УДК 519.216.76; 519.712

О. Н. Граничин

ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

(С.-Петербургский гос. университет)

1. Введение

Точное решение любой проблемы возможно при точной постановке задачи, но связи и отношения в реально существующем мире настолько сложны и многообразны, что практически невозможно строго формализованно описать многие явления. Типичным подходом в теории является выбор близкой к реальным процессам математической модели и включение в нее различных *возмущений* (*помех*), относящихся, с одной стороны, к грубости математической модели и, с другой стороны, характеризующих неконтролируемые внешние возмущения на объект или систему. Для всех математических моделей результатом эксперимента является математический объект — число, множество чисел, кривая и т. п. С математической точки зрения значительный круг прикладных задач имеет цель восстановить по экспериментальным данным характеристики (параметры) исследуемого процесса (объекта). При этом реальные системы редко исчерпывающе описываются ограниченными математическими моделями. Выбирая модель для решения реальной задачи, принято говорить о так называемой *систематической* погрешности (погрешности модели), которая может быть количественно выражена расстоянием от реального оператора до выбранной модели. Другой тип погрешностей (ошибок), с которыми может столкнуться экспериментатор, связан с ошибками измерения. Такие ошибки называют *статистической* погрешностью (случайной погрешностью). Процесс выбора характеристик (параметров) модели из заданного класса для наилучшего описания результатов представляет собой одно из достаточно общих определений понятия *оценивания*. На практике процесс оценивания часто удается связать с какой-нибудь количественной характеристикой качества оценивания и, естественно, при выборе оценок стараться минимизировать отрицательное влияние погрешностей как статистической, так, по возможности, и систематической.

Во многих задачах погрешности удобно интерпретировать как возмущающие воздействия на систему или как помехи (ошибки) наблюдения (измерения результатов эксперимента). При разработке алгоритмов оценивания в большинстве теоретических исследований возмущениям приписываются какие-либо полезные статистические характеристики. На их основе теоретически исследуются свойства оценок. Наиболее часто предполагается, например, существование функции распределения для возмущений и их центрированность. В инженерной практике широко используются алгоритмы, основанные на идеях обыкновенного метода наименьших квадратов (МНК), представляющего собой усреднение данных наблюдения. Если при этом предположение о центрированности возмущений было сделано без достаточных обоснований, то практическое использование алгоритмов такого типа нецелесообразно. Так обстоят дела, например, в условиях возможного противодействия противника. В частности, если возмущение определяется детерминированной (неслучайной) неизвестной функцией, то результат применения к наблюдениям операции усреднения никакой полезной информации в себе не несет. Обычно в такой ситуации последовательность наблюдений называют *вырожденной* и вопрос о получении хорошего решения задачи не рассматривают. Эти трудности в использовании стандартных методов оценивания приводят к необходимости исследовать алгоритмы, обеспечивающие высокое качество работы при минимальных предположениях о статистических свойствах возмущений.

Как математическая наука теория оценивания была основана в 1806 г., когда появилась работа А. М. Лежандра о наименьших квадратах. Честь основателя принадлежит и К.Ф.Гауссу, опубликовавшему свою версию метода наименьших квадратов (МНК) в 1809 г. В 1821 г. он предложил рекуррентный вариант процедуры, позволяющий корректировать ранее вычисленную оценку с учетом вновь поступивших дополнительных измерений без необходимости повтора всех предшествующих вычислений. В этот период стимулом для развития МНК служили запросы развития небесной механики, и метод быстро стал стандартным для определения орбит небесных тел. Неудивительно, что в ряду авторов работ по небесной механике находятся имена Ф. А. Бесселя, Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа, С. Д. Пуассона, известных своим вкладом в основания статистики.

В начале XX в. теоретические обоснования метода наименьших квадратов получили значительное развитие в трудах А. А. Маркова. Постепенно методика оценивания была поглощена статистикой, но не сразу в достаточно строгой математической форме. Лишь в середине XX в. теория вероятностей и важнейшие разделы статистики получили соответствующее математическое оформление, прежде всего благодаря использованию концепций теории меры. Фундамент современного состояния теории оценивания заложен Р. Фишером в 20–30-х гг. прошлого века. Р. Фишер предложил метод максимума правдоподобия и показал, что доставляемые им оценки не могут быть существенно улучшены. Р. Фишером также введены ставшие общепринятыми понятия несмещенности, достаточности, состоятельности, эффективности и асимптотической эффективности оценок. Тщательно рассматривая основания теории оценивания, Р. Фишер избавил ее от жестких ограничений, существовавших с момента появления работ К. Ф. Гаусса. Обобщения его теории привели, в частности, к развитию современных методов непараметрического и робастного оценивания, в которых точная природа распределения вероятностей оцениваемых случайных величин не предполагается известной.

Развитие и доступность вычислительной техники оказали воздействие и на классические разделы математической статистики, стимулируя разработку и давая приоритет рекуррентным схемам оценивания. Так получили широкое признание процедуры стохастической аппроксимации Роббинса–Монро (1951) [31] и Кифера–Вольфовица (1952) [27] К настоящему времени методика исследования свойств оценок, доставляемых рекуррентными алгоритмами оценивания и оптимизации при зашумленных наблюдениях, приобрела в целом достаточно законченный вид. Теория оценивания в последней четверти прошлого века получила дополнительный импульс в развитии при синтезе адаптивных систем, способных успешно функционировать в условиях априорной неопределенности о свойствах внешней среды. Алгоритмы построения оптимального управления обычно предполагают известными некоторые априорные данные о свойствах системы управления и помех. В большинстве практических задач эта информация недоступна проектировщику, но ее можно в той или иной степени восстановить из анализа получаемых наблюдений. Если такая возможность имеется, то можно синтезировать алгоритмы, в которых совмещены процессы управления и восполнения недостающей информации. Этот подход близок понятию *дуального (двойственного) управления* А. А. Фельдбаума [17]: "управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими". При достаточно эффективном восполнении недостающих сведений система управления приобретает оптимальные свойства либо близкие к ним. Такие системы называют *адаптивными*, поскольку в процессе функционирования они проявляют свойство приспосабливания к заранее неизвестным возмущениям.

Основой достаточно нового подхода к решению задач оценивания и оптимизации в плохих условиях (например, при вырожденной последовательности наблюдений) является использование *пробных возмущений*. Если при решении задачи через входные каналы системы или алгоритма удается включить в рассмотрение некоторое новое возмущение с задаваемыми экспериментатором или хорошо известными статистическими свойствами, то его можно использовать для "обогащения" информации в канале наблюдения. Иногда роль пробного возмущения может играть уже присутствующий в системе измеряемый случайный процесс. В системах управления пробные воздействия можно добавлять через канал управления, в других случаях роль пробного воздействия может играть рандомизированный план наблюдений (эксперимента). При исследовании обновленной системы с пробным возмущением, которая иногда является просто в другой форме записанной старой, даже используя традиционные методы, часто удается получить обнадеживающие результаты о сходимости и области применимости новых алгоритмов. Одна из замечательных их характеристик — состоятельность оценок при "почти произвольных" возмущениях. Существенное ограничение применимости нового подхода — предположение о независимости добавляемого в систему пробного воздействия и собственно возмущения. Во многих задачах это ограничение на свойства пробного воздействия и возмущения системы естественно и выполнимо. Так обстоит дело, если возмущения задаются неизвестной ограниченной детерминированной функцией, либо в их качестве выступает постороннее случайное возмущение, генерируемое не знающим статистических свойств нашего пробного воздействия противником, пытающимся оказать противодействие нашим исследованиям.

Интересна история появления на свет первых существенных теоретических результатов о свойствах рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, для которых была доказана сходимость при почти произвольных возмущениях. Перед разработчиками последовательных алгоритмов оценивания или оптимизации в той или иной форме всегда стоят три вопроса:

1. Каков самый быстрый алгоритм по числу итераций?
2. Как минимизировать количество измерений и других вычислений на каждой итерации?
3. Какой алгоритм будет сходиться при почти произвольных помехах?

Именно попытки поиска ответов на эти вопросы привели к тому, что на рубеже 80–90-х гг. прошлого века начались активные исследования свойств рандомизированных алгоритмов оценивания и оптимизации. Основы этих исследований базируются на работах автора, Б. Т. Поляка с А. Б. Цыбаковым и А. В. Гольденшлюгером [3–6,15,25] предложивших самые эффективные в широком классе алгоритмы, состоятельность которых обоснована при почти произвольных возмущениях в системах, а также Дж. Спала [32], показавшего существенное сокращение необходимого для оптимизации количества измерений исследуемой функции по сравнению с классическими схемами. Новый алгоритм в англоязычной литературе получил название *одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация (Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, SPSA)*, в русскоязычной — рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации, алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе или поисковый алгоритм стохастической аппроксимации. В 1993 г. при разработке способов настройки параметров нейронных сетей похожие алгоритмы были предложены в работах Дж. Алспектора [19] и Ю. Маеды [29] с соавторами. Состоятельность рандомизированных алгоритмов при почти произвольных возмущениях позже исследовалась в работах Л. Льюнга с Л. Гао [28] и Х.-Ф. Чена, Т. Дункана, Б. Пассик–Дункан [22].

При разработке нового алгоритма к положительным ответам на поставленные выше три вопроса желательно было бы добавить и четвертый аспект: представление алгоритма должно быть достаточно простым для понимания и реализации в виде электронного устройства. Такими и получились новые рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации.

На веб-сайте: http://www.jhuapl.edu/SPSA/, организованном Дж. Спалом, можно найти множество ссылок на работы, в которых рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации используются в практических приложениях.

2. Предварительный пример

Одна из основных экспериментальных методик определения неизвестного скалярного параметра (коэффициента усиления, отражения и т. п.) кого–либо процесса взаимодействия исследуемой системы с внешним воздействием заключается в проведении серии опытов и усреднении данных наблюдения (измерений). Пусть в моменты времени $n = 1, 2, \ldots$ воздействие экспериментатора на систему описывается скалярными величинами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, совокупность которых обозначим $\{\varphi_n\}$. Рассмотрим упрощенную задачу, в которой наблюдаемые в результате эксперимента (измеряемые) значения величин $y_1, y_2, \ldots$ связаны с характеристиками внешнего воздействия $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ линейным образом и на результат эксперимента оказывает влияние некоторое возмущающее воздействие $v_1, v_2, \ldots$ Для наблюдаемых величин $\{y_n\}$ можно записать безразмерные соотношения:

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

в которых θ играет роль искомого неизвестного скалярного параметра. С исторической точки зрения эта задача является классической. Большинство методов теории оценивания прежде всего апробировались на ней, поэтому набор возможных способов ее решения при различных предположениях о статистических свойствах воздействий $\{\varphi_n\}$ и "хороших" возмущениях $\{v_n\}$ достаточно обширен.

