

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
кафедра физической механики**

**Учебное пособие по курсу
“СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В
МЕХАНИКЕ”**

**Санкт-Петербург
1996**

Составители: О.Н.Гранчин, А.А.Волков

Рецензент: проф. В.В.Филиппов

Рекомендовано к изданию в качестве учебного пособия кафедрой физической и математической механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Протокол № 4 от 12.04.96г.

Настоящее пособие касается явления возникновения стохастичности в поведении нелинейных сложных динамических систем, так называемого "детерминированного хаоса". Динамическая система может испытывать особого типа неустойчивость. Эта неустойчивость приводит к тому, что различные динамические характеристики системы изменяются со временем случайным образом. Появление стохастичности(хаоса) является при этом внутренним свойством системы и не связано с действием каких-либо априори случайных сил. Такого типа явления проявляются, например, при наблюдении за возбуждаемым магнитом, в задаче трех тел, в лазерах, в плазме и т.п. Часто нерегулярное поведение нелинейных сред и полей называют турбулентностью.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, турбулентность, стохастичность, аттрактор.

1 Введение

Практически всегда при исследовании поведения траекторий динамических систем сталкиваются с трудностями связанными с отсутствием точной математической модели соответствующей конкретной системе и невозможностью с большой степенью точности измерять некоторые существенные характеристики ее состояний. Одним из стандартных методов при этом является рассмотрение моделей со стохастическими (случайными) характеристиками.

Во многих задачах к хорошим результатам приводит включение каким-либо образом в систему уравнений, описывающих поведение динамической системы, дополнительных переменных, называемых помехами. В наиболее простом линейном случае при аддитивной помехе имеем :

$$x_n = Ax_n + v_n,$$
$$y_n = Bx_n + w_n,$$

где A $n \times n$ -матрица, B $m \times n$ -матрица. Оценивание переменных состояния системы x_n по наблюдениям y_n относится к задачам фильтрации.

В других задачах целесообразно рассматривать математические модели, в которых структуры объектов, входящих в динамическую систему, определяются некоторыми статистическими величинами. Большое количество примеров целесообразности такого подхода дают задачи статистической физики и квантовой механики.

2 Динамика неустойчивостей

При изучении нелинейных неизолированных систем часто обнаруживается, что почти все их решения обладают высокой чувствительностью к начальным условиям, приводящей на характерных временах наблюдения к искаажению траектории на величины порядка самих характерных величин, определяющих траекторию. Такое поведение обнаружено, например, в периодически стимулируемых клетках сердца, в электронных цепях, при возникновении турбулентности в жидкостях и газах, в химических реакциях, в лазерах и т.п. С точки зрения математики во всех нелинейных динамических системах с числом степеней свободы более двух (особенно во многих биологических, метеорологических и экономических моделях) можно обнаружить хаос и следовательно на достаточно больших временах наблюдения их поведение становится непредсказуемым. Слово "хаос" от греческого "хаос" первоначально означало бесконечное пространство, существовавшее до появления всего остального. Позднее римляне интерпретировали хаос как изначально сырую бесформенную массу, в которую Создатель привнес порядок и гармонию. В современном понимании хаос означает состояние беспорядочной нерегулярности.

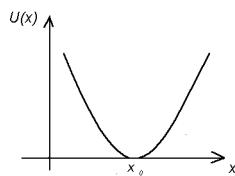
Во многих таких системах устанавливается в конце концов специальное состояние, которое называется аттрактором и которое обладает притягивающим свойством. Аттрактор - это, как правило, достаточно сложное состояние равновесия между флуктуациями в системе и средними характеристиками, определяющими ее макроскопическое состояние.

Итак, нас интересует поведение нелинейной системы на временах гораздо больших, чем время развития первоначальной неустойчивости. Существующие формальные методы математики и физики напрямую не помогают при получении актуальной траектории при заданной неопределенности в начальных данных. Эти методы позволяют получить решение и затем его проверить на устойчивость. Если полученное решение устойчиво, то можно надеяться, что оно имеет реальное значение; однако, если оно неустойчиво, то как будет себя вести реальная система - неизвестно. К исследованию аттрактора может привести рассмотрение не одной траектории, а целой "трубки траекторий", соответствующей неопределенности в начальных данных.

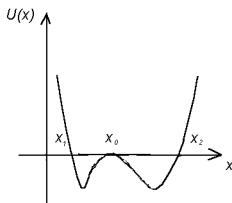
Реальный путь получения актуальной траектории движения, включая аттрактор, в настоящее время - это выполнение специальных компьютерных исследований. Дело в том, что компьютер в силу ограниченности числа разрядов считает всегда с определенной ошибкой, которую можно интерпретировать как "внешнее возмущение". Кроме этого при исследовании систем дифференциальных уравнений с помощью компьютера первоначально производится их дискретизация, что само по себе является дополнительным источником "внешних возмущений". Таким образом, при постановке счета на компьютере мы в принципе исследуем поведение системы в поле внешних возмущений. При этом, если система устойчива, то мы получаем требуемую траекторию с определенной ошибкой. Если же система неустойчива, то мы можем получить при неоднократном повторении счета в конечном итоге ее аттрактор в определенном поле внешних возмущений.

Итак, если траектория системы устойчива, то рассмотрение трубы движений возле нее мало что дает. Однако, если движение (или состояние) неустойчиво, то трубка движений, состоящая из траекторий со сколь угодно близкими начальными данными за определенное время превращается в трубку с конечным поперечным сечением, то есть траектории будут сильно отличаться друг от друга.

Проиллюстрируем сказанное простейшим примером. Рассмотрим одномерное движение частицы под действием силы, обладающей потенциалом $U(x)$. Для случая



при наличии малых возмущений при движении в окрестности точки x_0 устойчивого равновесия мы будем иметь тонкую трубку движений (если оставить в стороне резонансный случай, когда малое возмущение действует, скажем, в виде раскачивающего щелчка в правой точке остановки частицы). В случае



наоборот: частица, находясь первоначально в точке неустойчивого x_0 равновесия, под действием сколь угодно малого возмущения начинает двигаться сразу в конечной области, близкой к отрезку $x_1 \leq x \leq x_2$, совершая циклическое (или близкое к нему) движение (опять-таки если оставить в стороне случай резонансной раскачки колебания).

