процесс с переключениями описывается гибридной обобщенной машиной Тьюринга.*

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

7. Примеры описания гибридных систем

Мы опишем в терминах нашей модели три класса стохастических гибридных систем, приведенные в [7]; заметим, что все три класса попарно имеют непустое пересечение. Во всех трех случаях $n_i = 1, \ldots 5$, $N =$

1. Чтобы показать сходство между данными системами, мы будем описывать их единообразно, даже в тех случаях, когда логичнее было бы выбрать другую схему описания. В частности, мы нигде не будем прибегать к понятию памяти, точнее, будем считать память одноточечным множеством с неизменным содержимым, не влияющим на ход процесса. Понятие памяти с точки зрения машины Тюринга, т.е. большого (возможно, счетного или даже более чем счетного) массива данных, эволюционирующих независимо друг от друга, так что всякое взаимодействие между различными ячейками памяти осуществляется только через состояние, в известных на данный момент гибридных системах отсутствует.

Терминальное множество во всех случаях пусто, т.е. процесс продолжается неограниченно долго.

Кусочно-детерминированный марковский процесс [8]. Пусть $\{d_n\}$ — бесконечная последовательность натуральных чисел, $\{D_n\}$ — счетный набор открытых множеств:

$$\forall i \; D_i \subset \mathrm{R}^{d_i};$$

$\{\lambda_i\}$ и $\{g_i\}$ — счетные множества функций

$$\forall i \; \lambda_i : \; \mathrm{R}^{d_i} \to \mathrm{R}, \; \forall x \; \lambda_i(x) \geq 0;$$

$$\forall i \; g_i : \; \mathrm{R}^{d_i} \to \mathrm{R}^{d_i}.$$

Мы считаем что все λ_i интегрируемы на $[0, \infty)$. Положим

$$S_i = \mathrm{R}^{d_i} \times \mathrm{R}.$$

Начальное значение первой компоненты состояния выбирается случайным образом внутри одного из D_i в соответствии с некоторым начальным распределением. Начальное значение второй компоненты состояни равномерно распределено на $[0, 1]$.

Далее,

$$F_1^{(1)^{(1)}}(i, t, \tau, x) = g_i(s^{(1)}(\tau)) + \delta(0) s^{(1)}(\tau).$$

Вторая компонента состояния остается неизменной:

$$F_1^{(1)^{(2)}}(i, t, \tau, x) = \delta(0) s^{(2)}(\tau),$$

$$F_4(i, s, y) = s.$$

Условие переключения выражается следующим образом:

$$s^{(2)}(t) \geq \exp(-\int_0^t \lambda_i(s^{(1)}(\tau))d\tau) \ \vee \ s^{(1)}(t) \in \partial D_i.$$

Значение первой компоненты состояния после переключения выбирается внутри одного из D_i в соответствии с некоторым распределением, зависящим от $s^{(1)}(t-0)$, значение второй компоненты — так же, как и начальное.

Можно доказать, что при некоторых дополнительных условиях (все g_i удовлетворяют глобальному условию Липшица и математическое ожидание числа переключений конечно) данный процесс является марковским.

Диффузный процесс с переключениями [9]. Пусть $Q = \{1, \ldots, M\}$, g, σ и λ — функции вида

$$g: \ Q \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m, \ \sigma: \ Q \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^{m \times m},$$

$$\lambda: \ Q \times Q \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R},$$

причем

$$\forall x \ \lambda(i, j, x) \geq 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \forall i \sum_{j=1}^{M} \lambda(i, j, x) = 0.$$