При решении задачи важно знать: известны ли значения величин $\{\varphi_n\}$ в каждый момент времени или нет. Будем рассматривать случай, когда в каждый момент времени n значение обнаруживаемого сигнала известно. Кроме этого, пусть внешнее воздействие имеет статистическую природу, представляя собой последовательность независимых между собой ограниченных случайных величин с известным ненулевым средним значением $M_\varphi \neq 0$ и положительной конечной дисперсией $\sigma_\varphi^2 > 0$. Просуммировав и усреднив n последовательных данных наблюдения, получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \theta + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

В силу усиленного закона больших чисел (см. [18]), последовательность величин $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ стремится к среднему значению M_φ. Если выбрать $\hat{\theta}^0 = 0$ и в качестве очередной оценки взять

$$\hat{\theta}^n = \frac{1}{nM_\varphi}\sum_{k=1}^{n} y_k,$$

то, предполагая независимость возмущающих воздействий, их одинаковую распределенность и ограниченность вторых статистических моментов, можно доказать сходимость с вероятностью единица последовательности оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ к значению

$$\theta + \frac{M_v}{M_\varphi},$$

где M_v — среднее значение возмущающих воздействий. Следовательно, при достаточно большом количестве наблюдений и известной величине M_v можно говорить о решении поставленной задачи об определении значения θ. При неизвестном и значительном по абсолютной величине значении M_v, а тем более при почти произвольных возмущениях, этот простой алгоритм не годится. Как все–таки подступиться к решению такой задачи? Пусть возмущения $\{v_n\}$ задаются неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией $|v_n| \leq C_v$, $n = 1, 2, \ldots$ Обозначим $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$, $n = 1, 2, \ldots,$ — центрированные входы (воздействия экспериментатора на систему). Предположим дополнительно ограниченность их четвертого центрального момента: $\mathrm{E}\{|\Delta_n|^4\} < \infty$. Домножим на Δ_n обе части соотношения, определяющего наблюдаемые величины y_n, и, произведя несложные преобразования, получим

$$\Delta_n y_n = \Delta_n^2 \theta + \Delta_n M_\varphi \theta + \Delta_n v_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Просуммировав и усреднив, имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k^2\theta + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k M_\varphi\theta + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k v_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Первое и второе слагаемое в правой части при сделанных предположениях, в силу усиленного закона больших чисел, при $n \to \infty$ с вероятностью единица стремятся к $\sigma_\varphi^2\theta$ и нулю соответственно. Можно показать, что по той же причине и последнее слагаемое с вероятностью единица при $n \to \infty$ стремится к нулю. Отсюда следует, что при $\Delta_1 \neq 0$ последовательность оценок $\{\hat{\theta}^n\}$, формируемых по правилу

$$\hat{\theta}^n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_k y_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta_k^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится с вероятностью единица к θ.

3. Рандомизированные алгоритмы

Остановимся подробнее на последнем способе построения оценок из предыдущего пункта. Из его вида следует, что если обозначить

$$\Gamma_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\Delta_k^2\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то две последовательные оценки связаны соотношением

$$\frac{\hat{\theta}^n}{\Gamma_n} = \frac{\hat{\theta}^{n-1}}{\Gamma_{n-1}} + \Delta_n y_n.$$

Следовательно, при выборе $\hat{\theta}^0 = 0$ рассматриваемый алгоритм может быть записан в рекуррентной форме:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \Delta_n\Gamma_n(\Delta_n\hat{\theta}^{n-1} - y_n),$$

$$\Gamma_n = (\Gamma_{n-1}^{-1} + \Delta_n^2)^{-1}.$$

Напомним, что при сделанных предположениях Δ_n — независимые центрированные случайные величины. Обозначив через $\bar{y}_n = \Gamma_n(\Delta_n\hat{\theta}^{n-1} - y_n)$ величины, вычисляемые по наблюдаемым к момену времени n данным, полученный рекуррентный алгоритм оценивания можно переписать в виде

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \Delta_n \bar{y}_n.$$

В этом алгоритме случайные величины Δ_n будем называть *пробным одновременным возмущением.* Для примера из предыдущего пункта было приведено интуитивное обоснование сходимости последовательности оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ к истинному значению неизвестного параметра при неслучайной неизвестной, но ограниченной последовательности помех в наблюдении. Алгоритмы такого типа в дальнейшем будем называть *рандомизированными*, так как обоснование их сходимости при почти произвольных помехах существенно использует стохастическую (вероятностную) природу пробного одновременного возмущения.

4. Функционал среднего риска

Приведенный выше пример относятся к более широкому классу задач *минимизации функционалов среднего риска.* Пусть задана последовательность p-мерных случайных векторов $\{w^n\}$ из $\mathbb{R}^p$, порожденная распределением вероятностей $\mathrm{P}_w(\cdot)$. Задача минимизации функционала среднего риска состоит в нахождении точки минимума функции $f(\cdot)$, имеющей вид

$$f(x) = \mathrm{E}_w\{F(w,x)\} = \int_{\mathbb{R}^p} F(w,x)\mathrm{P}_w(dw),$$

где $F(w,x) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ — заданная *штрафная функция* (*функция потерь*). Функцию $f(\cdot)$ обычно называют *функцией средних потерь.* В том случае, когда функция распределения $\mathrm{P}_w(\cdot)$ неизвестна, эта задача выходит за рамки классической теории оптимизации, но ее можно попытаться решить в тех случаях, когда в заданных точках $\{(w^n, x^n)\}$ доступны наблюдению (может быть с дополнительными возмущениями) или величины $F(w^n, x^n)$ — значения функции, или значения вектора–градиента $\nabla_x F(w^n, x^n)$. При этом обычно предполагают, что экспериментатору доступны только процессы формирования и (или) наблюдения последовательности $\{x^n\}$, а соответствующие значения $\{w^n\}$ порождаются распределением $\mathrm{P}_w(\cdot)$ и неподконтрольны и даже, может быть, неизвестны.

Для рассмотренного выше примера можно взять $p = r = 1$. Если помеха наблюдения $\{v_n\}$ имеет случайную природу и ее функция распределения $\mathrm{P}_v(\cdot)$, то задача об оценивании величины неизвестного параметра θ связана с функционалом

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(w_1(\theta - x) + w_2)^2 \mathrm{P}_{\varphi,v}(dw),$$

где

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix},$$

а $\mathrm{P}_{\varphi,v}(\cdot)$ — функция совместного распределения полезного сигнала и помехи. Наблюдению в каждый момент времени n доступны значения $\nabla_x F(w^n, x^n)$, равные $\varphi_n(\varphi_n x^n - y_n)$, при этом полностью неизвестны только вторые компоненты векторов w^n, $n = 1, 2, \ldots$

Если измерения значений функции $F(w^n, x^n)$ фактически делаются с некоторой аддитивной случайной центрированной независимой ошибкой $v_n \in \mathbb{R}$, то, в силу общности поставленной задачи, это усложнение непринципиально. Расширив вектор w дополнительной компонентой v и обозначив

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix},$$

можно рассматривать вместо $F(w, x)$ новую функцию

$$\bar{F}(\bar{w}, x) = F(w, x) + v$$

со схемой наблюдения без дополнительных возмущений и новое совместное неизвестное распределение $\mathrm{P}_{w,v}(\cdot)$ вместо $\mathrm{P}_w(\cdot)$, которое все равно и ранее предполагалось неизвестным. Если ошибки измерения не обладают хорошими статистическими свойствами, то упрощать задачу нельзя. Надо рассматривать модель наблюдений с дополнительными возмущениями:

$$y_n = F(w^n, x^n) + v_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

5. Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации

Развитие методов стохастической аппроксимации (СА) началось в пятидесятые годы XX в. с алгоритма Роббинса–Монро (РМ) [31] и процедуры Кифера–Вольфовица (КВ) [27]. Рассмотрим для примера задачу о нахождении стационарной точки θ некоторой функции $f(\cdot)$ (точки локального минимума или максимума) при условии, что для каждого значения $x \in \mathbb{R}$ — входа алгоритма (управляемой переменной) — наблюдается случайная величина $Y(x)$, являющаяся зашумленным значением функции $f(\cdot)$ в точке x

$$Y(x) = f(x) + V.$$

Дж. Кифер и Дж. Вольфовиц для решения этой задачи при некоторых дополнительных ограничениях обосновали сходимость к точке θ рекуррентной последовательности, определяемой по правилу (алгоритму)

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \alpha_n \frac{Y(\hat{\theta}^{n-1} + \beta_n) - Y(\hat{\theta}^{n-1} - \beta_n)}{2\beta_n},$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — некоторые заданные убывающие числовые последовательности с определенными свойствами.

Основное условие-ограничение на свойства помех наблюдения, которое обычно предполагается выполненным, — это условная центрированность помех наблюдения. Его можно сформулировать таким образом. Для *статистики* (функции, выборочные значения которой точно наблюдаются или вычисляются)

$$g(x, \beta) = \frac{Y(x + \beta) - Y(x - \beta)}{2\beta}$$

математическое ожидание при малом β близко к значению производной функции

$$\mathrm{E}\{g(x, \beta)\} \approx f'(x).$$

Поведение последовательности оценок, доставляемых алгоритмом стохастической аппроксимации, зависит от выбора наблюдаемых функцийстатистик $g(x,\beta)$. В ряде практических приложений бывает недостаточно информации относительно статистических свойств ошибок измерения, или они могут просто задаваться неизвестной экспериментатору детерминированной функцией. При этом возникают существенные трудности в обосновании применимости обычной процедуры Кифера–Вольфовица, и часто ее оценки не сходятся к искомой точке. Но это не означает, что, решая такие проблемы, надо вообще отказаться от использования достаточно простых в представлении алгоритмов стохастической аппроксимации. Выше при решении задач с произвольными помехами уже предлагалось использовать "другие" наблюдения. Если удачно заменить статистику $g(x,\beta)$ на другую, которая "в среднем" лучше аппроксимирует производную функции $f(\cdot)$, то можно надеяться на получение лучшего качества поведения последовательности оценок. Предположим, что функция $f(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема и задана наблюдаемая реализация некоторой бернуллиевской последовательности независимых случайных величин $\{\Delta_n\}$, равных с одинаковой вероятностью плюс/минус единице, некоррелированных с ошибками наблюдения на шаге n. Тогда процедуру Кифера–Вольфовица можно модифицировать, используя рандомизированную статистику

$$\tilde{g}(x,\beta,\Delta) = g(x,\beta\Delta).$$

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора и воспользовавшись некоррелированностью Δ_n и помех наблюдения, для этой новой статистики имеем

$$\mathrm{E}\{\tilde{g}(x,\beta,\Delta)\} = f'(x) + \mathrm{E}\left\{\frac{1}{\Delta}V\right\} + \mathcal{O}(\beta) = f'(x) + \mathcal{O}(\beta).$$

Если значения числовой последовательности $\{\beta_n\}$ в алгоритме стремятся к нулю, то в пределе эта статистика "в среднем" совпадает со значением производной функции $f(\cdot)$. Такими же свойствами обладает и более простая статистика

$$\bar{g}(x,\beta,\Delta) = \frac{\Delta}{\beta}Y(x+\beta\Delta),$$

использующая только одно наблюдение на каждой итерации (шаге). Добавление в алгоритм и канал наблюдения нового случайного процесса

$\{\Delta_n\}$, называемого *пробным одновременным возмущением*, приводит к обогащению последовательности наблюдений. Пробное возмущение по своей сути является возбуждающим воздействием, так как главная цель его использования заключается в стремлении добиться невырожденности получаемых наблюдений.