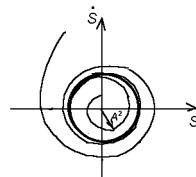
Теперь разберем простейшую модель механического или электрического генератора колебаний, когда зависимость квадрата амплитуды колебаний A^2 от времени удовлетворяет уравнению

$$\frac{dA^2}{dt} = A^2(1 - A^2)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию при $t = 0$ $A^2 = A_0^2$, имеет вид

$$A^2 = \frac{e^t}{\frac{1}{A_0^2} - 1 + e^t}$$

при t стремящемся к бесконечности вне зависимости от A_0 устанавливается предельный цикл $A^2 = 1$. Поле на фазовой плоскости траекторий (отклонение s - импульс \dot{s}) имеет вид



Все траектории имеют вид спиралей, входящих в окружность $A^2 = 1$. Положение равновесия $A^2 = 0$ является неустойчивым и достаточно сколь угодно малого возмущения, чтобы траектория стала разворачивающейся спиралью, стремящейся к предельному циклу.

Предельный цикл в данном случае является простейшим примером аттрактора. Движение фазовой точки по нему имеет один случайный элемент - fazu колебания. На примере движения с установлением предельного цикла мы убеждаемся, что неустойчивость (в данном случае положения равновесия $A^2 = 0$) сама по себе является фактором, приводящим к установлению определенных колебаний генератора.

3 Элементы динамики и эргодической теории

Для описания поведения стохастических систем обычно используются теоретико-вероятностные понятия, точное определение которых дается, обычно, в курсах по теории вероятностей или математической статистике.

Пусть $z(t) = (q(t), p(t))$ - точка в фазовом пространстве. Пара $(q(t), p(t))$ характеризует состояние системы в момент времени t .

Эволюция. Эволюция системы определяется оператором сдвига по времени $z(t+T) = Tz(t)$, ($z_{n+T} = Tz_n$ - в конечно-разностном виде). Эволюция произвольной функции f от z

$$f(z(t+T)) = S_T f(z(t)) = f(Tz(t))$$

или

$$f(z_{n+T}) = S_T f(z_n) = f(Tz_n)$$

(S — аналог квантовой S -матрицы).

Эргодичность. Движение называется эргодическим, если справедливо равенство временных и фазовых средних

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 00} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' f((z(t'))) &= \langle f \rangle = \int f(z) dG(z), \\ \lim_{T \rightarrow 00} \frac{1}{T} \int_0^T dt f((tz(0))) &= \lim_{T \rightarrow 00} \frac{1}{T} \int_0^T dt S_t f((z(0))) = \langle f \rangle \\ \lim_{N \rightarrow 00} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f(z_0) &= \langle f \rangle \end{aligned}$$

Корреляция. Корреляцией двух произвольных интегрируемых функций f и g от z называется

$$R(f, g|T) = \langle S_T f, g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle,$$

$$R_n(f, g) = \langle S_n f, g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle.$$

Перемешивание. Если

$$\lim_{T \rightarrow 00} R(f, g|T) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow 00} R_n(f, g) = 0,$$

то говорят, что имеет место явление перемешивания.

Спектральная плотность. Спектральной плотностью называется функция $R(\omega)$, удовлетворяющая

$$R(f, f|T) = \int_{-00}^{+00} e^{-i\omega T} R(\omega) d\omega.$$

Если спектральная плотность $R(\omega) = \sum_k R_k(\omega - \omega_k)$ (т.е. спектр дискретный), то мы имеем дело с эргодическим движением без перемешивания. При перемешивании часть спектра непрерывна.

При чисто эргодическом движении траектории плавно заполняют фазовое пространство. При перемешивании поведение системы носит стохастический характер. Это характерно для неустойчивых динамических систем.

Крылов Н.С. в статье "Работы по обоснованию статистической физики" (Изд-во АН СССР, 1950) ([1]) писал, что сколь угодно малая ячейка фазового пространства при перемешивании должна расплываться по всему фазовому пространству. Это означает, что точки, которые в начальный момент были близки между собой, с течением времени удаляются друг от друга и начинают двигаться независимо. Сколько угодно малые возмущения начальных условий приводят к сколь угодно сильному уходу фазовой траектории системы от своего невозмущенного состояния. Если фазовое пространство системы является конечным (хотя бы по одной переменной), то фазовые траектории не могут разойтись из-за неустойчивости более чем на характеристический размер пространство и начинают запутываться.

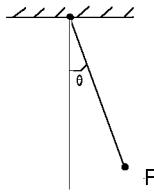
Описанный тип неустойчивого движения называется локально-неустойчивым. Обозначим $D(t)$ расстояние между двумя точками в фазовом пространстве, принадлежащих разным траекториям в момент времени t . Формально явление локальной неустойчивости можно определить так: система локально-неустойчива, если существует направление, в котором $D(t) = D(0)e^{h_0 t}$, h_0 - инкремент неустойчивости, который является функцией точки фазового пространства. Свойство локальной неустойчивости связано со свойством перемешивания. Если корреляция $R(t) = \exp(-h_c t)$, $h_c = 1/\tau$, то связь между статистическими свойствами системы h_c и чисто динамической характеристикой h_0 : $h_c = \langle h_0 \rangle$. При этом необходимо выяснить, когда регулярное, например, условно-периодическое движение системы разрушается и движение станет с перемешиванием. Для этого требуется определить условия, при которых в динамической системе возникает локальная неустойчивость. Условие стохастичности - неустойчивость. Максимум неустойчивости равносителен разрушению всех интегралов движения, кроме энергии.

Анализ Н.С. Крылова показал, что именно стохастическая неустойчивость обеспечивает равномерное перемешивание начальной фазовой ячейки с любой требуемой точностью на поверхности неразрушенных однозначных интегралов движения и приводит к конечному времени релаксации на этой поверхности.

4 Эксперименты, иллюстрирующие переход к турбулентности

4.1 Маятник

Рассмотрим маятник, возбуждаемый внешней периодической силой



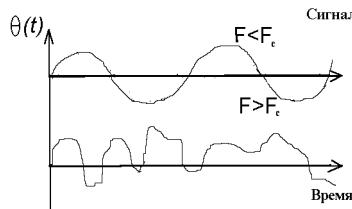
описываемый уравнением

$$\theta'' + \gamma\theta' + g \sin \theta = F \cos \omega t.$$

После замены переменных $x = \theta'$, $y = \theta$, $z = \omega t$ получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\gamma y - g \sin z + F \cos z \\ z' &= \omega \end{aligned}$$

В зависимости от величины F характер поведения маятника соответствует графикам



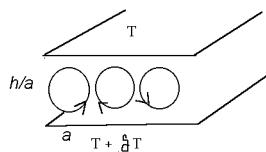
Чтобы отличить хаос от многопериодического движения рассмотрим

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt e^{i\omega t} x(t)$$

Для многопериодического движения спектр мощности $P(\omega) = |X(\omega)|^2$ состоит только из дискретных линий на определенных частотах. При хаотическом движении в спектре мощности есть сплошная полоса на низких частотах.

