РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1992

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 28 | 1992 | Вып. 2

УДК 621.391.1

 О.Н. Граничин

ОЦЕНИВАНИЕ ТОЧКИ МИНИМУМА НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ, НАБЛЮДАЕМОЙ НА ФОНЕ ЗАВИСИМЫХ ПОМЕХ

Предлагается и обосновывается алгоритм типа стохастической аппроксимации с возмущением на входе, который по наблюдениям на фоне помех значений неизвестной функции, зависящей от случайного параметра, дает состоятельные оценки точки минимума функции при среднем значении параметра. Сходимость алгоритма доказывается при предположении о независимости пробного возмущения, задаваемого в процедуре оценивания, и помех наблюдения. Рассматривается пример оценивания средних значений параметров процесса скользящего среднего, наблюдаемого на фоне зависимых помех.

§ 1. Введение

Пусть $f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}) : \Theta' \to R^1$, $\Theta' \subset R^N$ — семейство неизвестных функций, $\underline{\tau} \in T \subset R^M$ — случайный параметр с распределением P_τ и средним значением $\mathrm{E}\underline{\tau}$. Будем считать, что функция $f(\underline{\theta}) = f_{\overline{\underline{\tau}}}(\underline{\theta})$ имеет единственный в Θ' минимум в точке $\underline{\theta}_*$.

Рассмотрим задачу оценивания $\underline{\theta}_*$ по наблюдениям $y_n = f_{\underline{\tau}_n}(x_n) + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{x_n\}$ — точки наблюдения, $\{\xi_n\}$ — неизмеримые ошибки наблюдения, $\{\underline{\tau}_n\}$ — ненаблюдаемая последовательность случайных векторов с распределением $P_{\underline{\tau}}$.

В литературе по стохастической аппроксимации чаще рассматривают задачу определения точки минимума детерминированной функции $f(\underline{\theta})$ при наблюдении ее значений на фоне помех [1–5]. Вопрос о сходимости разных рекуррентных алгоритмов к точке минимума функции $f(\underline{\theta})$ достаточно хорошо изучен. В большинстве работ для обоснования сходимости алгоритмов оценивания требуется либо независимость помех наблюдения, либо выполнение достаточно жестких условий на их последовательность. Скорость сходимости алгоритмов стохастической аппроксимации зависит от степени гладкости функции $f(\underline{\theta})$ [1–4, 6]. Заслуживает особого внимания предложенный в [4] достаточно простой с вычислительной точки зрения алгоритм оценивания точки минимума функции $f(\underline{\theta})$, в котором среднеквадратичная ошибка оценивания убывает как $O(n^{-(\beta-1)/\beta})$ (β — обобщенный показатель гладкости функции $f(\underline{\theta})$). При этом в [4] указывается, что этот порядок скорости оценивания является точным минимаксным порядком оценивания точки минимума в достаточно широком классе функций, т.е. рассматриваемый в [4] алгоритм является в этом смысле оптимальным.

В данной работе рассматривается более общая постановка задачи. Зависимость исследуемых функций от дополнительного параметра $\underline{\tau}$ позволяет расширить практические возможности предлагаемого алгоритма. Например, при исследовании внутренней структуры некоторых объектов путем зондирования серией определенных импульсов реакция детектирующего прибора определяется не только структурой объекта, характеристиками зондирующих импульсов и помехами, но и некоторыми вероятностными характеристиками поведения объекта в результате зондирования.

В [5, 7] рассматриваются близкие к [4] алгоритмы оценивания, правда, при доказательстве состоятельности алгоритмов практически не делается никаких существенных предположений о статистических свойствах помех наблюдения кроме условия их некоррелированности с подаваемым на вход алгоритма пробным возмущением.

Для иллюстрации алгоритма в конце работы рассматривается пример идентификации средних значений параметров нестационарного процесса скользящего среднего.

§ 2. Постановка задачи

Будем считать, что в моменты времени $n = 1, 2, \ldots$ в точках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ наблюдению доступны величины

$$y_n = f_{\underline{\tau}_n}(\mathbf{x}_n) + \xi_n,$$

где $f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}) : \Theta' \to R^1$, $\Theta' \subset R^N$ — неизвестные функции, $\{\xi_n\}$ — ошибки наблюдения, $\{\underline{\tau}_n\}$ — ненаблюдаемая последовательность случайных векторов из некоторого множества T одинаково распределенных с распределением $P_{\underline{\tau}}$ и средним $\mathrm{E}_{\underline{\tau}}$.