В многомерном случае, когда $\theta \in \mathbb{R}^r$, для построения последовательности оценок обычная процедура Кифера–Вольфовица, основанная на конечно-разностных аппроксиациях вектора-градиента функции, использует $2r$ наблюдений на каждой итерации (по два наблюдения для аппроксимации каждой компоненты r-мерного вектора-градиента). Рандомизированные статистики $\tilde{g}(x, \beta, \Delta)$ и $\bar{g}(x, \beta, \Delta)$ допускают более простой с вычислительной точки зрения способ обобщения на многомерный случай, использующий всего два или одно измерение функции на каждой итерации. Пусть $\{\Delta_n\}$ — бернуллиевский r-мерный случайный процесс. Тогда

$$\tilde{g}(x, \beta, \Delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} \\ \frac{1}{\Delta_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta_r} \end{pmatrix} \frac{Y(x + \beta\Delta) - Y(x - \beta\Delta)}{2\beta},$$

а вид формулы для $\bar{g}(x, \beta, \Delta)$ такой же, как и в скалярном случае. Использовать статистику $\tilde{g}(x, \beta, \Delta)$ было предложено Дж. Спалом в статье [32]. В его работе, в частности, показано, что для больших n вероятностное распределение соответствующим образом отмасштабированных ошибок оценивания является приблизительно нормальным. Полученная формула для асимптотической дисперсии ошибки вместе с подобной характеристикой обыкновенной процедуры Кифера–Вольфовица была им использована для сравнения двух алгоритмов. Выяснилось, что при прочих равных условиях новый алгоритм имеет ту же скорость сходимости, что и обычная процедура Кифера–Вольфовица, несмотря на то, что в многомерном случае использует существенно меньше наблюдений (в r раз меньше при $n \to \infty$). Статистика $\bar{g}(x, \beta, \Delta)$ впервые была предложена в работах [4,15]. В статье [4] она использовалась для построения последовательности оценок, состоятельных при почти произвольных помехах в наблюдении.

Вопрос о скорости сходимости оценок алгоритмов стохастической аппроксимации был, наверное, основным, стимулирующим модификации первоначальных алгоритмов. Свойства оценок обычной процедуры Кифера–Вольфовица и некоторых ее обобщений детально изучены в работах [2,11,13,21] и во многих других. Скорость сходимости зависит от гладкости функции $f(\cdot)$. Если она дважды дифференцируема, то среднеквадратичная ошибка обыкновенного алгоритма КВ убывает как $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$, если трижды дифференцируема — как $\mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})$ [2]. В. Фабиан [23] модифицировал процедуру Кифера–Вольфовица, предложив использовать кроме аппроксимации первой производной конечно-разностные аппроксимации производных высших порядков с определенными весами. Если функция $f(\cdot)$ имеет ℓ непрерывных производных, тогда алгоритм Фабиана обеспечивает среднеквадратичную скорость сходимости порядка $\mathcal{O}(n^{-\frac{\ell-1}{\ell}})$ для нечетных ℓ. С вычислительной точки зрения алгоритм Фабиана очень усложнен, число наблюдений на одной итерации быстро увеличивается с ростом гладкости и размерности, кроме этого, на каждом шаге приходится обращать некоторую матрицу. При использовании рандомизированных алгоритмов СА в задачах с достаточно гладкими исследуемыми функциями $f(\cdot)$ добиться увеличения асмптотической среднеквадратичной скорости сходимости удается без увеличения количества измерений функции на каждой итерации. В том случае, когда некоторый обобщенный показатель гладкости функции $f(\cdot)$ равен γ ($\gamma = \ell + 1$, если все частные производные функции порядка до ℓ включительно удовлетворяют условию Липшица), в [15] было предложено использовать статистики вида

$$\tilde{g}_\gamma(x, \beta, \Delta) = \mathcal{K}(\Delta)\frac{Y(x + \beta\Delta) - Y(x - \beta\Delta)}{2\beta}$$

и

$$\bar{g}_\gamma(x, \beta, \Delta) = \frac{1}{\beta}\mathcal{K}(\Delta)Y(x + \beta\Delta),$$

где $\mathcal{K}(\cdot)$ — некоторая вектор-функция с конечным носителем (дифференцирующее ядро), определяемая с помощью ортогональных многочленов Лежандра степени меньшей γ. Два соответствующих рандомизрованных алгоритма дают среднеквадратичную скорость сходимости последовательности оценок, равную $\mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}})$. В той же работе было показано, что для широкого класса алгоритмов эта скорость сходимости оптимальна в некотором асимптотически минимаксном смысле, т. е. не может быть улучшена ни для какого-либо другого алгоритма, ни для любого другого допустимого правила выбора точек измерения.

Сходимость рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в многомерном случае при почти произвольных возмущениях обоснована в работах [5,6,22,30]. В статье [15] отмечается, что алгоритм с одним измерением в асимптотическом смысле ведет себя хуже, чем алгоритм с двумя измерениями. Как будет показано ниже, это не совсем так, если при сравнении алгоритмов рассматривать количество итераций, умноженное на количество измерений. Кроме того, во многих практических применениях, в частности, при оптимизации работы систем реального времени, лежащие в основе математической модели динамические процессы могут изменяться слишком быстро, не позволяя успеть получить два последовательных измерения. В некоторых задачах просто невозможно для одного шага алгоритма сделать два измерения таких, чтобы помехи наблюдения в обеих точках $\hat{\theta}^{n-1}+\beta_n\Delta_n$ и $\hat{\theta}^{n-1}-\beta_n\Delta_n$ были некоррелированны с Δ_n. (Это одно из основных условий применимости алгоритма!) Избежать последнего недостатка позволяет предложенный в [22] алгоритм с двумя последовательными наблюдениями в точках $\hat{\theta}^{n-1}$ и $\hat{\theta}^{n-1} + \beta_n\Delta_n$.

5.1. Постановка задачи и основные предположения

Пусть $F(w, x) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^1$ — дифференцируемая по второму аргументу функция, $x^1, x^2, \ldots$ — выбираемая экспериментатором последовательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $n = 1, 2, \ldots$ доступно наблюдению с аддитивными помехами v_n значение функции $F(w^n, \cdot)$

$$y_n = F(w^n, x^n) + v_n,$$

где $\{w^n\}$ — неконтролируемая последовательность случайных величин, $w^n \in \mathbb{R}^p$, имеющих одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $\mathrm{P}_w(\cdot)$ с конечным носителем. *Требуется* по наблюдениям $y_1, y_2, \ldots$ построить последовательность оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ неизвестного вектора θ, минимизирующего функцию

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^p} F(w, x) \mathrm{P}_w(dw)$$

типа функционала среднего риска.

Обычно рассматривается задача минимизации функции $f(\cdot)$ при более простой модели наблюдений

$$y_n = f(x^n) + v_n,$$

которая легко укладывается в общую схему. Сделанное обобщение в постановке задачи диктуется стремлением учесть случай мультипликативных помех в наблюдениях

$$y_n = w^n f(x^n) + v_n,$$

который входит в общую схему с функцией $F(w, x) = wf(x)$.

Перечислим основные предположения, которые в дальнейшем будут сделаны при точной формулировке результатов.

(A) Функция $f(\cdot)$ — сильновыпуклая, т. е. имеет единственный минимум в $\mathbb{R}^r$ в некоторой точке $\theta = \theta(f(\cdot))$ и

$$\langle x - \theta, \nabla f(x) \rangle \geq \mu \|x - \theta\|^2, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$.

(B) Условие Липшица на градиент функции $f(\cdot)$

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(\theta)\| \leq A\|x - \theta\|, \; \forall x, \theta \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $A > \mu$. (Здесь и далее: $\| \cdot \|$ — евклидова норма.)

5.2. Пробное возмущение и рандомизированные алгоритмы СА

Пусть пробное одновременное возмущение Δ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — наблюдаемая последовательность независимых случайных векторов из $\mathbb{R}^r$ с функциями распределения $\mathrm{P}_n(\cdot)$; $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю; $\hat{\theta}^0 \in \mathbb{R}^r$ — фиксированный начальный вектор. Для построения последовательностей точек измерения $\{x^n\}$ и оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ предлагаются три алгоритма. Первый из них использует на каждой итерации одно наблюдение:

$$\begin{cases} x^n = \hat{\theta}^{n-1} + \beta_n \Delta_n, \; y_n = F(w^n, x^n) + v_n \;, \\ \\ \hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}^n(\Delta_n) y_n, \end{cases} \tag{1}$$

а второй и третий — по два наблюдения:

$$\begin{cases} x^{2n} = \hat{\theta}^{n-1} + \beta_n \Delta_n, \; x^{2n-1} = \hat{\theta}^{n-1} - \beta_n \Delta_n, \\ \\ \hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{2\beta_n} \mathcal{K}^n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}), \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x^{2n} = \hat{\theta}^{n-1} + \beta_n \Delta_n, \qquad x^{2n-1} = \hat{\theta}^{n-1}, \\ \\ \hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}^n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}). \end{cases} \tag{3}$$

Во всех трех алгоритмах используются некоторые вектор-функции (ядра) $\mathcal{K}^n(\cdot) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$, с компактным носителем, удовлетворяющие вместе с функциями распределения пробного возмущения $\mathrm{P}_n(\cdot)$ условиям

$$\begin{gathered} \int \mathcal{K}^n(x) \mathrm{P}_n(dx) = 0, \;\; \int \mathcal{K}^n(x) x^{\mathrm{T}} \mathrm{P}_n(dx) = \mathrm{I}, \\ \\ \sup_n \int \|\mathcal{K}^n(x)\|^2 \mathrm{P}_n(dx) < \infty, \;\; n = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{4}$$

где I — r-мерная единичная матрица.