4.2 Эксперимент Бинара

Слой жидкости с положительным коэффициентом объемного расширения подогревается снизу в поле силы тяготения. Нагретая жидкость вблизи дна поднимается вверх, а холодная опускается вниз, но этому процессу противодействуют вязкие силы.



При малых преобладает вязкость, жидкость покойится и тепло переносится с постоянной теплопроводностью. Это состояние становится неустойчивым при критическом значении R_c - числа Рэлея $R(-)$ появляются стационарные конвективные волны. После превышения порога R_c появляется хаотическое движение.

В последней части данной работы будет показано, что при некоторых предположениях поведение жидкости в эксперименте Бинара описывается "Моделью Лоренца":

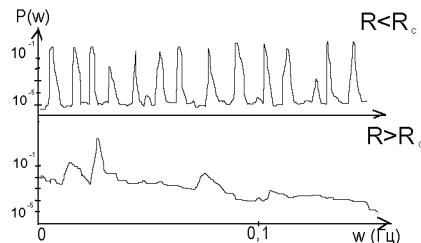
$$x' = -\sigma x + \sigma y$$

$$y' = rx - y - xz$$

$$z' = xy - bz$$

в которой r - управляющий параметр пропорциональный δT , x пропорционально скорости циркулирования жидкости, y пропорционально разности температур, z пропорционально отклонению вертикального профиля температуры от равновесного значения.

Экспериментальные данные дают следующую зависимость для спектра мощности $P(\omega)$



x -компоненты скорости измеренная по эффекту Доплера при рассеянии света.

4.3 Реакция Белоусова-Жаботинского

Органические молекулы (например, малоновой кислоты) окисляются бромат-ионами при катализации окислительно-восстановительной системой (Ce^{4+}/Ce^{3+}). Реагентами являются $Cl_2(SO_4)_3$, $NaBrO_3$, $CH_2(COOH)_2$, H_2SO_4 которые участвуют в 18 элементарных реакциях

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda),$$

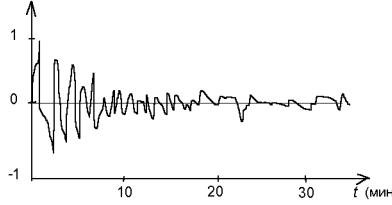
$x = (c_1, c_2, \dots, c_d)$ - концентрации, F, λ - внешние управляющие параметры.

Концентрация ионов Ce^{4+} , измеренная по селективному поглощению света проявляет хаотическое поведение. Среднее время пребывания веществ в проточном реакторе является внешним управляющим параметром.

Для корреляционной функции $R(\tau)$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt c'(t)c'(t + \tau), c'(t) = c(t) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt c(t)^2$$

имеем



при $t - > 0$ корреляция становится близкой к нулю, а это в свою очередь показывает, что есть перемешивание, то есть наступает явление хаоса.

4.4 Акустический эксперимент

Через ламинарное течение жидкости в трубе пропускается звук высокой интенсивности и измеряется выходной сигнал. В результате этого ламинарное течение становится турбулентным.

5 Кусочно-линейные отображения и хаос

5.1 Определения

Разностным отображением f будем называть соотношение $x_{n+1} = f(x_n)$, где $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Траектория. Траекторией отображения f мы будем называть последовательность x_0, x_1, x_2, \dots такую, что $0 \leq x_n \leq 1, x_{n+1} = f(x_n)$ для любого n . Другими словами $x_{n+1} = f(x_n) = f(f(\dots f(x_0)\dots))$, при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Точка покоя. Точка $0 \leq x_* \leq 1$ называется точкой покоя отображения f , если $f(x_*) = x_*$.

Точка покоя называется локально устойчивой(неустойчивой) точкой покоя, если существует такое $\delta > 0$, что для всякого x_0 из $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x_*$, (существует N такое, что $f^n(x_0)$ не принадлежит интервалу $[x_* - \delta, x_* + \delta] \setminus [0, 1]$ и $n > N$).

Точка покоя называется глобально устойчивой, если δ можно выбрать больше единицы.

Нетрудно показать, что если x_* - точка покоя и $|f'(x_*)| < 1$ (или $|f'(x_*)| > 1$), то точка покоя устойчива (неустойчива).

Показатель Ляпунова. Показателем Ляпунова отображения f точки $x_0 \in [0, 1]$ (или траектории отображения x_n) будем называть

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right|,$$

т.е.

$$\epsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|.$$

Таким образом, $\lambda(x_0)$ характеризует, насколько сближаются или расходятся траектории, соответствующие различным начальным точкам. Нетрудно показать, что

$$\lambda(x_0) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \ln |f'(x)|.$$

Инвариантная мера. Инвариантной мерой называется функция $p(x)$, которая задает плотность итераций отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, $x \in [0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ на единичном интервале и определяется следующим образом

$$(+) p(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(x - f^{(i)}(x_0)).$$

Если у отображения есть инвариантная мера, то показатель Ляпунова этого отображения не зависит от x_0 .

Для произвольной функции $g(x)$ временное среднее значение по определению совпадает со средним значением относительно инвариантной меры

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g(f^i(x_0)) = \int_0^1 dx p(x) g(x).$$

Это одномерный аналог термодинамического усреднения в статистической механике, позволяющего в случае когда движение в фазовом пространстве эргодично, заменить временное усреднение усреднением по ансамблю относительно стационарного распределения p , т.е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt A(x(t)) = \int_0^1 dx p'(x) A(x)$$

A - функция от вектора $x = [p, q]$, $q_i = \frac{dH}{p_i}$, $p_i = \frac{dH}{q_i}$, $p' = \delta(H(x) - E)$, p' - макроскопическое распределение изолированной системы с энергией E .

Для вычисления инвариантной плотности можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$p_{n+1}(y) = \int dx \delta[y - f(x)] p_n(x).$$

Из определения (+) получаем

$$(*) p(y) = \int dx \delta[y - f(x)] p(x)$$

стационарное интегральное уравнение Фробениуса-Перрона.

Два отображения f и g называются топологически сопряженными, если существует обратимое преобразование $h(x)$: $f(x) = h^{-1}(g(h(x)))$.