Пусть выполнены следующие условия:

1. При любом $\underline{\tau}$ функция $f_{\underline{\tau}}(\cdot)$ имеет на R^N непрерывные частные производные до l-го порядка включительно, удовлетворяющие условию Гельдера порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, и равномерно по $\underline{\tau} \in T$ выполняется неравенство

$$\left| f_{\underline{\tau}}(\mathbf{z}) - \sum_{|m| \leqslant l} \frac{1}{m!} D^{(\mathbf{m})} f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}) (\mathbf{z} - \underline{\theta})^{\mathbf{m}} \right| \leqslant L |\mathbf{z} - \underline{\theta}|^{\beta},$$

в котором $\beta = l + \alpha$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_N)$ — целые числа $m_i \geqslant 0$, $\mathbf{u}^{\mathbf{m}} = u_1^{m_1} \ldots u_N^{m_N}$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N) \in R^N$, $D^{(m)} = \partial^{(m)} / \partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_N^{m_N}$.

2. Функция $f(\underline{\theta}) = f_{\mathrm{E}_{\underline{\tau}}}(\underline{\theta})$ имеет минимум в точке $\underline{\theta}_*$ и для произвольной точки $\underline{\theta} \in \Theta'$

$$\int (\underline{\theta} - \underline{\theta}_*, \nabla f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}))\, dP_{\underline{\tau}} \geqslant \delta |\underline{\theta} - \underline{\theta}_*|^2,$$

3. Для произвольной точки $\underline{\theta} \in \Theta'$ равномерно по $\underline{\tau} \in T$

$$|\nabla f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}) - \nabla f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}_*)| < A |\underline{\theta} - \underline{\theta}_*|.$$

4. Для любого $\underline{\tau} \in T$ $|f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}_*)| \leqslant B$, $|\nabla f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}_*)| \leqslant C$. Здесь $A, B, C, L, \alpha, \beta$, $(A > \alpha)$ — положительные постоянные, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, $|\cdot|$ — евклидова норма, E — знак математического ожидания.

Рассмотрим задачу оценивания $\underline{\theta}_*$ — точки минимума $f(\underline{\theta})$ по наблюдениям y_n, $n = 1, 2, \ldots$.

§ 3. Алгоритм оценивания

Пусть $\{\underline{\zeta}_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин из R^K с распределением $P_{\underline{\zeta}}$.

Рассмотрим алгоритм оценивания

$$\begin{aligned}
&\underline{\theta}_0 = b, \quad \mathbf{x}_n = \underline{\theta}_{n-1} + \varphi_n(\underline{\zeta}_n),\\
&\underline{\theta}_n = P_{\Theta_n}(\underline{\theta}_{n-1} - y_n \psi_n(\underline{\zeta}_n)),\\
&y_n = f_{\underline{\tau}_n}(\mathbf{x}_n) + \xi_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

в котором Θ_n — последовательность выпуклых компактов в Θ', содержащих $\underline{\theta}_*$ при достаточно больших n, P_{Θ_n} — проектор в множество Θ_n, $\varphi_n(\mathbf{z})$, $\psi_n(\mathbf{z}) : R^K \to R^N$, $n = 1, 2, \ldots$ последовательности вектор-функций, удовлетворяющих для любого $\theta \in \Theta'$ условиям

$$\int \Big(\sum_{|m| \leqslant l} \frac{1}{m!} D^{(\mathbf{m})} f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}) \varphi_n(\mathbf{z})^{\mathbf{m}} \Big) \psi_n(\mathbf{z})\, dP_{\underline{\zeta}}(\mathbf{z}) - C_D n^{-1} \nabla f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}), \tag{2}$$

$$\int \psi_n(\mathbf{z})\, dP_{\underline{\zeta}}(\mathbf{z}) = 0, \quad \int (\psi_n(\mathbf{z}), \psi_n(\mathbf{z}))\, dP_{\underline{\zeta}}(\mathbf{z}) \leqslant C_\psi n^{-2+1/\beta}, \tag{3}$$

$$\int (\varphi_n(\mathbf{z}), \varphi_n(\mathbf{z}))^{\beta} dP_{\underline{\zeta}}(\mathbf{z}) \leqslant C_\varphi^{\beta} n^{-1}, \quad |\varphi_n(\mathbf{z})|^2 \leqslant C_\varphi,$$

C_D, C_φ, C_ψ — некоторые константы. В каждый момент времени n кроме y_n доступны измерению величины $\psi_n(\underline{\zeta}_n)$. Если известно выпуклое компактное множество Θ, содержащее $\underline{\theta}_*$, то можно взять $\Theta_n = \Theta$.