Кроме того, для всех i и j функции g, σ и λ ограничены и удовлетворяют условию Липшица по x. Далее, пусть для всех $x \in \mathrm{R}^m$, $i, j \in Q$ определены $\Delta_{ij}(x)$, — непересекающиеся интервалы $[\Delta_{ij}^{(l)}(x), \Delta_{ij}^{(r)}(x))$ (возможно, пустые), такие, что

$$\forall j \forall p \ i < k \Rightarrow \Delta_{ij}^{(l)}(x) \leq \Delta_{kp}^{(r)}(x),$$

$$\forall i \ j < k \Rightarrow \Delta_{ij}^{(l)}(x) \leq \Delta_{ik}^{(l)}(x) \text{ и}$$

$$\Delta_{ij}^{(r)}(x) - \Delta_{ij}^{(l)}(x) = \lambda(i, j, x).$$

Наконец, пусть h — функция вида

$$h: \ Q \times \mathrm{R}^m \times \mathrm{R} \to \mathrm{R},$$

определенная следующим образом:

$$h(i,x,z) = \begin{cases} j-i, \ z \in \Delta_{ij}(x), \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Определим теперь $S_i = \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^m$. Величины $s^{(1)}(0)$ и q_0 выбираются случайным образом в соответствии с некоторыми распределениями $Init_x$ и $Init_q$, $s^{(2)}(0) = 0$.

Далее определим

$$F_1^{(1)^{(1)}}(i,t,\tau,x) = g(i, s^{(1)}(\tau)) + \sigma(i, s^{(1)}(\tau))W_\tau + \delta(0)s^{(2)}(\tau),$$

где W_t — стандартный n-мерный винеровский случайный процесс.

Сформулированные выше условия на функции g и σ гарантируют существование интеграла

$$\int_0^t F_1^{(1)}(i,t,\tau,x)d\tau$$

(доказательство см. в [10]).

$s^{(2)}$ остается неизменным, $F_4(i,s,y) = s$.

Пусть теперь

$$i^\dagger(t) = \int_0^t \int_{\mathrm{R}} h(q_\tau, s^{(1)}(\tau), z)\phi(d\tau, dz) + q_0.$$

Здесь $\phi(dt, dz)$ — пуассоновская случайная мера с плотностью $dt \times \mu(dz)$, где $\mu(dz)$ — лебегова мера R (см. [11]).

Условие переключения записывается как $i^\dagger(t) \neq q_t$, при этом $s^\dagger(t) = (s^{(1)}(t), s^{(1)}(t))$.

Можно доказать, что при условии независимости $Init_x$, $Init_q$, W_t и ϕ данный процесс является марковским.

Стохастическая гибридная система [12]. Пусть g_1 и g_2 — функции вида

$$g_i : \ \mathrm{N} \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m,$$

причем для всех $j \in \mathrm{N}$ $g_1(j,\cdot)$ и $g_2(j,\cdot)$ ограничены и удовлетворяют условию Липшица.

Пусть $D_1, D_2, \ldots$ — счетный набор открытых подмножеств R^m. Определим $S_i = D_i \cup \partial D_i$; $s(0)$ выбирается случайным образом в одном из D_i,

$$F_1(i,t,\tau,x) = g_1(i,s(\tau)) + g_2(i,s(\tau))W_\tau + \delta(0)s(\tau),$$

$$F_4(i,s,y) = s,$$

где W_t — стандартный скалярный винеровский случайный процесс. Сформулированные выше условия на функции g_1 и g_2 гарантируют существование интеграла

$$\int_0^t F_1(i,t,\tau,x)d\tau$$

(доказательство см. в [10]).

Переключение происходит при выходе на границу множества: $s(t) \in \partial D_i$, новое значение s выбирается случайным образом (согласно распределению, зависящему от $s(t)$) в одном из D_j.

Можно доказать, что данный процесс является марковским.

Заметим, что в первых двух системах теоретически возможно, что в момент переключения окажется $s^\dagger = s$, что препятствует переключению. Чтобы этого избежать, можно включить в состояние еще одну компоненту, равную q_t.

8. Частная модель вычислительной сети

Предположим, что у нас есть некоторое конечное число устройств $x_1, \ldots, x_M$, причем каждое устройство x_i способно минимизировать заданную вещественную целевую функцию $G_i(s,y,t)$ (в общем случае зависящую от времени) по множеству параметров y, при этом параметры s приходят извне, возможно, как результат деятельности других устройств (фактически зависимость функций G_i от s определяет конфигурацию сети). Начальные приближения для минимизации задаются одновременно с целевыми функциями. Если состояние системы перестает удовлетворять некоторым условиям (например, если изменение параметров на всех устройствах стало достаточно малым, или, наоборот, на каком-то из них стало слишком большим), то происходит переключение: всем или некоторым устройствам задаются новые целевые функции и новые начальные приближения.