Инвариантные плотности топологически сопряженных отображений связаны соотношением

$$p_f(x) = p_g(h(x)) \frac{dh}{dx}$$

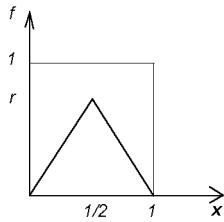
Для доказательства этого достаточно проверить что плотность p_f инвариантна относительно $f(x)$

$$\begin{aligned} \int dx \delta[y - f(x)] p_f(x) &= \int dx \delta[y - h^{-1}(g(h(x)))] p_g(h(x)) \left| \frac{dh}{dx} \right| = \\ &= \int d\omega \delta[y - h^{-1}(g(\omega))] p_g(\omega) = \int d\omega \delta[h(y) - g(\omega)] \left| \frac{dh}{dg} \right|_{h^{-1}(y)} p_g(\omega) = \\ &= \left| \frac{dh}{dg} \right| \int d\omega \delta[h(y) - g(\omega)] p_g(\omega) = p_g(h(y)) \frac{dh}{dy} = p_f(y). \end{aligned}$$

5.2 Треугольное отображение

Рассмотрим для примера треугольное отображение:

$$x_{n+1} = \sigma_r(x_n) = 2rx_n \bmod 1 = r(1 - 2|1/2 - x|).$$



Показатель Ляпунова для этого отображения $\lambda = \ln 2r$. При $r = 1$ инвариантная мера $p(x) = 1$.

Напомним, что корреляционной функцией разностного отображения f называется

$$R(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{i+m}' x_i',$$

где $x_i' = f^i(x_0) - X$, $X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f^i(x_0)$. $R(m)$ - характеристика стохастичности последовательности $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$, которая показывает насколько отклонение от среднего значения $x_i' = x_i - X$ вычисленные через m шагов связаны в среднем друг с другом.

Если для данного отображения $f(x)$ известна инвариантная мера $p(x)$, то

$$R(m) = \int_0^1 dx p(x) x f^m(x) - \left[\int_0^1 dx p(x) x \right]^2.$$

В силу коммутативности итераций

$$x_{i+m} = f^{i+m}(x_0) = f^i f^m(x_0) = f^m f^i(x_0).$$

Для треугольного отображения имеем

$$\begin{aligned} R(m) &= \int_0^1 dx x \sigma^m(x) - \left[\int_0^1 dx x \right]^2 = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy y \sigma^m(y + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \sigma^m(y + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \delta_{m,0}. \end{aligned}$$

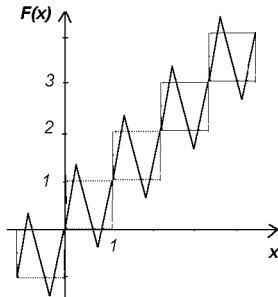
5.3 Детерминированная диффузия

При броуновском движении частиц жидкости в случае большого трения можно пренебречь ускорением и тогда x' пропорционально $\eta(t)$, $\eta(t)$ - случайные силы возникающие при тепловом движении молекул. Если считать, что $\eta(t)$ коррелированы по Гауссу, т.е. $\langle \eta(t) \rangle = 0$, $\langle \eta(t), \eta(t') \rangle = \delta(t - t')$ тогда $\langle x(t) \rangle = 0$, $\langle x^2(t) \rangle$ пропорционально t (в отличие от закона x^2 пропорционально t^2 при постоянной силе k пропорциональной x).

Рассмотрим кусочно-линейное периодическое отображение

$$x_{\tau+1} = F(x_\tau) = x_\tau + f(x_\tau), \tau = 0, 1, 2, \dots,$$

в котором функция $f(x_\tau)$ периодична по x_τ , т.е. $f(x_\tau+n) = f(x_\tau)$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$



Траектория медленно удаляется от начала координат. Диффузия возникает не за счет случайных сил, как в броуновском движении, а за счет того, что траектория под влиянием хаотического движения внутри одного или нескольких единичных отрезков "забывает свое прошлое".

Вычислим $\langle x^2 \rangle$. Координату x_τ представим в виде суммы номера отрезка N_τ и положения y_τ из отрезка $[0, 1]$: $x_\tau = N_\tau + y_\tau$

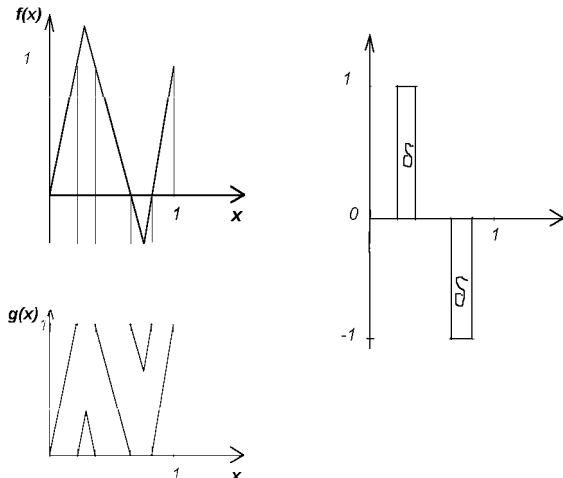
Для рассматриваемого отображения имеем

$$N_{\tau+1} + y_{\tau+1} = F(N_\tau + y_\tau) = N_\tau + y_\tau + f(y_\tau),$$

$$N_{\tau+1} - N_\tau = [y_\tau + f(y_\tau)] = \sigma(y_\tau),$$

[]-целая часть,

$$y_{\tau+1} = y_\tau + f(y_\tau) - [y_\tau + f(y_\tau)] = g(y_\tau)$$



Обозначим

$$N_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} (N_{\tau+1} - N_\tau) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \sigma(y_\tau), N_0 = 1.$$

Для дисперсии имеем

$$\langle N_t^2 \rangle = \sum_{\tau, \lambda} \langle \sigma(y_\tau), \sigma(y_\lambda) \rangle$$

Усреднение $\langle \dots \rangle$ берется по всем начальным условиям y_0 . Для простоты полагаем, что $\langle N_t \rangle = 0$.