Т е о р е м а. *Пусть $\beta \geqslant 2$, помехи наблюдения $\{\xi_n\}$ в среднеквадратичном ограничены: $E\xi_n^2 < \sigma^2$. При каждом n с.в. ζ_n не зависят от $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\underline{\tau}_1, \ldots, \underline{\tau}_n$. Диаметр компакта Θ_n $d_n = o(n^{(\beta-1)/(2\beta)})$ при $n \to \infty$. Тогда для любого семейства функций $f_{\underline{\tau}}(\cdot)$, удовлетворяющих условиям 1–4, оценки $\{\underline{\theta}_n\}$, определяемые по алгоритму (1), сходятся в среднеквадратическом к $\underline{\theta}_*$. При этом среднеквадратичная ошибка оценивания убывает как $O(n^{-(\beta-1)/\beta})$, т.е.*

$$E\{|\underline{\theta}_n - \underline{\theta}_*|^2\}\, n^{(\beta-1)/\beta} < \infty,$$

Если при этом выполнено условие

$$\Sigma d_n^4 n^{-(2\beta-1)/\beta} < \infty, \tag{4}$$

то оценки $\{\underline{\theta}_n\}$ сходятся к $\underline{\theta}_*$ с вероятностью 1.

Замечания. 1. Среди ограничений на семейство функций последнее (четвертое) условие при некоторой модификации алгоритма может быть опущено [4].

2. Условия (2)–(3) на последовательности функций $\varphi_n(\cdot)$, $\psi_n(\cdot)$ выполняются, например, для функций вида (см. [4])

$$\varphi_n(\mathbf{z}) = \varphi n^{-1/(2\beta)}\mathbf{z}, \quad \psi_n(\mathbf{z}) = \psi n^{-1+1/(2\beta)} K(\mathbf{z}), \tag{5}$$

где вектор-функция $K(\mathbf{z})$ определяется с помощью ортогональных полиномов Лежандра $p_j(\cdot)$ степени $j = 0, \ldots, l$ [2, 4]:

$$K_i(\mathbf{z}) = K_0(z_i) \prod_{m \neq i} \widetilde{K}(z_m), \; i = 1, \ldots, N, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N) \in R^N,$$

$$K_0(u) = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j p_j(u), \; \alpha_j = p_j'(0)/\int p_j^2(u)\,du, \tag{6}$$

$$\widetilde{K}(u) = \sum_{j=0}^{l-1} \beta_j p_j(u), \quad \beta_j = p_j(0)/\int p_j^2(u)\,du,$$

при выборе в качестве $\{\zeta_n\}$ последовательности независимых равномерно распределенных на кубе $[-½, ½]^N$ случайных величин. Введение в алгоритм общих функций $\varphi_n(\cdot)$, $\psi_n(\cdot)$ вместо конкретных функций в [4] делает алгоритм более универсальным. Например, в рамки предлагаемой в работе схемы естественно укладываются близкие к рассматриваемым в [6] процедуры типа пассивной стохастической аппроксимации, когда по постановке задачи точки наблюдения не выбираются произвольным образом, а являются реализацией некоторого заданного случайного процесса. В § 4 показано, как в таких случаях можно построить алгоритм типа (1) и применить теорему. Кроме этого, в [7] указывается на целесообразность при идентификации неизвестных параметров динамического объекта выбирать в качестве коэффициентов при z и $K(z)$ в (5) не детерминированные последовательности убывающих чисел, а случайные, обладающие определенными свойствами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать достаточно большие n, при которых $\underline{\theta}_* \in \Theta_n$. По свойству проекции из алгоритма оценивания (1) следует

$$|\underline{\theta}_n - \underline{\theta}_*|^2 \leqslant |\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_* - y_n\psi_n(\underline{\zeta}_n)|^2.$$

Усредняя обе части этого неравенства, при фиксированном $\underline{\theta}_{n-1}$, получаем

$$E\{|\underline{\theta}_n - \underline{\theta}_*|^2 | \underline{\theta}_{n-1}\} \leqslant |\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*|^2 - 2(\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*,$$

$$E\{y_n\psi_n(\underline{\zeta}_n) | \underline{\theta}_{n-1}\}) + E\{|y_n|^2 |\psi_n(\underline{\zeta}_n)|^2 | \underline{\theta}_{n-1}\}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части. В силу независимости с.в. ζ_n и ξ_n при каждом n, условий (2), (3) на последовательности функций $\varphi_n(\cdot)$, $\psi_n(\cdot)$ и свойства 1 семейства функций $f_{\underline{\tau}}(\cdot)$ имеем