С точки зрения нашей модели это означает, что память X состоит из конечного числа ячеек x_i, в каждой из которой хранится текущий вектор параметров y_i. В каждой ячейке происходит минимизация функции $G_{i_t}(s(t), y_i(t), t)$. Далее, если это не будет приводить к двусмысленности, индексы t у функций будут опускаться.

Если минимизация производится методом градиентного спуска, то, применяя ранее введенные обозначения (в этом и следующем разделах первый параметр функций $F_1, \ldots, F_6$ будет опускаться), имеем

$$F_2^{(2)}(t, \tau, x_i) = \alpha \nabla G_i(s(\tau), f(\tau, x_i), \tau) + \delta_\tau(0) f(T_t, x_i), \tag{5}$$

$$F_5(s, y, x) = y.$$

В практических приложениях (считая, что $S = \mathrm{R}^n, Y = \mathrm{R}^m$) используются различные аппроксимации вектор-градиента. Стандартной аппроксимацией является:

$$\nabla^{(i)} G_i(s(\tau), f(\tau, x_i), \tau) \approx$$

$$\approx \frac{G_i(s(\tau), f(\tau, x_i) + \beta(\tau) e^{(i)}, \tau) - G_i(s(\tau), f(\tau, x_i) - \beta(\tau) e^{(i)}, \tau)}{2\beta(\tau)},$$

где e — единичный вектор размерности $n, \beta(\tau)$ — некоторая скалярная вещественная функция, $\forall \tau \geq 0 \ \beta(\tau) > 0$.

Недостатком этого подхода является необходимость $2n$ измерений значений целевой функции, что в режиме реально времени может оказаться затруднительным.

В алгоритме стохастической аппроксимации с одновременными возмущениями на входе [13]-[16] применяется следующее приближение:

$$\alpha \nabla G_i(s(\tau), f(\tau, x_i), \tau) \approx \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \Delta(\tau) G_i(s(i), f(\tau, x_i) + \beta(t) \Delta(t), \tau),$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — вещественные скалярные функции, обладающие следующими свойствами:

$$\forall t \geq 0 \ \alpha(t) > 0, \beta(t) > 0,$$

$$\int_0^\infty \alpha(t) dt = \infty, \lim_{t \to \infty} \beta(t) = 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{(\alpha(t))^2}{(\beta(t))^2}dt < \infty, \int_0^\infty \alpha(t)\beta(t)dt < \infty,$$

$\Delta(t)$ — центрированный независимый векторный случайный процесс размерности n.

В условиях, когда целевая функция, помимо s, зависит также от q и t, т.е. минимум все время "плывет", целесообразно применять вариант этого алгоритма [17], в котором $\alpha(t) \equiv \text{const}$ и $\beta(t) \equiv \text{const}$.

9. Примеры применения предлагаемой сети

Глобальная оптимизация. Большинство известных алгоритмов оптимизации сходятся к локальному минимуму целевой функции, нахождение же глобального минимума отнюдь не гарантировано. Ниже будет показано, как определенная в предыдущем разделе сеть (при достаточно большом количестве устройств M) может использоваться для поиска глобального минимума.

Пусть каждое из устройств x_i минимизирует одну и ту же функцию $G(y)$, не зависящую от времени и состояния системы, но с разными начальными приближениями $f(0, x_i)$. При этом они найдут, вообще говоря, разные минимумы $E_1, \ \ldots, \ E_M$, среди которых может быть и глобальный. Положим $S = \mathrm{R}^M$ и определим состояние системы $s(t)$ как усреднение найденных приближений минимумов функции $G(s)$ по некоторому промежутку времени $(t - \epsilon, t)$:

$$F_6(s, U) \equiv X,$$

$$F_1^{(1)^{(i)}}(t, \tau, x) = H(t, \tau, \delta(x - x_i)f(\tau, x), \epsilon), \tag{6}$$

$$F_4(s, y) = s,$$

где

$$H(t, \tau, y, \epsilon) = \begin{cases} y/\epsilon, \ \tau \geq t - \epsilon, \\ 0, \ \tau < t - \epsilon. \end{cases} \tag{7}$$