Если движение задаваемое $g(y)$ настолько хаотично, что корреляции между y_τ нет, т.е.

$$\langle \sigma(y_\tau), \sigma(y_\lambda) \rangle = c \delta_{\tau, \lambda}$$

Если $g(y)$ имеет инвариантную плотность, удовлетворяющую уравнению

$$p(y) = \int_0^1 dx \delta[g(y) - y] p(x),$$

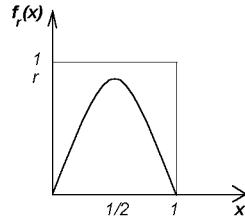
тогда $\langle N_t^2 \rangle = 2Dt$, для $t \gg 1$, $D = \frac{1}{2} \int_0^1 dy p(y) \sigma^2(y)$ - коэффициент диффузии. Если интервалы δ , через которые траектории перескакивают из одного отрезка в другой достаточно малы (так, что изменением p в этой области можно пренебречь, т.е. $P(x \in \delta) = P'$), то $D = \frac{1}{2} P' \delta$.

5.4 Универсальное поведение квадратичных отображений

Рассмотрим так называемое логистическое отображение

$$(!) x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1-x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

Постоянная r может принимать значения в диапазоне $0 \leq r \leq 4$ переменная x_n имеет область изменения $0 \leq x_n \leq 1$.



Это отображение появляется в ряде разделов науки. В биологии оно является простейшей моделью, описывающей изменение численности какой-либо популяции биологического вида в определенном месте пространства через определенные промежутки времени. Слагаемое rx соответствует прибыли числа особей, а нелинейный член $-rx^2$ за их убыль.

При численном исследовании уравнения

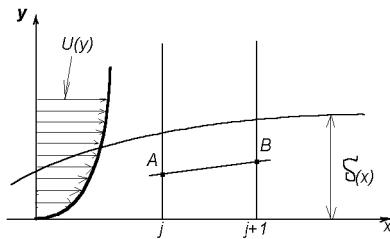
$$\frac{dA^2}{dt} = A^2(1 - A^2), \frac{dA^2}{dt} = \frac{dA_{j+1}^2 - dA_j^2}{\epsilon}$$

мы также приходим к уравнению (!) (подстановка $x = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} A_j^2$ приводит к уравнению (!) с $r = 1 + \epsilon$).

Другой пример из области банковских сбережений. При фиксированном проценте прироста в год ϵ_0 на начальный капитал z_0 через $n + 1$ лет сумма вклада составит $z_{n+1} = (1 + \epsilon_0)z_n = (1 + \epsilon_0)^{n+1}z_0$. Предположим, что какой-то политик предложил уменьшать ϵ процент по вкладу при больших z так, чтобы $\epsilon = (1 - \frac{z}{z_{max}})\epsilon_0$, тогда $z_{n+1} = (1 + \epsilon_0(1 - z_n/z_{max}))z_n$ и при $x = z_0\epsilon_0/z_{max}(1 + \epsilon_0)$, $r = z_{max}(1 + \epsilon_0)^2/\epsilon_0$ получаем уравнение (!).

Уравнение (!) с $r = 4$ появляется в теории системы Лоренца.

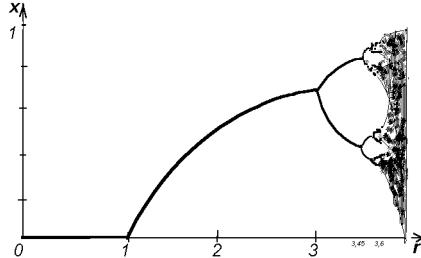
Наконец, отображения типа (!) могут появляться при исследовании турбулентного пограничного слоя при рассмотрении соответствия течения в последовательности сечений, перпендикулярных потоку



Рассматривая среднее течение $U(y)$ и амплитуду флуктуаций $(u')_{max}(y)$ какую-либо компоненты скорости и составляя величину $x(y) = U - (u')_{max}$ (все величины отнесены с средней скорости на внешней границе пограничного слоя), можно ожидать, что в двух последовательных сечениях j и $j + 1$, то есть в точках A и B имеет место соотношение $x_{j+1} = F(j, x_j)$ при определенном значении $y/\delta(x)$ ($\delta(x)$ - местная толщина пограничного слоя). В порядке приближения можно рассмотреть $F(j, x_j) = r(j)x_j(1 - x_j)$, то есть свести исследование к системе (!) для неоднородного случая, когда параметр r сам является функцией j .

Систему (!) можно исследовать с помощью компьютера. Задавая x_0 , будем искать предельные значения x_n при $j - > 00$ при различных значениях r . Нетрудно

показать, что при $0 < r < 1$ у логистического отображения существует единственная точка покоя $x_0 = 0$, и она глобально устойчива. При $1 < r < 3$ появляется еще одна точка покоя $x_* = 1 - 1/r$, которая является устойчивой, а точка покоя $x_0 = 0$ становится неустойчивой. Появляется первая бифуркация. Все траектории логистического отображения при $1 < r < 3$ стремятся при $n \rightarrow \infty > 00$ к x_* , кроме траектории $x_0 = 0$



При $r > 3$ и вторая точка покоя становится неустойчивой, а новых точек покоя не появляется. Что же происходит после этого? Происходит следующая бифуркация. Возникает устойчивый двойной цикл. Можно показать, что при $r > 3$ у функции $f^2(x) = f(f(x))$ появляются четыре точки покоя: $x_0 = 0, x_*, x', x''$

$$x', x'' = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{r} \right) + -\sqrt{\left(1 + \frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{3}{r} \right)} \right]$$

две первые из которых неустойчивы, а две остальные устойчивы. Причем $f(x') = x''$, а $f(x'') = x'$. Следовательно, расстояние между любой траекторией логистического отображения и множеством $G = x', x''$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Множество G называют устойчивым циклом логистического отображения периода два.

При $r = 3,45$ образуется бифуркация удвоения цикла. Можно доказать, что существует последовательность r_n такая, что $r_n < r_{n+1}$, $r_n > r_{00} = 3,6$ и при $r_n < r < r_{n+1}$ имеется устойчивый 2^{n-1} -цикл $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{2^{n-1}}^*$ такой, что $f(x_i^*) = x_{i+1}^*$, $f^{2^{n-1}}(x_i^*) = x_i^*$ и $|\frac{d}{dx} f^{2^{n-1}}(x_0^*)| < 1$. То есть при $r_{n-1} < r < r_n$ расстояние между любой траекторией и 2^{n-1} -циклом стремится к нулю при неограниченном росте числа итераций f .