$$-2(\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*, E\{y_n\psi_n(\underline{\zeta}_n) | \underline{\theta}_{n-1}\}) = -2(\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*,$$

$$\iint (f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}_{n-1} + \varphi_n(\mathbf{z}))\psi_n(\mathbf{z})\,dP_{\underline{\zeta}}(\mathbf{z})\,dP_{\underline{\tau}}) - 2(\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*, E\{\xi_n | \underline{\theta}_{n-1}\} \int \psi_n(\mathbf{z})\,dP_{\underline{\zeta}}(\mathbf{z})) \leqslant$$

$$\leqslant -2C_D \int (\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*, \nabla f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}_{n-1}))\, n^{-1} dP_{\underline{\tau}} +$$
$$+ L\sqrt{C_\varphi^\beta C_\psi}\; Cn^{-1+1/(2\beta)}n^{-1/2}\, |\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*| .$$

Воспользовавшись неравенством

$$|\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*| \leqslant \epsilon + (\epsilon^{-1}/2)|\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*|^2$$

для любого $\epsilon > 0$ и свойством 3 семейства функций $f_{\underline{\tau}}(\cdot)$, из полученного выше неравенства для произвольного $\epsilon > 0$ получаем оценку

$$-2(\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*, \mathbf{E}\{ y_n \psi_n(\underline{\zeta}_n) | \underline{\theta}_{n-1}\}) \leqslant$$
$$\leqslant -(2\delta C_D - \epsilon)\, n^{-1} |\underline{\theta}_{n-1} - \underline{\theta}_*|^2 + \frac{1}{2} L\sqrt{C_\varphi^\beta C_\psi}\, \epsilon^{-1} n^{-2+1/\beta} .$$

Дальнейшее доказательство можно провести по аналогии с доказательством соответствующих утверждений в [4, 5, 7].

§ 4. Идентификация среднего значения параметров нестационарного процесса скользящего среднего

Рассмотрим пример использования алгоритма (1) для идентификации средних значений нестационарных параметров случайного процесса скользящего среднего, наблюдаемого на фоне неизвестных помех (может быть, и зависимых между собой), задаваемого уравнением

$$y_t = b_t^{(0)} u_t + b_t^{(1)} u_{t-1} + \ldots + b_t^{(N-1)} u_{t-N+1} + v_t, \quad t = 1, 2, \ldots , \tag{7}$$

в котором $\{y_t\}$ — наблюдаемые величины, $\{u_t\}$ — измеряемая последовательность независимых ограниченных случайных величин с распределением P_u средним значением $\mathbf{E}u_t = 0$, $|u_t| \leqslant C_u$, $t = 1, 2, \ldots$, независимых с $\{v_t\}$ — помехами наблюдения; $\{b_t^{(i)}\}$, $i = 0, \ldots, N-1$ — независимые случайные величины с распределением P_i, $i = 0, \ldots, N-1$ и средними значениями $\bar{b}^{(i)}$, $i = 0, \ldots, N-1$ соответственно, с.в. $\{b_t^{(i)}\}$, $i = 0, \ldots, N-1$ — независимы с $\{u_t\}$.

Пусть $t = nN$, обозначим $\underline{\zeta}_n = (u_{nN}, \ldots, u_{(n-1)N+1})$ и $\underline{\tau}_n$ — вектор, составленный из значений параметров процесса в момент времени $t = nN$, $\underline{\tau}_n = (b_{nN}^{(0)}, \ldots, b_{nN}^{(N-1)})$. Уравнение (7) для соответствующих моментов времени $t = nN$ может быть переписано в виде

$$y_{nN} = (\underline{\zeta}_n, \underline{\tau}_n) + v_{nN},$$

Нетрудно убедиться, что $\{\underline{\tau}_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением $P_0 \times P_1 \times \ldots \times P_{N-1}$ и средним значением $\mathbf{E}\underline{\tau} = (\bar{b}^{(0)}, \bar{b}^{(1)}, \ldots, \bar{b}^{(N-1)})$.

Пусть известно выпуклое компактное множество T, содержащее $\mathbf{E}\underline{\tau}$. Рассмотрим задачу оценивания $\mathbf{E}\underline{\tau}$ по наблюдениям y_{nN}, $n = 1, 2, \ldots$.