Теперь предположим, что у нас есть еще одно устройство x_{ctrl}, минимизирующее функцию G_{ctrl}, заданную на $\mathrm{R}^M \times S$:

$$G_{ctrl}(y, s) = (\sum_{i=1}^{M} |y^{(i)}|s^{(i)}) + K|1 - \sum_{i=1}^{M} |y^{(i)}||.$$

При достаточно большом K ($K \gg \max_i G_i(f(0, x_i))$) минимум этой функции по y равен $\min_i s^{(i)}$, т.е. при $t \to \infty$ он стремится к $\min_i E_i$. При достаточно большом M с большой вероятностью это окажется глобальным минимумом $G(y)$.

Выбор наилучшего приближения неизвестной целевой функции. Пусть устройства $x_1, \ldots, x_M$ минимизируют функции $G_1(w, y)$, $\ldots$, $G_M(w, y)$, где $w \in W$ — некоторые постоянные внешние параметры. Наша задача состоит в минимизации неизвестной функции $g(w, y)$, для которой известны значения минимумов $E_g(w_1), \ldots, E_g(w_L)$ на некоторой выборке значений параметров $w_1, \ldots, w_L$. Мы будем искать устройство, наилучшим образом решающее эту задачу на данной выборке, иначе говоря, число $i \in \{1, \ldots, M\}$, минимизирующее функционал

$$\sum_{j=1}^{L} |\min_y G_i(w_j, y) - E_g(w_j)|.$$

Для решения поставленной задачи можно применить схему, предложенную в предыдущем пункте, несколько ее модифицировав. Положим $S = \mathrm{R}^M \times \mathrm{R}^M$ и пусть память состоит из ML устройств, причем устройство x_{ij} минимизирует функцию $G_i(w_j, y)$. Кроме того, у нас будет иметься устройство x_{ctrl}, минимизирующее функцию G_{ctrl}, определенную в предыдущем пункте (где вместо s будет первая компонента состояния $s^{(1)}$) и еще одна ячейка x_{res}, в которой в результате работы системы получится номер искомой функции G_i (точнее, вещественное число, близкое к этому номеру).

В первой компоненте состояния будет усредняться сумма невязок текущих приближений минимумов функции G_i для всех значений параметров w_j:

$$F_1^{(1)(1)^{(i)}}(t, \tau, x) = H(t, \tau, \sum_{j=1}^{L} \delta(x - x_{ij}) |f(\tau, x) - E_g(w_j)|, \epsilon),$$

$F_4^{(1)}(s, y) = s$, H — как в (7).

Функция G_{ctrl} остается без изменений, во второй компоненте состояния будет усредняться текущий вектор параметров $(y_1, \ldots, y_M)$ устройства x_{ctrl} :

$$F_1^{(2)}(t,\tau,x) = H(t,\tau,\delta(x-x_{ctrl})f(\tau,x),\epsilon),$$

$F_4^{(2)}(s,y) = y,\ H$ определяется аналогично (7).

Наконец, в ячейке x_{res} аналогичным образом будет усредняться функция $\sum_{i=1}^{M} is^{(2)^{(i)}}$.

Поскольку минимум функции G_{ctrl} достигается при значениях параметров $y_{min} = 1, y_i = 0, i \neq y_{min}$, то значение содержимого x_{res} сойдется к номеру искомой функции.

Модель конфликтной ситуации. Предположим теперь, что все целевые функции заданы *на одном и том же* пространстве параметров. Это значит, что фактически следующее приближение представляет собой некоторую "равнодействующую" (в широком смысле) приближений, генерируемых устройствами $x_1,\ \ldots,\ x_M$:

$$\theta_n = r(\theta_{n_1},\ \ldots,\ \theta_{n_M}).$$

Для описания этой ситуации нам придется несколько модифицировать нашу модель. Предположим, как и раньше, что целевые функции заданы на A и положим $S = A^M, X = \{x\}$ (одноточечное множество!), $Y = A$. Мы будем приближения, сгенерированные устройствами $x_1,\ \ldots,\ x_M$ (не входящими теперь в X) считать состоянием системы, а в память помещать "равнодействующую" (точнее, ее усреднение по промежутку времени $(t-\epsilon, t)$. Тогда $F_1^{(1)^{(i)}}(t,\tau,x)$ будет совпадать с $F_2^{(2)}(t,\tau,x_i)$ из (5),

$$F_2^{(1)}(t,\tau,x) = H(t,\tau,s(\tau),\epsilon),$$
$$F_5(s,y,x) = r(s^{(1)},\ldots,s^{(M)}),$$