Этот процесс удвоения циклов подробно исследовался Фейгенбаумом, что привело к открытию в определенном смысле универсальности поведения нелинейных систем. Было установлено ([6]), что для всякого $n > 1$ существует так называемый суперцикл отображения $f_{R_n}^{2^n}$, содержащий точку $x_0 = \frac{1}{2}$, где $R_n \in (r_n, r_{n+1})$. Если обозначить $d_n = f_{R_n}^{2^n}(\frac{1}{2})$, то предел $\frac{d_n}{d_{n+1}}$ существует и равен $a = 2,5029078750\dots$. Вторая константа Фейгенбаума δ определяется следующим образом:

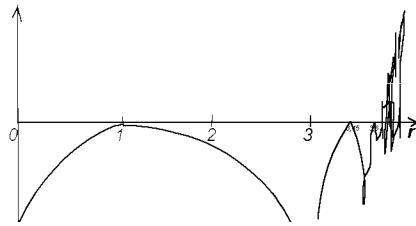
$$r_n - r_\infty = const \delta^{-n}, n \gg 1, \delta = 4,66016091\dots$$

Эти константы, как видно из их определения, характеризуют переход к хаосу.

При $r > r_\infty$ наступает исключительно быстрая смена характера предельных решений системы (!) с появлением иногда циклов, иногда стохастических решений.

При $r = 4$ все решения экспоненциально неустойчивы. В процессе счета на компьютере наблюдается хаотическое блуждание от одного неустойчивого решения к другому.

Значения показателя Ляпунова для логистического отображения при различных r приведены на следующем графике

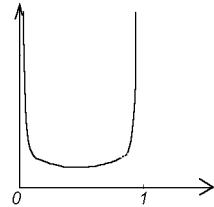


Отображение $f_4(x)$ топологически сопряжено с отображением $\sigma(x)$, так как для функции $h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ справедливо

$$f_4(h^{-1}(x)) = \sin^2(\pi x) = h^{-1}(\sigma(x))$$

Отсюда, можно сказать, что отображение $\sigma(x)$ индуцирует хаотическое поведение у $f_4(x)$. Инвариантная плотность p_{f_4} определяется с помощью функции $h(x)$ по инвариантной плотности $p_\sigma = 1$

$$p_{f_4}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$



В процессе счета на компьютере система выходит на свой аттрактор - совокупность притягивающих значений x , удовлетворяющую условию устойчивости. Аттрактор может быть весьма простым, включающим несколько изолированных точек (цикл), но может быть и довольно сложным, включающим подмножество, по которому точка блуждает в процессе счета.

Важной характеристикой хаотического поведения является размерность получаемого в пределе аттрактора. Для этого можно ввести понятие размерности множества.

Размерность множества. Рассмотрим некоторое подмножество d -мерного пространства. Пусть требуется $N(l)$ d -мерных шаров диаметром l для его покрытия, тогда размерностью множества назовем предел

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{N(l)})}{\ln(l)},$$

если он существует.

Можно подсчитать, что размерность суперцикла при $n- > 00$ стремится к

$$-\frac{\ln 2}{\ln(\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}))} = 0,54387\dots$$

Таким образом, мы на сравнительно простом примере убедились, как происходит переход к хаосу по теории Ландау. Существуют эксперименты ([7]), подтверждающие возможность такого перехода. Более того, делаются попытки построить разностные отображения, демонстрирующие такой же, как в этих экспериментах, переход к хаосу.

С практической точки зрения существенный интерес представляет исследование логистического отображения в неоднородном случае, когда коэффициент r меняется со временем. Несколько содержательных примеров вычислений в этом случае приведены в ([2]).

6 Переход к хаосу через перемежаемость. Система Лоренца

Другой способ перехода к хаосу опирается на предположение о том, что длинные регулярные (ламинарные) фазы (окна) прерываются через статистически распределенные промежутки времени нерегулярными всплесками (короткие фазы).

Будем исходить из уравнений Навье-Стокса и уравнения непрерывности. Во многих ситуациях можно найти стационарное решение, которое, как следует из экспериментов, устойчиво при малых числах Рейнольдса. После линеаризации системы вблизи стационарного решения в предположении малости отклонений от этого решения, будем искать решение в виде

$$V_t = e^{i(\omega+i\gamma)t} V_\omega(x)$$

и из линеаризованных уравнений определять комплексные собственные частоты $\omega + i\gamma$. Если $\gamma > 0$ для всех собственных частот, то малые возмущения затухают со временем и стационарное решение устойчиво. Однако, если при увеличении R одна из собственных частот пересечет действительную ось, то стационарное решение будет неустойчиво по отношению к возмущениям с этой частотой. Здесь уже заключается первый недостаток этой теории. Мы линеаризовали систему и разделяли переменные при условии малости возмущений. Впрочем, подобные недостатки есть и в других теориях перехода к турбулентности.

6.1 Вывод системы Лоренца

Рассмотрим систему Лоренца:

$$X' = -\sigma X + \sigma Y$$

$$Y' = rX - Y - XZ$$

$$Z' = XY - bZ$$

Эту систему можно получить из эксперимента Бинара.

Пусть $v(x, t)$ -поле скорости, $T(x, t)$ -поле температур. Для эксперимента Бинара мы имеем уравнение Навье-Стокса

$$p \frac{dv}{dt} = F - dP + \mu d^2 v,$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = kd^2 T,$$

уравнение неразрывности

$$\frac{dp}{dt} + \operatorname{div}(pv) = 0,$$

с граничными условиями

$$T(x, y, z = 0, t) = T_0 + \delta T, T(x, y, z = h, t) = T_0.$$

Здесь p -плотность жидкости, μ -вязкость, P -давление, k -температуропроводность, $F = p'gl_z$ внешняя сила тяготения в направлении l_z . Нелинейность в гидродинамике связана с конвективным слагаемым

$$v = (vd)v + dv/dt$$

квадратичным по v .

Предположим, что а) система обладает трансляционной инвариантностью по y , так что конвекционные волны простираются до бесконечности, б) можно пренебречь зависимостью от δT всех коэффициентов кроме $p = p'(1 - a\delta T)$ (приближение Буссинеска). Уравнение неразрывности при этом предположении принимает вид

$$\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0, u = v_x, w = v_z.$$

Рассмотрим $\psi(x, z, t)$ такую, что

$$u = -\frac{d\psi}{dz}, w = \frac{d\psi}{dx}.$$

Обозначим $\theta(x, z, t)$ отклонение от линейного профиля температуры

$$T(x, z, t) = T_0 + \delta T - \frac{\delta T}{h}z + \theta(x, z, t).$$

С учетом введенных обозначений и сделанных предположений уравнение Навье-Стокса и уравнение теплопроводности можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d^2\psi &= -\frac{d(\psi, d^2\psi)}{d(x, z)} + \nu d^4\psi + ga \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{d}{dt}\theta &= -\frac{d(\psi, \theta)}{d(x, z)} + \frac{\delta T}{h} \frac{d\psi}{dx} + kd^2\theta, \end{aligned}$$