Алгоритм (1) с функцией $\mathcal{K}^n(\Delta_n) = \Delta_n$ был впервые предложен в статье [4] для построения последовательности оценок, состоятельных при почти произвольных помехах в наблюдении. В работе [15] были рассмотрены оба алгоритма (1) и (2) с вектор-функцией $\mathcal{K}^n(\cdot)$ достаточно общего вида в ситуации равномерно распределенного пробного возмущения и при предположении о независимости и центрированности помех наблюдения. Дж. Спал [32] рассматривал алгоритм (2) для случая распределения пробного возмущения с конечными обратными моментами и вектор-функцией $\mathcal{K}^n(\cdot)$, задаваемой по правилу

$$\mathcal{K}^n(\Delta_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_{n1}} \\ \frac{1}{\Delta_{n2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta_{nr}} \end{pmatrix}.$$

С теми же вектор-функцией $\mathcal{K}^n(\cdot)$ и ограничениями на вид распределения пробного одновременного возмущения Х.-Ф. Ченом и др. в статье [22] было предложено рассматривать алгоритм (3).

5.3. Сходимость оценок с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле

Вместо алгоритма (1) будем рассматривать близкий к нему алгоритм с проектированием

$$\begin{cases} x^n = \hat{\theta}^{n-1} + \beta_n \Delta_n,\ y_n = F(w^n, x^n) + v_n \,, \\ \\ \hat{\theta}^n = \mathcal{P}_{\Theta_n}(\hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\mathcal{K}^n(\Delta_n) y_n), \end{cases} \tag{5}$$

для которого удобнее провести доказательство состоятельности последовательности формируемых оценок. В этом алгоритме $\mathcal{P}_{\Theta_n}(\cdot)$ — операторы проектирования на некоторые выпуклые замкнутые ограниченные подмножества $\Theta_n \subset \mathbb{R}^r$, которые содержат, начиная с некоторого $n \geq 1$, искомую точку θ. Если заранее известно ограниченное замкнутое выпуклое множество Θ: $\theta \in \Theta$, то можно считать $\Theta_n = \Theta$. В противном случае множества $\{\Theta_n\}$ могут расширяться до бесконечности. Иногда специфика конкретной задачи позволяет построить убывающую последовательность множеств $\{\Theta_n\}$.

Обозначим $\mathbb{W} = \mathrm{supp}(\mathrm{P}_w(\cdot)) \subset \mathbb{R}^p$ — носитель распределения $\mathrm{P}_w(\cdot)$; $\mathcal{F}_{n-1}$ — σ-алгебру вероятностных событий, порождаемую случайными величинами $\hat{\theta}^0, \hat{\theta}^1, \ldots, \hat{\theta}^{n-1}$, формируемыми по алгоритму (2) (или (3), или (5)); при использовании алгоритмов (2) или (3)

$$\bar{v}_n = v_{2n} - v_{2n-1},\ \bar{w}^n = \begin{pmatrix} w^{2n} \\ w^{2n-1} \end{pmatrix},\ d_n = 1,$$

а при построении оценок по алгоритму (5)

$$\bar{v}_n = v_n,\ \bar{w}^n = w^n,\ d_n = \mathrm{diam}(\Theta_n),$$

где $\mathrm{diam}(\cdot)$ — евклидовый диаметр множества.

Доказательство следующей теоремы можно найти в работе [8].

Теорема 1 [8]. *Пусть выполнены условия:*
(A) *для функции* $f(x) = \mathrm{E}_w\{F(w,x)\}$*;*
(B) *для функций* $F(w,\cdot)$*,* $\forall w \in \mathbb{W}$*;*
$\forall x \in \mathbb{R}^r$ *функции* $F(\cdot,x)$ *и* $\nabla_x F(\cdot,x)$ *равномерно на* $\mathbb{W}$ *ограничены;*
(4) *для функций* $\mathcal{K}^n(\cdot)$ *и* $\mathrm{P}_n(\cdot)$*,* $n = 1,2,\ldots$*;*
$\forall n \geq 1$ $\mathrm{E}\{\bar{v}_n^2\} \leq \sigma_n^2$*, случайные величины* $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n$ *и векторы* $\bar{w}^1,\ldots,\bar{w}^{n-1}$ *не зависят от* $\bar{w}^n, \Delta_n$*, а случайный вектор* $\bar{w}^n$ *не зависит от* Δ_n*.*

Если $\sum_n \alpha_n = \infty$ *и* $\alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0,\ \alpha_n^2\beta_n^{-2}(1 + d_n^2 + \sigma_n^2) \to 0$ *при* $n \to \infty$*, то* $\mathrm{E}\{\|\hat{\theta}^n - \theta\|^2\} \to 0$ *при* $n \to \infty$*, т. е. последовательность оценок* $\{\hat{\theta}^n\}$*, доставляемых алгоритмом (2) (или (3), или (5)), сходится к* θ *в среднеквадратичном смысле.*

Если, более того, $\sum_n \alpha_n\beta_n^2 < \infty$ *и с вероятностью единица*

$$\sum_n \alpha_n^2\beta_n^{-2}(1 + \mathrm{E}\{\bar{v}_n^2|\mathcal{F}_{n-1}\}) < \infty,$$

то $\hat{\theta}^n \to \theta$ *при* $n \to \infty$ *с вероятностью единица.*

Замечание 1. Для функции $F(w,x) = wf(x)$ условия теоремы 1 выполняются, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям **(A)**,**(B)**.

Замечание 2. В теореме 1 помехи наблюдения v_n можно условно назвать почти произвольными, так как они могут быть неслучайными (детерминированными), но неизвестными и ограниченными, или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей. В частности, для доказательства утверждений теоремы 1 нет необходимости предполагать что-либо о зависимости между $\bar{v}_n$ и $\mathcal{F}_{n-1}$.

Замечание 3. Утверждения теоремы 1 становятся неверными, если помехи $\bar{v}_n$ имеют определенную структуру зависимости от точки наблюдения $\bar{v}_n = \bar{v}_n(x_n)$. Если же такая зависимость имеет место, например, в связи с ошибками округления, то при попытках решения такого типа задач, наверное, целесообразно помеху наблюдения разбить на две части: $\bar{v}_n(x_n) = \tilde{v}_n + \xi(x_n)$, первая из которых, может быть, удовлетворяет условиям теоремы 1. Если вторая — результат ошибок округления, то, как правило, такие помехи обладают хорошими статистическими свойствами и, может быть, их наличие не помешает состоятельности оценок.

Замечание 4. Условие независимости помех наблюдения от пробного возмущения может быть ослаблено. Достаточно потребовать стремление к нулю с вероятностью единица при $n \to \infty$ условной взаимной корреляции между $\bar{v}_n$ и $\mathcal{K}^n(\Delta_n)$ со скоростью не меньшей, чем $\alpha_n \beta_n^{-1}$:

$$\|\mathrm{E}\{\bar{v}_n \mathcal{K}^n(\Delta_n)|\mathcal{F}_{n-1}\}\| = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right).$$

Замечание 5. Несмотря на кажущуюся близость алгоритмов (2) и (3), в случае произвольных помех в наблюдениях использование второго из них в системах реального времени более оправданно. Для алгоритма (2) выполнение условия о независимости помехи наблюдения v_{2n} от пробного возмущения Δ_n слишком ограничительно, так как в предыдущий момент времени $2n-1$ вектор Δ_n уже использовался в системе. При работе с алгоритмом (3) помеха v_{2n} и вектор пробного возмущения Δ_n появляются в системе одновременно, что позволяет надеяться на их независимость.

Замечание 6. Для еще большего обобщения условий сходимости алгоритмов (2), (3) и (5) можно рассматривать случайные, измеримые относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Практическая потребность в такого рода обобщении появляется, например, в тех случаях, когда параллельно с вычислением оценок по алгоритму стохастической аппроксимации дополнительные условия задачи позволяют говорить о качестве оценок. Если оценки еще "плохие", то целесообразно замедлить сходимость к нулю последовательности $\{\alpha_n\}$, а может быть на какое-то время и увеличить ее значения.

5.4. Пошаговое выполнение алгоритма

Следующее резюме на примере алгоритма (3) с одинаково распределенным пробным возмущением Δ_n и с вектор–функцией $\mathcal{K}^n(x) = x$ показывает, как последовательно по итерациям формировать оценки. Пусть функция распределения $\mathrm{P}_n(\cdot)$ равномерно сосредоточена в вершинах r-мерного куба $[-1, 1]^r$, компоненты вектора пробного возмущения взаимно независимы и равны ± 1 с одинаковой вероятностью (распределение Бернулли).

Шаг 1: Инициализация и выбор коэффициентов. Установите счетчик алгоритма $n = 1$. Выберите начальное приближение $\hat{\theta}^0$ и значения для неотрицательных коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ν. В алгоритме используются последовательности $\alpha_n = \alpha/(\delta + n)^\nu$ и $\beta_n = \beta/n^\gamma$. Выбор последовательностей α_n и β_n играет критическую роль в работе алгоритма. В ситуации, когда компоненты вектора θ существенно отличаются по величине, желательно использовать матричное масштабирование α_n, если предварительно доступна информация об их относительных величинах.

Шаг 2: Генерация вектора пробного возмущения. Сгенерируйте случайный r-мерный вектор возмущения Δ_n, в котором все r компонент независимо смоделированы по вероятностному распределению Бернулли ± 1 с вероятностью $1/2$ для каждого результата.

Шаг 3: Измерение значений функции. Получите два измерения функции $f(\cdot)$ в точках $\hat{\theta}^{n-1}$ и *возмущенной* относительно текущей оценки $\hat{\theta}^{n-1} + \beta n^{-\gamma}\Delta_n$: $y(\hat{\theta}^{n-1})$ и $y(\hat{\theta}^{n-1} + \beta n^{-\gamma}\Delta_n)$.

Шаг 4: Аппроксимация градиента. Сгенерируйте компоненты вектора аппроксимации градиента по правилу

$$\hat{g}_i^n(\hat{\theta}^{n-1}) = n^\gamma \Delta_{ni} \frac{y(\hat{\theta}^{n-1} + \beta n^{-\gamma}\Delta_n) - y(\hat{\theta}^{n-1})}{\beta},\ i = 1, 2, \ldots, r,$$

где Δ_{ni} — i-я компонента вектора Δ_n. Заметим, что второй сомножитель в формулах для вычисления всех r компонент одинаковый, в отличие от правила аппроксимации градиента по классической процедуре КВ.