F_4 и F_6 — как в (6), H определяется аналогично (7),

Очевидно, что этот процесс сойдется к точке, в которой

$$\nabla r(x_1,\ \ldots,\ x_M) = 0$$

(в частности, при $A = \mathrm{R}$ будет найден минимум функции $r(G_1,\ \ldots,\ G_M)$), если такая точка есть. Если же ее нет, то "приближение" $f(t,x)$ может стать по модулю сколь угодно большим, что можно интерпретировать как катастрофу системы. Если наша модель претендует на то, чтобы

отражать реальную действительность, то при превышении $\|f(t,x)\|$ некоторого предела должно происходить переключение с изменением целевых функций, а, возможно, и конфигурации системы.

Проиллюстрируем сказанное простым примером. Пусть

$$G_1(x) = \frac{1}{1+x^2}(1+\sin x),\ G_2(x) = -\frac{1}{1+x^2}\sin x,$$

в качестве "равнодействующей" возьмем среднее арифметическое

$$r(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

в качестве начального приближения $f(0,x) = 0$. По отдельности обе функции сошлись бы к своим глобальным минимумам (в точках соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$), но их "равнодействующая"

$$r(G_1, G_2) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

минимума не имеет, а значит, при попытке минимизировать эту функцию система придет к катастрофе.

До сих пор считалось, что все устройства используют один и тот же алгоритм оптимизации. Если предположить, что это не так, то в нашем распоряжении оказывается инструмент для сравнения различных алгоритмов. К примеру, мы можем взять какую-либо нечетную функцию $g(x)$, имеющую минимум и максимум вблизи нуля (например, $\sin x$), положить

$$G_1(x) = g(x),\ G_2(x) = -g(x),\ r(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2},\ f(0,x) = 0,$$

запустить систему и выяснить, к какому из экстремумов она сойдется (или останется в нуле) и за какое время.

10. Заключение

Рассмотренные примеры вовсе не исчерпывают возможные применения обобщенной машины Тьюринга. В действительности многие ее возможности, такие, например, как зависимость текущего состояния одновременно от нескольких характеристик предыстории состояния и памяти

или сложная зависимость рабочего множества от состояния и времени, в этих примерах попросту не использовались.

Сказанное дает основания сделать предположение, что данная модель (возможно, с включением в нее случайных функций) позволяет описывать если не все, то подавляющее большинство процессов, происходящих в реальном мире, а также работу всевозможных вычислительных устройств, включая аналоговые, биокомпьютеры, нейрокомпьютеры, квантовые компьютеры и т.д.

В связи с этим актуальность приобретает задача создания языков программирования, позволяющих описывать непрерывные процессы с переключениями. Такие языки, в частности, должны включать в себя задание законов изменения переменных в реальном времени, непрерывного взаимодействия параллельных процессов, правил перехода от одного последовательного процесса к другому с сохранением необходимой информации, а также, разумеется, возможность включать в программу процедуры, написанные на классическом языке программирования. Как минимум, такой язык должен позволять просто и изящно описывать вычислительные (и нейронные) сети, подобные рассмотренной во втором примере раздела 9.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1.