где

$$\frac{d(a, b)}{d(x, z)} = \frac{da}{dx} \frac{db}{dz} - \frac{da}{dz} \frac{db}{dx}, d^4 = \frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dz^4},$$

$\nu = \mu/p'$ -кинематическая вязкость, при свободных граничных условиях

$$\theta(0, 0, t) = \theta(0, h, t) = \psi(0, 0, t) = \psi(0, h, t) = d^2\psi(0, 0, t) = d^2\psi(0, h, t) = 0.$$

Сохраняя только младшие члены в фурье-представлении функции ψ рассмотрим подстановку

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a^2} \frac{1}{k} \psi &= \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \\ \frac{\pi R}{R_c \delta T} \theta &= \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right), \end{aligned}$$

где X, Y, Z - зависят только от времени, $R = gah^3\delta T/\nu k$ -число Рэлея, $R_c = \pi^4 a^{-2}(1+a^2)^3$ -критическое значение R , a -отклонение геометрических размеров. В результате получаем уравнения системы Лоренца, в которых производная берется по безразмерному времени $\tau = \pi^2 h^{-2}(1+a^2)kt$, $\sigma = \nu/k$ - число Прандтля, $b = 4(1+a^2)^{-1}$, $r = R/R_c$ -внешний управляющий параметр пропорциональный δT .

6.2 Анализ устойчивости, возникновение конвенции и турбулентности

Решение системы Лоренца в пространстве состояний описывает некоторую кривую, исходящую из начальной точки $(X(0), Y(0), Z(0))$. При определенных значениях параметров σ, r, b оно имеет характер блужданий в конечной части фазового пространства (т.н. странный аттрактор). Это наблюдается, например, для $\sigma = 10, r = 30, b = 8/3$. Этот случай будет проанализирован ниже. Именно благодаря наличию блуждающих траекторий система Лоренца привлекла пристальное внимание исследователей.

В качественном плане наличие блужданий может быть понято из следующих соображений.

Система Лоренца имеет три стационарные точки $A = (0, 0, 0)$, $B_1 = (c, c, r-1)$, $B_2 = (-c, -c, r-1)$, при подстановке которых в уравнение системы правая часть обращается в ноль.

Стационарная точка A соответствует теплопроводности без движения жидкости и еж матрица устойчивости

$$\frac{dF_i}{dx_j}|_A = (-\sigma, \sigma, 0, |r, -1, 0, ||0, 0, -b|)$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4(r-1)\sigma}, \lambda_3 = -b.$$

Решение $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ глобально асимптотически устойчиво при $0 < r < 1$. Конвекции нет. Тепло передается только через теплообмен.

При $r = 1$ - конвекция Бинара.

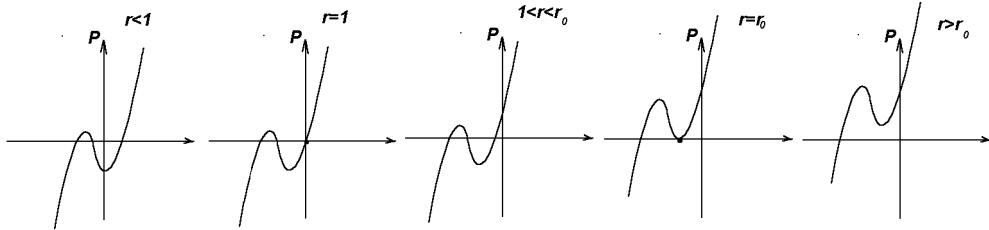
Стационарные точки B_1, B_2 соответствуют движущимся валам.
Матрицами устойчивости для стационарных точек B_1, B_2 являются

$$\frac{dF_i}{dx_j}|_{B_{1,2}} = (-\sigma, \sigma, 0, ||r, 1, -1, ||c, c, c, -b).$$

Характеристический полином

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

при $r = 1$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -b, \lambda_3 = -(\sigma + 1)$.



При $r > 1$ начало координат становится неустойчивым и появляются два других положения равновесия, которые устойчивы до тех пор, пока $r < r_0 = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ и $\sigma > 2$.

При $r = 14$ (найдено только численно) появляются две гомоклинические траектории начала координат, т.е. две траектории которые и при $t- > -00$ и при $t- > +00$ стремятся к началу координат. При $r > 14$ гомоклинические траектории исчезают, это приводит к возникновению неустойчивых циклов. Здесь происходит то, что Йорке назвал "предтурбулентностью". Имеется бесконечно много замкнутых траекторий, но в конце концов большинство траекторий притягивается к какому-либо из устойчивых состояний равновесия. Это не странный аттрактор, а "метастабильное" инвариантное множество: близкие к нему точки уходят стохастическим путем к одной из притягивающих точек.

Матрица линейного приближения имеет два комплексно сопряженных корня. При переходе r через r_0 вещественные части собственных чисел пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью и первая ляпуновская величина всегда положительна. При последующем возрастании r происходит субкритическая бифуркация Хопфа. Две неустойчивые замкнутые траектории схлопываются в два состояния равновесия, делая их неустойчивыми.

При $r > r_0$ имеем "стандартный" аттрактор Лоренца.

6.3 Странный аттрактор

Пусть $\sigma = 10, r = 30, b = 8/3$. В этом случае $A = (0, 0, 0), B_{1,2} = (+-c, +-c, 29), c = 8, 79394$

Стационарные точки являются точками ограниченной устойчивости (неустойчивые положения равновесия) - траектории в их окрестности обладают экспоненциально растущими модами. Но характер неустойчивостей точек A и $B_{1,2}$ существенно различен.

В окрестности точки A две моды являются притягивающими и одна мода отталкивающей. Это означает, что все траектории в окрестности точки A стремятся к прямой $z = 0, y = 2,2395\dots$, вдоль которой происходит отталкивание от точки A .

В окрестности точек $B_{1,2}$ лишь одна мода является притягивающей, а остальные две отталкивающими. Поэтому все траектории в окрестности точек $B_{1,2}$ стремятся к некоторым плоскостям, проходящим через эти точки, и уже вдоль плоскостей, осциллируя вокруг стационарных точек, траектории медленно (по сравнению с периодом осцилляций) удаляются от них.

Плоскости, по которым происходит отталкивание, имеют вид: $25,05595\dots x - 11,29219\dots y + -8,79394\dots z = 0$.