Шаг 5: Обновление оценки $\hat{\theta}$. Используйте стандартную форму алгоритма стохастической аппроксимации

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha}{(\delta + n)^\nu} \hat{g}^n(\hat{\theta}^{n-1})$$

для перехода от $\hat{\theta}^{n-1}$ к новому значению $\hat{\theta}^n$.

Иногда желательно наложить ограничения. Если полученное основное значение оценки кажется нежелательным, тогда либо выполняют отдельный блок модификации, либо берут следующую оценку. Один из такого рода простых случаев — когда известны заранее значения максимума и минимума какой-либо из компонент вектора θ.

Шаг 6: Итерация или завершение. Возвратитесь к шагу 2 с заменой n на $n+1$. Закончите работу по алгоритму, если на нескольких последовательных итерациях оценки изменялись несущественно или после выполнения максимально допустимого количества итераций.

5.5. Программа на языке MATLAB

Приведем образец программы на языке MATLAB, реализующей N итераций алгоритма. Инициализация алгоритма в программе не показана, так как это может быть сделано по-разному в зависимости от конкретной задачи. В программе вызывается внешняя функция $valueY(\cdot)$. Компоненты вектора пробного возмущения Δ_{ni} генерируются согласно распределению Бернулли ± 1.

$FOR\, n = 1 : N$

$an = alpha/(gamma + k)^\wedge mu;$

$bn = beta/k^\wedge nu;$

$delta = 2round(rand(r, 1)) - 1;$

$thetaplus = theta + bndelta;$

$yminus = valueY(theta);$

$yplus = valueY(thetaplus);$

$ghat = delta(yplus - yminus)/(2bn);$

$theta = theta - anghat;$

$END;$

$theta;$

Если максимально и минимально возможные значения θ известны, тогда опишем их как $thetamax$ и $thetamin$ и добавим к программе две строки, учитывающие эти ограничения:

$theta = min(theta, thetamax);$

$theta = max(theta, thetamin);$

6. Линейные задачи оценивания при почти произвольных возмущениях

Обычное предположение о помехах в задачах линейной регрессии заключается в том, что их считают реализацией некоторой последовательности независимых случайных величин с нулевым средним значением. Однако в приложениях это допущение часто нарушается, что может сильно сказываться на работе стандартных оценочных процедур. Поэтому важно исследовать возможность оценки параметров регрессии при минимальных предположениях о статистических свойствах помех. На первый взгляд, это кажется удивительным, но параметры регрессии могут быть эффективно оценены в случае нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помех (см. [3,6,25,28]). Это достигается при определенном условии, когда входы (регрессоры) случайны. Для модели линейной регрессии

$$y_n \ = \ \varphi_n^{\mathrm{T}} \theta \ + \ v_n$$

с вектором неизвестных параметров $\theta \in \mathbb{R}^r$, который должен быть оценен по наблюдениям $y_n, \ \varphi_n$ $(n \ = \ 1, 2, \ldots)$, выполнение условия независимости регрессоров $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ с помехами $\{v_n\}_{n \geq 1}$ гарантирует хорошие свойства оценок при чрезвычайно умеренных ограничениях на помехи.

Идея использования случайных входных сигналов для устранения эффекта смещения была выдвинута Р. Фишером [24] в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Помимо задачи планирования эксперимента, в которой регрессоры могут быть рандомизированы экспериментатором, случайные входы возникают во многих задачах идентификации, фильтрации, распознавания и т. д. (см., например, [10]). Имея в виду эти приложения, далее будем использовать термины *входы, выходы* вместо названий, используемых в регрессионном анализе (подобных термину *регрессор*).

Рекуррентные алгоритмы оценивания параметров регрессии при случайных входных сигналах рассматривались также в книгах [1,10]. В статьях [12,16] изучалась скорость сходимости таких алгоритмов и были предложены оптимальные алгоритмы, имеющие наилучшую из возможных скорость сходимости. Во всех этих работах делались стандартные предположения о помехах, а именно считалось, что они представляют собой последовательность случайных величин с нулевым средним, независимых или слабо зависимых. Здесь основная цель изложения состоит в отказе от этих предположений. Ниже будет показано, что при случайных входных сигналах новые рандомизированные алгоритмы, похожие во многом на стандартные, дают состоятельные оценки и при нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помехах. Кроме того, новые оптимальные алгоритмы имеют ту же самую скорость сходимости, как и оптимальные в стандартном случае.

В рабое [3], наверное, впервые был предложен состоятельный алгоритм оценки параметров линейной регрессии при почти произвольных помехах, при этом рассматривалась более общая, по сравнению со стандартной, постановка задачи. Предполагалось, что вектор неизвестных параметров может меняться со временем, и в алгоритме оценивалось его среднее значение. Решение такой же обобщенной задачи разбиралось в виде примера и в рабое [6]. Использование при ее решении методов исследования сходимости при почти произвольных помехах, разработанных в рабое [25], позволяет получить алгоритмы, достигающие оптимальной в среднеквадратичном смысле скорости сходимости.

При случайных входных сигналах предлагаемые алгоритмы для обоснования сходимости требуют выполнения достаточно умеренных условий на помехи. В частности, помехи могут быть неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией. По этой обнадеживающей причине новые алгоритмы могут быть полезны во многих приложениях. Численное моделирование продемонстрировало эффективность алгоритмов при разнообразных помехах v_n. В частности, в скалярном случае эксперименты были выполнены с неслучайной константой, нецентрированной случайной переменной и различными неслучайными последовательностями помех. В этих экспериментах исследовались траектории оценок стохастической аппроксимации и оценок метода наименьших квадратов. Поведение типичных траекторий оценок рандомизированных алгоритмов при высоком уровне нерегулярной помехи существенно лучше поведения траекторий для обычных алгоритмов. Некоторые примеры этих экспериментов приведены в четвертом разделе.

6.1. Постановка задачи, основные предположения

Рассмотрим модель линейной регрессии

$$y_n \;=\; \varphi_n^{\mathrm{T}} \theta^n \;+\; v_n, \quad \theta^n = \theta + w^n, \quad n \;=\; 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

с выходами (наблюдениями) $y_n \in \mathbb{R}^1$, входами $\varphi_n \in \mathbb{R}^r$ и возмущениями (помехами) $v_n \in \mathbb{R}^1$, $w^n \in \mathbb{R}^r$. *Требуется* оценить значение θ, базируясь на наблюдениях y_n, φ_n, $n \;=\; 1, 2, \ldots$

Пусть $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра вероятностных событий, порожденная случайными величинами $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, w^1, \ldots, w^n, v_1, \ldots, v_n\}$, если $v_1, \ldots, v_n$ — случайные. Если нет, то $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, w^1, \ldots, w^n\}$. Аналогично определим σ-алгебры $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$ по $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, w^1, \ldots, w^{n-1}, v_1, \ldots, v_n\}$, и $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ по $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, w^1, \ldots, w^n, v_1, \ldots, v_n\}$. Из определения имеем

$$\mathcal{F}_{n-1} \subset \hat{\mathcal{F}}_{n-1} \subset \tilde{\mathcal{F}}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n\,.$$

Перечислим основные условия, выполнение которых будет предполагаться при формулировках теорем в этом пункте.

(C) Входы $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ представляют собой последовательность независимых случайных векторов с ограниченными *известными* математическими ожиданиями: $\|\mathrm{E}\{\varphi_n\}\| \;\leq\; M_\varphi \;<\; \infty$, $\forall n$ векторы φ_n не зависят от $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$. Случайные векторы

$$\Delta_n = \varphi_n - \mathrm{E}\{\varphi_n\}$$

имеют симметричные функции распределения $\mathrm{P}_n(\cdot)$, т. е. $\mathrm{P}_n(\Omega) = \mathrm{P}_n(-\Omega)$ для любого борелевского подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, и матрицы ковариаций удовлетворяют условиям

$$\mathrm{E}\{\Delta_n \Delta_n^{\mathrm{T}}\} = \mathrm{B}_n > 0, \|\mathrm{B}_n\| \leq \sigma_\Delta^2 < \infty.$$

(Здесь и далее $\mathrm{B} > 0$ означает, что B — положительно-определенная матрица.)

(C') Входы $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, удовлетворяющих условию **(C)** с $\mathrm{B}_n \;=\; \mathrm{B} \;>\; 0$ и ограниченным четвертым статистическим моментом:

$$\mathrm{E}\{\|\Delta_n\|^4\} = M_4^4 < \infty.$$

(D) $\forall\ n$ случайные векторы w^n центрированы ($\mathrm{E}\{w^n\} = 0$) и не зависят от $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$. Последовательности помех $\{v_n\}_{n\geq 1}$ и $\{w^n\}_{n\geq 1}$ удовлетворяют одному из условий:

$$(i) \qquad \mathrm{E}\{\, v_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sigma_v^2 < \infty, \qquad \mathrm{E}\{\|w^n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sigma_w^2 < \infty;$$

$$(ii) \qquad \mathrm{E}\{v_n^2\} \leq \sigma_v^2 < \infty, \qquad \mathrm{E}\{w^n {w^n}^{\mathrm{T}}\} \leq \mathrm{Q}_w \leq \sigma_w^2 \mathrm{I} < \infty;$$

$$(iii) \qquad |v_n| \leq C_v < \infty, \qquad \|w^n\| \leq C_w < \infty,$$

где выполнение неравенств со случайными величинами понимается с вероятностью единица и σ_v, σ_w, C_v, C_w — некоторые постоянные, Q_w — симметричная неотрицательно определенная матрица.

Заметим, что приведенные условия отличаются от стандартных предположений в задаче об оценивании параметров линейной регрессии со случайными входными сигналами (см., например, [12,16]). Это выражается, в частности, в отсутствии условия $\mathrm{E}\{v_n\} = 0$ и предположения о том, что помехи $\{v_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

6.2. Оценивание по методу стохастической аппроксимации

Исследуем сначала рандомизированный алгоритм типа стохастической аппроксимации (РСА), который для рассматриваемой модели наблюдений (6) имеет вид

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \alpha_n \Gamma \Delta_n (\varphi_n^{\mathrm{T}} \hat{\theta}^{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

где $\alpha_n \geq 0$ — неслучайная последовательность, определяющая шаг алгоритма, и Γ — некоторая положительно-определенная матрица (см. [7,10,12,25]). Подчеркнем еще раз, что векторы $\varphi_n, E\varphi_n$ (и, тем самым, $\Delta_n = \varphi_n - \mathrm{E}\{\varphi_n\}$) предполагаются известными.