Для начала заметим, что нам нет необходимости задавать σ-алгебру на Y, поскольку нас будет интересовать интегрирование только по одноточечным множествам из X, достаточно определить

$$\forall z \in \mathrm{Z} \quad \int_{\{z\}} F(x)dx = F(z).$$

Теперь определим

$$F_1(t,x) = f_t(x),$$

$$F_2^{(1)}(s,y) = \begin{cases} s'_i, \ \exists p_i \in \hat{P} \ \hat{s}_i = s^{(1)} \ \& \ \hat{y}_i = y, \\ s^{(1)} \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$F_2^{(2)}(s,y) = \begin{cases} s^{(2)} - 1, \exists p_i \in \hat{P} \ \hat{s}_i = s^{(1)} \ \&; \hat{y}_i = y \ \& \ y'_i = L, \\ s^{(2)} + 1, \exists p_i \in \hat{P} \ \hat{s}_i = s^{(1)} \ \& \ \hat{y}_i = y \ \& \ y'_i = R, \\ s^{(2)} \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$F_2^{(3)}(s,y) = \begin{cases} 0, \ \exists p_i \in \hat{P} \ \hat{s}_i = s^{(1)} \ \& \ \hat{y}_i = y, \\ 1 \ \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{9}$$

$$F_3(s,y,x) = \begin{cases} y_i', \ x = s^{(2)} \ \& \ \exists p_i \in \hat{P} \ \hat{s}_i = s^{(1)} \ \& \ \hat{y}_i = y \ \& \ y_i' \notin \{L, R\}, \\ s \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$F_4(s) = \{s^{(2)}\}.$$

Здесь $\hat{P}$ обозначена программа классической машины Тьюринга.

Доказательство леммы 2.

Обозначим $\tilde{S}$ состояние классической машины Тьюринга и определим $S = \tilde{S} \times R$ (т.е. добавим к состоянию четвертую компоненту — таймер), $n_i = 1, \ i = 1, \ \ldots, \ 5$. Далее определим

$$\phi(t,\tau) = \begin{cases} \delta(\tau - t + 1), \ t \geq 1 \\ \delta(\tau), \ t < 1 \end{cases}$$

Теперь положим

$$F_1^{(1)^{(l)}}(t,\tau,x) = \phi(t,\tau) s^{(l)}(t), \ l \leq 3.$$

После интегрирования по времени получаем значения первых трех компонент состояния в момент времени $t-1$ (или 0, если $t < 1$). Далее,

$$F_1^{(1)^{(4)}}(t,\tau,x) = \begin{cases} 1, \ \tau \geq \hat{T}(t-0), \\ 0, \ \tau < \hat{T}(t-0), \end{cases}$$

где $\hat{T}$ — это T классической машины Тьюринга.

Здесь после интегрирования получаем время, прошедшее с момента $\hat{T}(t-0)$.

$$F_1^{(2)}(t,\tau,x) = F_2(t,\tau,x) = \phi(t,\tau) f(t,x).$$

После интегрирования получаем содержимое памяти в момент времени $t-1$ (или 0).

$$F_3(t,\tau) = \phi(t,\tau) s(t).$$

Здесь после интегрирования мы также получим состояние в момент времени $t-1$ (или 0).

При $s^{(4)} < 1$ положим $F_4(s,y) = s, F_5(s,y,x) = y$. При $s^{(4)} = 1$ $F_4^{(l)}(l \leq 3)$ и F_5 будут совпадать соответственно с F_2 и F_3 из (9), $F_4^{(4)} = 0$. F_6

во всех случаях будет совпадать с F_4 из (9) (поскольку фактически интегрирование будет производиться только в целые моменты времени; заметим, что, в отличие от предыдущей модели, при целом $t > 0$ $U(t)$ будет равно не $\{s^{(2)}(t)\}$, а $\{s^{(2)}(t-1)\}$).

Доказательство леммы 3.

Мы будем изменения состояния и памяти классической машины Тьюринга в дискретные моменты времени считать переключениями, между которыми состояние (кроме таймера) и память остаются неизменными. $T(t)$ для классической машины Тьюринга была определена именно таким образом.