Непосредственным следствием того, что все три стационарные точки являются точками неустойчивого равновесия и является наблюдаемое блуждание траектории системы, внутри некоторой конечной области фазового пространства, за что аттрактор получил название странного. Странный аттрактор обладает притягивающим свойством на некотором конечном множестве пространства состояний, и, наоборот, отталкиванием - на некотором подмножестве (в рассматриваемом случае на прямой отталкивания, проходящей через точку A , и на плоскостях отталкивания, проходящих через точки $B_{1,2}$).

Конструктивное исследование такого типа систем возможно с помощью методов моделирования и оценивания параметров равновесного распределения вероятностей.

Вначале сформулируем статистическую постановку задачи. Пусть имеется вектор Q , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dQ}{dt} = F(Q),$$

Разобьем конечную часть Ω пространства состояний Q , в котором находится траектория движения системы, на совокупность элементарных ячеек $E_i (i = 1, 2, \dots, N)$. Выберем характерное время τ - шаг дискретизации - для рассмотрения соответствующих отображений пространства Q вдоль траектории движения. Разбиение пространства на конечные области E_i и времени на интервалы τ должно быть произведено достаточно представительным образом, в частности, размер ячеек E_i и τ должен характеризовать степень грубости экспериментальных методов, применяемых для проверки теории.

Рассчитывая на компьютере траекторию движения, включая аттрактор, можно определить элементы матрицы переходов $W_{i,j} (i, j = 1, 2, \dots, N)$ за один шаг τ , т.е. вероятность перехода из ячейки j в ячейку i за время τ . Матрица $W_{i,j}$ нормирована следующим образом

$$\sum_{j=1}^N W_{i,j} = 1.$$

Введя вероятность $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$ того, что рассматриваемая система находится в ячейке E_i , можно получить следующее уравнение для эволюции вероятностей

по дискретному времени $n\tau$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$P_i(n\tau) = W_{i,j} P_j[(n-1)\tau].$$

Здесь и далее подразумевается, что по повторяющимся индексам происходит суммирование.

Равновесное распределение вероятностей P_i^* удовлетворяет соотношению

$$P_i^* = W_{i,j} P_j^*.$$

Это уравнение описывает релаксационный процесс в рассматриваемом статистическом ансамбле траекторий системы от произвольного начального распределения вероятностей $P_i(0)$ до равновесного распределения P_i^* .

Для того, чтобы с требуемой степенью точности получить решение $P_i^*(t)$ необходимо следить лишь за тем, чтобы матрица переходов $W_{i,j}$ была бы получена с достаточной степенью точности.

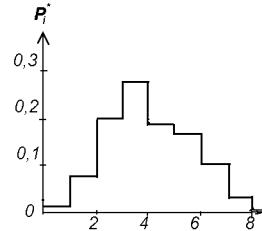
Вернемся к исследованию системы Лоренца. Разобъем пространство состояний на 8 полос

$$E_1 = (0 \leq z \leq 6), E_2 = (6 < z \leq 12), E_3 = (12 < z \leq 18), E_4 = (18 < z \leq 24),$$

$$E_5 = (24 < z \leq 30), E_6 = (30 < z \leq 36), E_7 = (36 < z \leq 42), E_8 = (42 < z \leq 48).$$

Шаг дискретизации по времени выберем $\tau = 1$, что соответствует примерно одному обороту по аттрактору.

В учебном пособии Жигулева В.Н. ([2]) приведены результаты вычисления равновесного распределения вероятностей P_i^* по объемам $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8$ для времени набора статистики $t^* = 6000$ и шага численной схемы $\delta t = 0,05$



Стоит отметить, что подавляющую часть времени точки траектории проводят на плоскостях отталкивания стационарных точек $B_{1,2}(z_0 = 29)$.

Если в процессе вычисления траектории на аттракторе Лоренца следить за последовательностью z_j максимумов z при совершении фазовой точкой одного оборота, можно получить отображение $x_{j+1} = 4x_j(1 - x_j)$, в котором x является определенной функцией z .

Отметим, что оценка шага схемы, необходимого для достаточно точного описания всей траектории на времени набора статистики (примерно 1000), приводит к величине $\delta t = 10^{-150}$. Эта точность практически недостижима из-за слишком большого объема вычислений. Однако, если применить статистический подход, то есть определять допустимую грубость траектории из требования достаточно точного получения уравнений для эволюции вероятностей и равновесного распределения P_i^* на аттракторе, то временной шаг схемы может быть сделан грубее, чем $\delta t = 10^{-2}$. В этом, в конечном счете, и заключается смысл статистического подхода вообще.

7 Общие положения теории "Динамика неустойчивостей"

Центральной проблемой динамической теории неустойчивых нелинейных систем является исследование процессов возбуждения и развития неустойчивостей, свойственных системе. Динамика неустойчивостей - вот та ключевая проблема, которая должна быть подвергнута детальному анализу для понимания поведения нелинейных систем.

Важнейшей проблемой при этом является изучение поведения нелинейных систем на временах больших по сравнению с временем развития неустойчивостей. Система на достаточно больших временах приобретает состояние, называемое аттрактором, которое является в конечном итоге определенным равновесием иерархии еще неустойчивостей. Аттрактор - это притягивающее множество в пространстве состояний системы. Он является особым решением динамических уравнений, которым подчиняется поведение системы. Если аттрактор имеет отталкивающие подмножества, то он называется странным. Его динамике характерно наличие процесса диффузии, и он должен рассматриваться статистическими методами.

Аттракторов у системы может быть несколько. Начальные условия тогда классифицируются по тому признаку, к какому аттрактору они приводят.

Можно сформулировать общий принцип. Всякая нелинейная неустойчивая система, эволюционируя в поле внешних возмущений, приходит, в конце концов, к своему аттрактору.

References

- [1] Н.С. Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, //Изд-во АН СССР, 1950.
- [2] В.Н. Жигулев, Динамика неустойчивостей: Учеб. пособие, МУГИ, М., 152 С., 1991.
- [3] Г. Шустер, Детерминированный хаос. М., 1989.
- [4] Г.М. Заславский, Сагдеев, Введение в нелинейную физику, 1989.
- [5] П.В. Плисс, Теория турбулентности, С-Пб, 1991.
- [6] M.J. Feigenbaum, The Transition to Aperiodic Behaviour in Turbulent Systems// Commun.Math.Phys. 1980, N 77, 65.
- [7] A. Libchaber, J.Maurer, Une Experience de Rayleigh-Benard de Geometric Reduite// J. Phys. (Paris) CoU. 1980, N 41.