Предположим, что начальное значение $\hat{\theta}^0$ — произвольный неслучайный вектор из $\mathbb{R}^r$.

Теорема 2 [7]. *Пусть для входов модели выполнено предположение* **(C)** *и при* $n \to \infty$

$$\alpha_n \to 0, \ \ \alpha_n \mathrm{E}\{\|\Delta_n\|^4\} \ \to \ 0, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ = \ \infty.$$

Если для помех выполнено условие **(Di)** *и* $\{\alpha_n\}$ *обеспечивают*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (1 + \mathrm{E}\{\|\Delta_n\|^4\}) \ < \ \infty,$$

то последовательность оценок, доставляемых алгоритмом (7), сильносостоятельная, т. е. $\hat{\theta}^n \to \theta$ *при* $n \to \infty$ *с вероятностью единица.*

Если для помех выполнено условие **(Dii)**, *то среднеквадратичная ошибка оценок, доставляемых алгоритмом (7), стремится к нулю:* $\mathrm{E}\{(\hat{\theta}^n - \theta)(\hat{\theta}^n - \theta)^{\mathrm{T}}\} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Задача об оценке параметров линейной регрессии с моделью наблюдений (6) соответствует минимизации функционала среднего риска

$$F(w, x) = \frac{1}{2}(x - \theta - w)^{\mathrm{T}}(x - \theta - w).$$

Алгоритм (7) с $\Gamma = \mathrm{B}^{-1}$ в точности совпадает с (2). При выполнении условия **(C')** для входов модели линейной регрессии утверждения теоремы 2 о сильной состоятельности оценок алгоритма (7) и их сходимости в среднеквадратичном смысле являются следствием теоремы 1. Полное доказательство теоремы 2, как и трех последующих, можно найти в работе [7].

Следующая теорема дает ответ на вопрос о скорости сходимости алгоритма (7).

Теорема 3 [7]. *Пусть выполнены условия:* **(C)** *для входов модели,* **(Dii)** *для помех и при* $n \to \infty$

$$\alpha_n \to 0, \ \ \alpha_n \mathrm{E}\{\|\Delta_n\|^4\} \ \to \ 0, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ = \ \infty.$$

Если существуют такие матрицы B, $\mathrm{U} > 0$ *и сходящаяся последовательность чисел* $\{\beta_n\}$, *что* $-\Gamma\,\mathrm{B} + \frac{1}{2}\mathrm{I}$ *— устойчивая матрица (все ее собственные значения лежат в левой полуплоскости),*

$$\|\beta_n^{-1}\mathrm{B}_n - \mathrm{B}\| = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad \beta_n^{-2}\mathrm{E}\{\Delta_n\Delta_n^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_w\Delta_n\Delta_n^{\mathrm{T}}\} \leq \mathrm{U} + \mathcal{O}(n^{-1}), \ \|\mathrm{U}\| < \infty$$

и $\alpha_n\beta_n = n^{-1}$, $\alpha_n - \alpha_{n-1} = o(n^{-1})$, $\beta_n = \beta_\infty + \mathcal{O}(n^{-1})$, *то асимптотическая скорость сходимости алгоритма (7) характеризуется неравенством*

$$\mathrm{E}\{(\hat\theta^n - \theta)(\hat\theta^n - \theta)^{\mathrm{T}}\} \leq n^{-1}\,\mathrm{S} \ + \ o(n^{-1}),$$

в котором матрица S *является решением матричного уравнения*

$$\Gamma\,\mathrm{B}\,\mathrm{S} \ + \ \mathrm{S}\,\mathrm{B}\,\Gamma \ - \ \mathrm{S} \ = \ \Gamma\mathrm{R}\Gamma,$$

где $\mathrm{R} \ = \ (\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2\rho) + M_\varphi^2\sigma_w^2)\mathrm{B} \ + \ \beta_\infty\mathrm{U}$ *при каком–либо* $\rho > 0$.

Если $\beta_n \equiv 1$ и $\Gamma \ = \ \mathrm{B}^{-1}$, то $\alpha_n \ = \ n^{-1}$, и последнее уравнение для матрицы S может быть легко решено:

$$\mathrm{S} \ = \ \mathrm{B}^{-1}\mathrm{R}\mathrm{B}^{-1}.$$

Для алгоритма (7), в этом случае имеющего вид

$$\hat\theta^n \ = \ \hat\theta^{n-1} \ - \ (n\mathrm{B})^{-1}\Delta_n(\varphi_n^{\mathrm{T}}\hat\theta^{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

при $\sigma_w = 0$ получаем с любым $\rho > 0$

$$\mathrm{E}\,(\hat\theta^n - \theta)(\hat\theta^n - \theta)^{\mathrm{T}} \leq n^{-1}\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2\rho)\mathrm{B}^{-1} \ + \ o(n^{-1}). \tag{9}$$

В работе [12] показано, что такой же выбор α_n и Γ является оптимальным для обыкновенного алгоритма стохастической аппроксимации:

$$\hat\theta^n = \hat\theta^{n-1} - \alpha_n\Gamma\varphi_n(\varphi_n^{\mathrm{T}}\hat\theta^{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

если $w^n = 0$ и помехи v_n являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними. При этом в работе [12] было установлено, что

$$\mathrm{E}\{\hat\theta^n - \theta)(\hat\theta^n - \theta)^{\mathrm{T}}\} \ \leq \ n^{-1}\sigma_v^2\mathrm{B}^{-1} \ + \ o(n^{-1}), \tag{10}$$

Таким образом, при $\sigma_w = 0$ и помехах $\{v_n\}$, удовлетворяющих условию **(Dii)**, для оценок алгоритма РСА (7) с $\alpha_n = 1/n$ и $\Gamma = \mathrm{B}^{-1}$ получили среднеквадратичную скорость сходимости, близкую к наилучшей в ситуации, когда помехи v_n являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними. Если $M_\varphi = 0$, то оптимальные обыкновенный и рандомизированный алгоритмы совпадают, и, кроме того, равны соответствующие асимптотические оценки скорости сходимости, хотя предположения о характере помех $\{v_n\}$ существенно различаются.

В статье [25] для решения рассматриваемой задачи при $w^n = 0$ в условиях почти произвольных помех v_n предлагалось использовать несколько отличающийся от (7) рандомизированый алгоритм стохастической аппроксимации:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - (n\mathrm{B})^{-1}\Delta_n(\Delta_n^{\mathrm{T}}\hat{\theta}^{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

для которого $\mathrm{R} \ = \ (\sigma_v + M_\varphi\theta)^2\mathrm{B}$ и, следовательно,

$$\mathrm{S} \ = \ (\sigma_v + M_\varphi\theta)^2\mathrm{B}^{-1}.$$

Сравнивая соответствующие выражения для матриц S, несложно убедиться в том, что при $M_\varphi\theta \neq 0$ алгоритм (8) дает лучшие оценки, чем предлагавшийся ранее в статье [25].

К сожалению, оптимальный РСА алгоритм (8) не применим, если матрица B априорно неизвестна. Рассмотрим рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации с усреднениями:

$$\begin{cases} \hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} \ - \ \alpha_n\Delta_n(\varphi_n^{\mathrm{T}}\hat{\theta}^{n-1} - y_n), \\ \tilde{\theta}^n = (1 - n^{-1})\tilde{\theta}^{n-1} \ + \ n^{-1}\hat{\theta}^{n-1} \left(= \ n^{-1} \ \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\theta}^i\right), \end{cases} \tag{11}$$

похожий на предложенный в работе [16] для случая помех с нулевым средним.

Теорема 4 [7]. *Если выполнены условия:*
(C') *для входов модели* $\{\varphi_n\}$,
$w^n = 0$ *и* **(Dii)** *для помех* $\{v_n\}$,
$\alpha_n \to 0$ *и* $\alpha_n/\alpha_{n+1} \ = \ 1 + o(\alpha_n)$ *при* $n \to \infty$ *для числовой последовательности* $\{\alpha_n\}$, *то для среднеквадратичной скорости сходимости оценок алгоритма (11) выполняется неравенство (9) с любым* $\rho > 0$.

Как и выше, полученная оценка сверху (9) для скорости сходимости почти совпадает с известной ранее в случае независимых помех с нулевым средним (см. [16]). При этом алгоритм (11) более простой, чем оптимальный алгоритм (8), и его асимптотическая скорость сходимости не зависит от конкретного выбора α_n, удовлетворяющего только условию $\alpha_n/\alpha_{n+1} = 1 + o(\alpha_n)$. Заметим, что последнее соотношение выполняются, например, для $\alpha_n = \alpha\, n^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, но не для $\alpha_n = \alpha\, n^{-1}$.

Замечание. Утверждения теорем 2–4 также выполняются, если предположить равенство нулю третьего центрального момента φ_n вместо симметричности распределения Δ_n. В случае равенств в предположении (2.Bii) в утверждениях теорем 3 и 4 неравенства в оценках скорости сходимости также можно заменить на равенства.

6.3. Оценки по методу наименьших квадратов

Теперь рассмотрим для той же регрессионной модели наблюдений (6)

$$y_n = \varphi_n^{\mathrm{T}}\theta^n + v_n, \quad \theta^n = \theta + w_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

оценки по рандомизированному методу наименьших квадратов (РМНК) вида

$$\begin{cases} \hat\theta^n = \hat\theta^{n-1} - \Gamma_n\Delta_n(\varphi_n^{\mathrm{T}}\hat\theta^{n-1} - y_n), \\ \Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1}\Delta_n\Delta_n^{\mathrm{T}}\Gamma_{n-1}/(1 + \Delta_n^{\mathrm{T}}\Gamma_{n-1}\Delta_n),\ \Gamma_0 = \gamma_0^{-1}\mathrm{I}, \end{cases} \tag{12}$$

где $\Delta_n = \varphi_n - \mathrm{E}\{\varphi_n\}$ и $\gamma_0 > 0$ — малое положительное число (параметр регуляризации, см. [7,10,25]). Как и выше, пусть в качестве начального значения $\hat\theta^0$ выбран произвольный неслучайный вектор из $\mathbb{R}^r$.

Теорема 5 [7,25]. *Пусть последовательность входов $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет предположению* **(C')**.