Соответственно положим $n_i = 1,\ i = 1, \ldots,\ 5,\ N = 1,$

$$F_1^{(1)^{(l)}}(i,t,\tau,x) = \delta_\tau(0)s^{(l)}(\tau),\ l \le 3,$$

$$F_1^{(1)^{(4)}}(i,t,\tau,x) = 1,$$

$$F_1^{(2)}(i,t,\tau,x) = F_2(i,t,\tau,x) = \delta_\tau(0)f(\tau,x),$$

$$F_3(i,t,\tau) = \delta(0)s(\tau),$$

$$F_4(i,s,y) = s,$$

$$F_5(i,s,y,x) = y,$$

$$F_6(i,s,U) = \xi(s) = \{s^{(2)}\},$$

$$\phi(s,t,x) = f(t,x).$$

$\Phi(s,t,y), \Psi(s,y,x)$ и $\Upsilon(s,y,U)$ совпадают соответственно с $F_4(s,y)$, $F_5(s,y,x)$ и $F_6(s,U)$ из предыдущего раздела.

Доказательство теоремы 1.

Положим $n_i = 1,\ i = 1,\ \ldots,\ 5,\ N = 1,$

$$F_1^{(1)}(i,t,\tau,x) = H(i,\tau,x),$$

$$F_2^{(2)}(i,t,\tau,x) = G(i,s(\tau),f(\tau,x)) + \delta(0)G(i,s(0),f(0,x)),$$

$$F_3(i,t,\tau) = \delta(t)s(\tau),$$

$$F_4(i,s,y) = s,$$

$$F_5(i,s,y) = y,$$

$$F_6(i,s) = U(i,s),$$
$$\Phi^{(1)}(s,t,y) = i, W^{(1)}(s,y) \ni S_i,$$
$$\Phi^{(2)}(s,t,y) = \begin{cases} s, \ s(t) \notin \partial q_t, \\ W^{(1)}(s,y) \text{ иначе}, \end{cases}$$
$$\Psi(s,y,x) = W^{(2)}(s,y),$$
$$\Upsilon(s,y,A) = U(W^{(1)}(s,y)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.Turing. *On computable numbers, with an application to the Entcheindungsproblem.* Proc. London Math, Soc., vol. 42, pp. 230–265, 1936.

2. С.К.Клини. *Введение в математику.* М., ИЛ, 1957.

3. Р.П.Поплавский. *Термодинамические модели обработки информации.* Успехи физических наук, т. 115, вып. 3, с. 465–501, 1975.

4. Э.Мендельсон. *Введение в математическую логику.* М., Наука, 1976.

5. Ю.В.Матиясевич. *Диофантовость перечислимых множеств.* Доклады Академии Наук СССР, т. 191, с. 279–282, 1970.

6. Tien D.Kieu. *Computing the non-computable.* Contemporary Physics, vol. 44, pp. 51–71, 2003.

7. G.Pola, M.L.Bujorianu, J.Lygeros, M.D.Di Benedetto. *Stochastic Hybrid Models: an Overwiew.*

8. M.H.A.Davis. *Markov Process and Optimization.* Chapman & Hall, London, 1993.

9. M.K.Ghosh, A.Arapostathis, S.I.Marcus. *Ergodic Control of Switching Diffusion.* ISAM Journal of Control Optimization, vol. 35, No. 6, pp. 1952–1988, 1997.

10. L.Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications.* John Wiley & Sons, 1974.

11. J.Jacod, A.N.Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer Verlag, N.Y., 1987.

12. J.Hu, J.Lygeros, S.Sastry. *Towards a Theory of Stochastic Hybrid Systems,* in Hybrid Systems: Computation and Control, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, vol. 1790, pp. 160–173, 2000.

13. О.Н.Граничин. *Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения.* Вестник Ленинградского университета, сер. 1, 1989, вып. 1, с. 19–21.

14. B.T.Polyak and A.B.Tsybakov. *On stochastic approximation with arbitrary noise (the KW case),* in Topics in Nonparametric Estimation, R.Z. Khasminskii ed., Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, No. 12, pp. 107–113, 1992.

15. J.C.Spall. *A One-Measurement Form of Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation.* Automatica, vol. 33, pp. 109–112, 1997.

16. О.Н.Граничин. *Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах.* Автоматика и телемеханика, 2002, 2, с. 44–55.

17. О.Н.Граничин. *Неминимаксная фильтрация при неизвестных ограниченных помехах в наблюдениях.* Автоматика и телемеханика, 2002, 9, с. 125–133.