Для построения оценок $\underline{\theta}_n$ вектора $\mathbf{E}\underline{\tau}$ воспользуемся алгоритмом

$$\underline{\theta}_0 = \mathbf{b} \in T, \quad \mathbf{x}_n = \underline{\theta}_{n-1} + n^{-1/4}\underline{\zeta}_n,$$
$$\underline{\theta}_n = P_T(\underline{\theta}_{n-1} - n^{-3/4} Y_n \underline{\zeta}_n),$$
$$Y_n = \frac{1}{2} |\mathbf{x}_n^2| - n^{-1/4} y_{nN}.$$

Покажем, что этот алгоритм типа (1) и для него выполнены все условия теоремы при $\beta = 2$, если $\mathbf{E}v_t^2 \leqslant C_v t^{1/2}$.

Для семейства функций $f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}) : \Theta' = T \to R^1$: $f_{\underline{\tau}}(\underline{\theta}) = \dfrac{1}{2} |\underline{\theta} - \underline{\tau}|^2$ выполнены условия

1–4 при $\beta = 2$. Функции $\varphi_n(z) = n^{-1/4}z$, $\psi_n(z) = n^{-3/4}z$ удовлетворяют условиям (2) и (3). Измеряемые величины Y_n, $n = 1, 2, \ldots$ в силу уравнения (7) удовлетворяют соотношениям

$$Y_n = \frac{1}{2}\ |\underline{\theta}_{n-1} + n^{-1/4}\underline{\zeta}_n|^2 - n^{-1/4}(\underline{\zeta}_n, \underline{\tau}_n) - n^{-1/4}v_{nN} =$$

$$= \frac{1}{2}\ |\underline{\theta}_{n-1} + n^{-1/4}\underline{\zeta}_n - \underline{\tau}_n|^2 + \xi_n = f_{\underline{\tau}_n}(x_n) + \xi_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

где при каждом $n = 1, 2, \ldots$ с.в. $\xi_n = -\dfrac{1}{2}|\underline{\tau}_n|^2 - (\underline{\theta}_{n-1}, \underline{\tau}_n) - v_{nN}n^{-1/4}$ и $\underline{\zeta}_n$ – независимы, так как $\{\underline{\zeta}_n\}$ не зависят от $\{v_{nN}\}$ и $\{\underline{\tau}_n\}$. Таким образом выполнены все условия теоремы, а следовательно, последовательность оценок $\{\underline{\theta}_n\}$ сходится с вероятностью 1 к минимуму функции $f(\underline{\theta}) = f_{\mathrm{E}\underline{\tau}}(\theta)$, который совпадает с $\mathrm{E}\underline{\tau}$. Скорость убывания среднеквадратической ошибки оценивания $O(n^{-1/2})$.

Функция $f_{\underline{\tau}}(\theta) = \dfrac{1}{2}\ |\underline{\theta} - \underline{\tau}|^2$ удовлетворяет условиям 1–4 на класс функций при любом $\beta \geqslant 2$. Если с.в. $\{u_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ равномерно распределены на отрезке $[-1/2, 1/2]$ и выполняется условие $\mathrm{E}v_t^2 \leqslant C_v t^{1/\beta}$, то для оценивания среднего значения параметров уравнения (7) можно воспользоваться более эффективным алгоритмом. Выберем $\beta > 2$, тогда алгоритм

$$\underline{\theta}_0 = \mathbf{b} \in T,\ x_n = \underline{\theta}_{n-1} + n^{-1/(2\beta)}\underline{\zeta}_n,$$

$$\underline{\theta}_n = P_T(\underline{\theta}_{n-1} - n^{-(2\beta-1)/(2\beta)}K(\underline{\zeta}_n)\,Y_n),$$

$$Y_n = \frac{1}{2}\ |x_n^2| - n^{-1/(2\beta)}y_{nN},$$

в котором вектор-функция $K(z)$ определяется соотношениями (5) с помощью полиномов Лежандра $p_j(\cdot)$, $j = 0, \ldots, \beta - 1$, сходится с вероятностью 1 к вектору средних значений параметров уравнения (7), при этом среднеквадратичная ошибка оценивания убывает как $O(n^{-(\beta-1)/\beta})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.
2. *Катковник В.Я.* Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. М.: Наука, 1976.
3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
4. *Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Пробл. передачи информ. 1990. Т. 26. С. 45–53.
5. *Граничин О.Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробное возмущение // Вестн. ЛГУ, Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. Сер. 1. Вып. 1. С. 19–21.
6. *Назин А.В., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Пассивная стохастическая аппроксимация // АиТ. 1989. № 11. С. 127–134.
7. *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Адаптивное управление с использованием пробных сигналов в канале обратной связи // АиТ. 1986. № 2. С. 100–112.

Поступила в редакцию
26.04.91
После переработки
02.12.91