Если выполнено условие **(Di)** *для помех, то последовательность оценок, доставляемых алгоритмом (12), сильносостоятельная, т. е. $\hat\theta^n \to \theta$ при $n \to \infty$ с вероятностью единица.*

Если выполнено условие **(Diii)** *для помех и с вероятностью единица $\|\Delta_n\| \le C_\Delta < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, то среднеквадратичная ошибка оценок, доставляемых алгоритмом (12), стремится при $n \to \infty$ к нулю:*

$$\mathrm{E}\{(\hat\theta^n - \theta)(\hat\theta^n - \theta)^{\mathrm{T}}\} \to 0.$$

7. Способ обнаружения некоторых элементов химического состава мишени

Для примера рассмотрим задачу о разработке методики построения алгоритмов обнаружения *делящихся* материалов в мишени, облучаемой серией пучков элементарных частиц.

Одной из характеристик, указывающей на присутствие в мишени какого-либо делящегося материала (уран, плутоний и т. п.), является возникновение запаздывающего во времени потока нейтронов после облучения мишени релятивистским пучком электронов. На этом основана одна из основных методик инспекции подозрительных объектов "противника", при этом по изменению во времени интенсивности запаздывающего излучения можно сделать вывод о типе делящегося вещества. Если у противника есть возможность противодействия, то при использовании этой методики он может определить момент начала инспекции (засечь электронный пучок) и, имея некоторый запас во времени возникновения запаздывающего излучения, добавить к потоку запаздывающих нейронов заглушающий поток, ликвидирующий возможность инспекции.

Основная идея рассматриваемого ниже способа, использующего пробные возмущения, заключается в задании серии облучающих электронных пучков, последовательность интенсивностей каждого из которых определяется некоторым случайным процессом с задаваемыми или хорошо известными статистическими свойствами. Этот алгоритм позволяет фиксировать наличие и характеристики запаздывающего излучения нейтронов, даже несмотря на высокий уровень генерируемых противником помех.

При облучении мишени достаточно мощным по интенсивности релятивистским электронным пучком ответная реакция вещества мишени, заключающаяся в излучении потока элементарных частиц (например, нейтронов), состоит из двух частей: потока *мгновенных* частиц, наличие которого характерно для любого химического состава вещества, и потока *запаздывающих* частиц, указывающего на присутствие определенных химических элементов (уран, плутоний и т. д.). Предположим, что исследователь посылает в направлении мишени последовательность релятивистских электронных пучков. Электронная пушка начинает излучение каждого из них в некоторые моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ Мощность пушки будем считать постоянной и равной W. Экспериментатор может выбирать длительность импульсов излучения в определенных пределах либо имеет возможность точного измерения фактического времени излучения. Будем считать, что длительности излучения электронных пучков $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ представляют собой реализацию некоторой последовательности независимых, одинаково распределенных ограниченных случайных величин с известным средним значением M_φ, конечной положительной дисперсией $\sigma_\varphi^2 > 0$, нулевым третьим центральным моментом и конечным четвертым центральным моментом M_4^4. Число электронов в n-м пучке равняется

$$N_n^{\overline{e}} = W\varphi_n.$$

Последовательность $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$ будем называть пробным возмущением. Детектор (регистратор нейтронов) включается в моменты времени $t_n + \delta T_d,\ n = 1, 2, \ldots$, где δT_d — время задержки, определяемое расстояниями от мишени до инжектора (электронной пушки) и до детектора, а также средней мощностью электронного пучка. Оно должно быть достаточно большим, чтобы прошел поток мгновенных частиц. Время работы детектора δT_m одинаково для любой серии и определяется предполагаемыми свойствами вещества мишени. Обычно для уменьшения влияния потока мгновенных нейтронов и уменьшения взаимного влияния между последовательными испытаниями предполагается, что

$$t_n + \delta T_d + \delta T_m << t_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$$

Ответный сигнал, фиксируемый детектором,

$$N_n^{\overline{n}} = N_n^d + N_n^{ext},\ n = 1, 2, \ldots,$$

определяется количеством зарегистрированных запаздывающих частиц (нейтронов) N_n^d, излучаемых мишенью в ответ на электронный пучок мощности $N_n^{\overline{e}}$, и регистрируемыми внешними частицами N_n^{ext} (помехами в наблюдении), количество которых определяется мощностью фонового космического излучения (солнечный ветер и т. п.) и возможным противодействием противника, мешающего исследованию.

Заметим, что в такой постановке задачи мы не можем предварительно что-либо существенное утверждать о статистических свойствах помех в наблюдении N_n^{ext} (среднее значение, свойства распределения) и, соответственно, нельзя воспользоваться методами оценивания, опирающимися на них. Но кажется вполне обоснованной возможность сделать предположения о независимости количества внешних частиц от пробного возмущения и ограниченности их потока в среднеквадратическом смысле: $\mathrm{E}\{(N_n^{ext})^2\} \leq \sigma_{ext}^2$.

Количество регистрируемых детектором запаздывающих частиц (нейтронов) прямо пропорционально мощности соответствующего электронного пучка:

$$N_n^d = \tau^n N_n^{\overline{e}} = \tau^n W \varphi_n$$

(см. [9,20]). Величины τ^n $(0 \leq \tau^n \leq \tau_{\max})$ определяются эффективностью регистрации частиц, которая зависит от типа используемого детектора, величины телесного угла с вершиной в точке попадания электронного пучка в мишень и опирающегося на полезную площадь детектора (эти величины можно считать постоянными при серии испытаний или достаточно точно рассчитываемыми), угла между направлением распространения электронного пучка и нормалью к поверхности мишени в точке попадания (эту характеристику точно учесть сложнее) и некоторой статистической величиной, определяемой химическим составом вещества мишени. Последняя характеристика принципиально не может быть заранее точно рассчитана, но ее вероятностное распределение для различных веществ хорошо изучено. Можно считать, что она, как случайная величина, не зависит от пробного возмущения. (Только в случае отсутствия в материале мишени делящегося вещества $\tau^n = 0$.) Будем считать $\{\tau^n\}$ последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин со средним значением M_τ и дисперсией σ_τ^2. Обозначив через $y_n = N_n^d$, $\theta^n = \tau^n W$, $v_n = N_n^{ext}$, $\theta = M_\tau W$ и $w^n = (\tau^n - M_\tau)W$, получаем соотношения для последовательности наблюдений

$$y_n = \varphi_n \theta^n + v_n, \quad \theta^n = \theta + w^n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Задача об обнаружении делящегося вещества в мишени свелась к построению последовательности оценок среднего значения параметра линейной регрессии. Во второй главе было показано, что при сделанных выше предположениях для ее решения можно обоснованно воспользоваться или алгоритмом стохастической аппроксимации (7), или (11), или рандомизированным методом наименьших квадратов (12). Алгоритм стохастической аппроксимации (7) с $\alpha_n\Gamma = 1/(\sigma_\varphi^2 n)$ при введенных обозначениях имеет вид

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\varphi_n - M_\varphi}{\sigma_\varphi^2 n}(\varphi_n\hat{\theta}^{n-1} - N_n^d), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если последовательность оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ сходится к нулю, то можно достоверно утверждать, что запаздывающего излучения из мишени нет и, следовательно, в составе химического вещества мишени отсутствуют уран, плутоний и т. п.. Если оценки сходятся к некоторому числу $\theta > 0$, то запаздывающее излучение присутствует, и число θ некоторым образом связано с его мощностью. При дополнительных расчетах (см. [9,20] можно дать ответ и о конкретном типе вещества в зависимости от величины θ. В реальной практике можно рассчитывать только на получение конечной выборки наблюдений. Предположим, что после $n_\star$ наблюдений последовательность оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ стабилизировалась и становится отделенной от нуля некоторой величиной $\bar{\theta}$, т. е. при $n \geq n_\star$

$$\hat{\theta}^n \geq \bar{\theta} > 0.$$

Если в результате серии из n экспериментов принимается гипотеза о том, что

$$M_\tau W \geq \frac{\bar{\theta}}{2} > 0,$$

то при сделанных выше предположениях из результата теоремы 3 и неравенства Чебышева (см. [18]) следует оценка

$$\mathbf{P}\left\{M_\tau W < \frac{\bar{\theta}}{2}\right\} \leq \mathbf{P}\left\{|\hat{\theta}^n - M_\tau W| \geq \frac{\bar{\theta}}{2}\right\} < \frac{\sigma_{ext}^2 + \sigma_\tau^2 W^2(M_\varphi^2 + \frac{M_4^4}{\sigma_\varphi^2})}{n(\bar{\theta}/2)^2\sigma_\varphi^2} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

показывающая, в частности, зависимость вероятности принятия неправильной гипотезы от количества итераций.

8. Результаты имитационного моделирования

Рассмотрим задачу об обнаружении (детектировании) скалярного полезного сигнала $\{\varphi_n\}$, который может быть попадает, а может быть и нет в зашумленный канал наблюдения (измерения производятся с "почти произвольными" помехами). В задачах обнаружения сигнала оцениваемая величина θ обычно принимает конечное число значений и часто представляет из себя характеристику типа "да — нет". Будем считать, что $\{\theta = 1\}$ соответствует наличию сигнала в детекторе, а $\{\theta = 0\}$ — его отсутствию. С учетом вышесказанного, наблюдаемые величины $\{y_n\}$ можно представить в виде

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{v_n\}$ — почти произвольные помехи в наблюдении: $|v_n| \leq C_v, \; n = 1, 2, \ldots$, которые, в частности, может быть задаются неизвестной ограниченной детерминированной функцией. Если помехи наблюдения являются случайными величинами, то будем считать их независимыми с полезным сигналом и имеющими равномерно ограниченные вторые моменты.

Предположим, что полезный сигнал ограничен и имеет статистическую природу, представляя собой последовательность известных независимых между собой случайных величин со средним значением M_φ и ограниченными вторым и четвертым статистическими моментами. Обозначим $\sigma_\varphi^2 > 0$ — дисперсию случайных величин φ^n. В том случае, когда центрированные случайные величины $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$ имеют симметричное распределение, выполнены все условия теорем 2–5 и для построения последовательности состоятельных оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ величины θ можно воспользоваться любым из алгоритмов стохастической аппроксимации (7), или (11) или РМНК (12), выбрав в качестве начального приближения $\hat{\theta}^0 = 0$.

Для решения задачи об обнаружении сигнала можно задать некоторое пороговое значение $\delta > 0$, например, $\delta = 1/2$. В качестве решающего правила в момент времени n, определяющего выбор гипотезы о наличии полезного сигнала в канале наблюдения или об его отсутствии, можно задать операцию сравнения величины текущей оценки с пороговым значением δ. Если $\hat{\theta}^n < \delta$, то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*.

Рассмотрим алгоритм стохастической аппроксимации (7) с $\alpha_n \Gamma = \frac{1}{\sigma_\varphi^2 n}$:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\varphi_n - M_\varphi}{\sigma_\varphi^2 n}(\varphi_n \hat{\theta}^{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

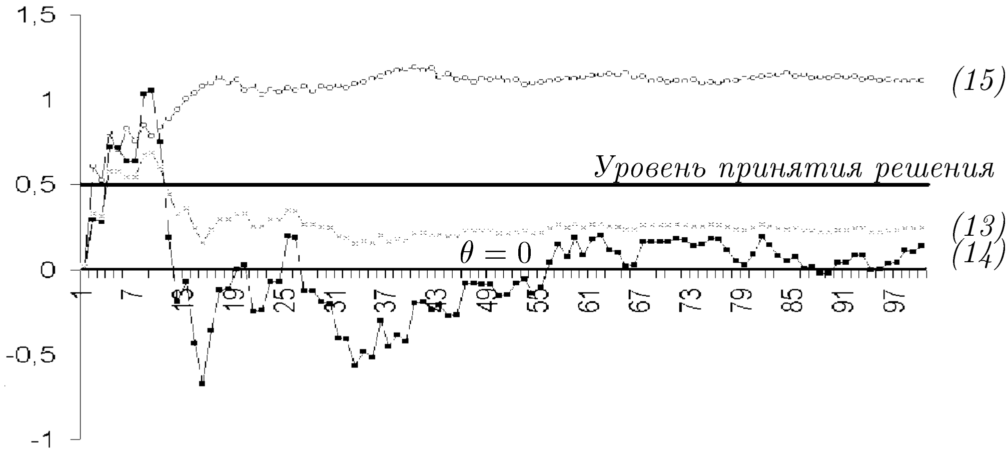

Рис. 1. Оценки МНК, РСА и РМНК при отсутствии сигнала.

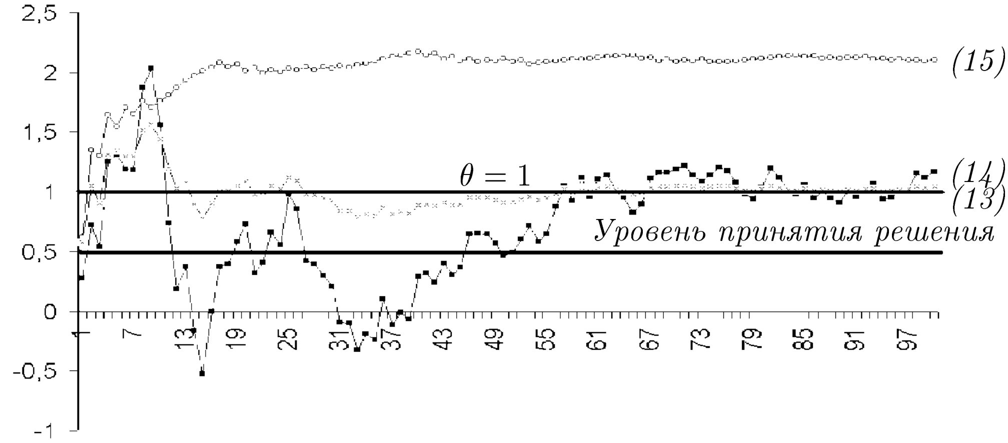

Рис. 2. Оценки МНК, РМНК и РСА при наличии сигнала.

Вероятность принятия неправильного решения можно оценить с помощью неравенства Чебышева (см. [18]), применив его к результату теоремы 3 об оценке среднеквадратичной скорости сходимости. Для любого n имеем

$$\mathbf{P}\{|\hat{\theta}^n - \theta| \geq \delta\} = \mathbf{P}\{|\hat{\theta}^n - \theta|^2 \geq \delta^2\} \leq \frac{\mathrm{E}\{|\hat{\theta}^n - \theta|^2\}}{\delta^2} < \frac{1}{n}\frac{C_v^2}{\delta^2\sigma_\varphi^2} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Отсюда несложно получить оценку для количества итераций, необходимых для принятия решения с той или иной степенью уверенности.

Для иллюстрации работоспособности предложенных рандомизированных алгоритмов (РСА, РМНК) и сравнения получаемых оценок при "плохих" помехах с оценками обыкновенного МНК была проведена серия экспериментов на ЭВМ. Приведем один типичный результат сравнительного моделирования работы алгоритмов (13), РМНК

$$\begin{cases} \hat\theta^n = \hat\theta^{n-1} - \Gamma_n(\varphi_n - M_\varphi)(\varphi_n \hat\theta^{n-1} - y_n), \ \hat\theta^0 = 0, \\ \Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1}^2(\varphi_n - M_\varphi)^2}{1+\Gamma_{n-1}(\varphi_n - M_\varphi)^2}, \ \Gamma_0 = 0.99^{-1}, \end{cases} \tag{14}$$

и обыкновенного регуляризованного МНК

$$\hat\theta^n \ = \ \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k y_k}{\sum_{k=1}^n \varphi_{k^2} + (0.99)^{-1}}. \tag{15}$$

Полезный сигнал $\{\varphi_n\}$ был выбран равномерно распределенным на интервале $[0.5, 1.5]$ и наблюдался на фоне неизвестной, но ограниченной детерминированной функции $|v_n| \le C_v = 2$ со средним значением больше единицы. Для экспериментатора среднее значение помехи неизвестно, в рассматриваемом примере оно вполне могло быть и меньше минус единицы.

Если выбрать уровень принятия решения $\delta = 0.5$, то для вероятности принятия ошибочного решения по оценкам алгоритма (13) теоретический анализ дает: $\mathbf{P}\{ \text{"ошибки"} \} \le \frac{48}{n} C_v^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Рис. 1 и 2 показывают траектории последовательного изменения оценок для трех алгоритмов. Уровень помехи настолько высок, что оценки обыкновенного МНК почти всегда превышают уровень принятия решения вне зависимости от наличия или отсутствия сигнала, в то время как после 50 итераций рандомизированные алгоритмы дают правильные ответы. Скорость их сходимости оказалась выше теоретически предсказанной, так как, наверное, в примере рассматривалась не самая плохая последовательность помех.

9. Заключение

Замечательной особенностью рассмотренных в работе рандомизированных алгоритмов СА является сохранение их простоты, работоспособности высокой скорости сходимости при росте размерности вектора оцениваемых параметров. Так как при этом не растет необходимое для каждой итерации количество измерений, то важным дальнейшим шагом в развитии может стать применение этих алгоритмов в системах с бесконечномерными измерениями и распределенными параметрами. На взгляд автора, замена в многомерном случае большого количества конечно-разностных аппроксимаций градиента целевой функции всего на одно или два измерения в случайно выбираемых точках на интуитивном уровне кажется гораздо более близкой к модели поведения высокоорганизованных живых систем. Наверное, такого типа алгоритмы более естественно использовать при конструировании систем "искусственного интеллекта".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 223 с.

2. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972. 295 с.

3. *Граничин О.Н.* Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе для идентификации статического нестационарного дискретного объекта // Вестник Ленингр. ун-та, сер. 1. 1988. В. 3. С. 92–93.

4. *Граничин О.Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та, сер. 1. 1989. В. 1. С. 19–21.

5. *Граничин О.Н.* Процедура стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика. 1992. N 2. С. 97–104.

6. *Граничин О.Н.* Оценивание точки минимума неизвестной функции, наблюдаемой на фоне зависимых помех // Проблемы передачи информации. 1992. N 2. С. 16–20.

7. *Граничин О.Н.* Оценивание параметров линейной регрессии при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2002. N 1, С. 30–41.

8. *Граничин О.Н.* Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2002. N 2, C. 44–55.

9. *Колесников Е.К., Курышев А.П., Мануйлов А.С.* Активный дистанционный рентгеноспектральный анализ поверхностных пород небесных тел // Методы рентгеноспектрального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. С. 85–93.

10. *Льюнг Л., Седерстрем Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 431 с.

11. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.

12. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, устойчивость) // Автоматика и телемеханика. 1979. N 3. С. 71–84.

13. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.

14. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Градиентные методы стохастической оптимизации // Измерения, контроль, автоматизация. 1989. N 3. С. 50–54.

15. *Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. N 2. С. 45–53.

16. *Поляк Б.Т.* Новый метод типа стохастической аппроксимации // Автоматика и телемеханика. 1990. N 7. С. 98–108.

17. *Фельдбаум А.А.* О проблемах дуального управления // Методы оптимизации автоматических систем. М.: Наука, 1972. С. 89–108.

18. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 574 с.

19. *Alspector J., Meir R., Jayakumar A., Lippe D.* A parallel gradient descent method for learning in analog VLSI neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems 5. Hanson S.J., Cowan J.D.,

Lee C. eds. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1993. P. 834–844.

20. APS Study: Science and technology of directed energy weapons // Rev. Mod. Phys. July 1987. V. 59. N 3. Part II.

21. *Blum J.R.* Multidimensional stochastic appoximation // Ann. Math. Statist. 1954. V. 9. P. 737–744.

22. *Chen H.F., Duncan T.E., Pasik–Duncan B.* A Kiefer–Wolfowitz algorithm with randomized differences // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44. N 3. P. 442–453.

23. *Fabian V.* Stochastic approximation of minima with improved asymptotic speed // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 191–200.

24. *Fisher R.A.* The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.

25. *Goldenshluger A.V., Polyak B.T.* Estimation of regression parameters with arbitrary noise // Mathematical Methods of Statistics. 1993. V. 2. N 1. P. 18–29.

26. *Guo L., Ljung L., Wang G-J.* Necessary and sufficient conditions for stability of LMS // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42, N 6. P. 761–770.

27. *Kiefer J., Wolfowitz J.* Statistical estimation on the maximum of a regression function // Ann. Math. Statist. 1952. V. 23. P. 462–466.

28. *Ljung L., Guo L.* The role of model validation for assessing the size of the unmodeled dynamics // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42, N 9. P. 1230–1239.

29. *Maeda Y., Kanata Y.* Learning rules for reccurent neural networks using perturbation and their application to neuro–control // Transactions of IEE of Japan. 1993. V. 113–C. P. 402–408.

30. *Polyak B.T., Tsybakov A.B.* On stochastic approximation with arbitrary noise (the KW case) / Topics in Nonparametric Estimation. Khasminskii R.Z. eds. // Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc. Providence. 1992. N 12. P. 107–113.

31. *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22. P. 400–407.

32. *Spall J.C.* Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. V. 37. P. 332–341.