Математические заметки

том 49 выпуск 5 мая 1991

РЕДУКЦИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ К ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМ И СВЯЗНОСТИ В ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

А. М. Вершик, О. А. Грановина

1. Введение. *Неголономной вариационной задачей* на многообразии с заданным распределением, т. е. на неголономном многообразии, называется вариационная задача на классе кривых, касающихся распределения. Если распределение интегрируемо, то задача сводится к обычной вариационной проблеме с теми или иными краевыми или начальными условиями. Если же распределение неинтегрируемо, например, абсолютно неголономно, то мы имеем общую задачу Лагранжа, в которой множители Лагранжа, вообще говоря, зависят от времени. Попытки свести эту задачу к безусловной вариационной задаче неоднократно предпринимались (в основном в прикладных работах), но точных формулировок до сих пор как будто бы не было. Далее мы покажем, как для некоторых неголономных распределений, а именно горизонтальных распределений связности в главном или присоединенном расслоениях, проблему можно свести к изопериметрической задаче, тем самым сократив число условий до конечного числа. Связь между двумя задачами может использоваться в обоих направлениях, в частности, классические изопериметрические задачи приобретают новый смысл. Здесь мы ограничимся случаем главных расслоений, однако схема может быть использована в общем случае. А именно, фактически от неголономного распределения требуется лишь инвариантность относительно группы, орбиты действия которой трансверсальны распределению. В приложениях этот случай встречается очень часто, в частности, в задачах на неголономных группах Ли, которые рассматриваются далее. Под *изопериметрической задачей* мы имеем в виду вариационную задачу на множестве кривых данной гладкости (с теми или иными начально-краевыми условиями) к образующем многообразие *конечной* коразмерности в пространстве всех кривых. Число множителей Лагранжа в этих задачах — конечно.

В п. 2 мы формулируем неголономную вариационную задачу и некоторую изопериметрическую задачу и показываем их эквивалентность. Одновременно формулируются соответствующие за-

дачи Коши, что необходимо для построения неголономных геодезических потоков. В п. 3 изучается групповой случай. Соответствующие задачи на группе Гейзенберга и группе Энгеля (примеры нильпотентных групп) рассматриваются в п. 4. Особенно интересен случай группы Энгеля, для которого уравнения Эйлера — Лагранжа интегрируются в эллиптических функциях.

2. Теорема об эквивалентности. Пусть $P \xrightarrow{\pi} B$ — главное расслоение, слой которого — группа Ли H, $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли. Зададим связность в P. Пусть ω — $\mathfrak{h}$-значная базовая форма связности, $\tilde{\omega}$ — соответствующая ей форма связности в TP, ∇ — оператор ковариантного дифференцирования. Через Π_γ будем обозначать операцию параллельного переноса слоя главного расслоения P над начальной точкой кривой γ из B в слой над конечной точкой кривой γ; Π_γ есть элемент группы H (точнее элемент группы голономии). В дальнейшем рассматриваем случай, когда связность полна, т. е. группа голономии совпадает с H. Иначе это можно выразить так: горизонтальное распределение связности $Z \subset TP$ является абсолютно неголономным; по теореме Рашевского — Чжоу [1] это означает, что любые две точки из P (достаточно требовать лишь для точек одного слоя) можно соединить горизонтальной кривой. Будем считать, что на горизонтальном подпространстве задана финслерова (риманова) метрика или в более общем случае — на Z определен лагранжиан $\mathcal{L}$, который задает функционал действия

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int_\gamma \mathcal{L}.$$

Задача I (неголономная вариационная задача). Найти экстремали функционала $\mathcal{S}$ на множестве горизонтальных кривых с данными концами.

Это задача Лагранжа с бесконечным числом условий, поскольку требуется, чтобы в каждой точке вектор скорости искомой кривой принадлежал горизонтальному подпространству в данной точке.

Сформулируем соответствующую задаче I задачу Коши.

Для этого введем смешанное расслоение $\operatorname{Ker} Z = Z \oplus Z^\perp$ (см. [3]), где $Z^\perp \subset T^*P$. Будем интерпретировать (см. [2, с. 330], [3]) подрасслоение $Z^\perp$ как пространство множителей Лагранжа. Зададим начальные условия следующим образом: $p \in P$ — начальная точка, $z \in Z$ — допустимый вектор из T_pP, $\lambda \in Z^\perp$ — начальное значение множителей Лагранжа.

Задача Ia. Построить поле горизонтальных экстремалей функционала $\mathcal{S}$ в смешанном расслоении $\operatorname{Ker} Z$.

Если перейти к кокасательному расслоению T^*P, то соответствующий поток в задаче Ia является гамильтоновым.

Предположим теперь, что лагранжиан $\mathcal{L}$ инвариантен относительно послойного действия группы H в P, тогда его можно рассматривать как функционал на базе. Обозначим его той же буквой $\mathcal{L}$, а соответствующий функционал действия через $\mathcal{S}$.

Рассмотрим изопериметрическую задачу.

Задача II. Найти кратчайшую в смысле метрики (экстремаль — в общем случае) кусочно-гладкую кривую γ: $[0, 1] \to B$ на базе B, параллельный перенос вдоль которой переводит заданным образом слой над начальной точкой кривой γ в слой над конечной точкой $\gamma(1)$, т. е.

$$\Pi_\gamma \gamma(1) = g, \quad g \in \pi^{-1}(\gamma(1)). \tag{1}$$

Это условие можно описать более явным образом в групповом случае (см. ниже). Можно сказать, что ищется кратчайшая кривая в «данном классе голономии». Задача II является изопериметрической в вышеуказанном смысле, поскольку число условий на кривую, определяемые классом голономии, конечно.

Напомним (см. [4, с. 69]), что лифт кривой γ из базы B — это единственная горизонтальная кривая $\tilde{\gamma} = L\gamma$ в P, начинающаяся в заданной точке и такая, что $\pi\tilde{\gamma} = \gamma$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Множество лифтов экстремалей в задаче* II *совпадает с множеством экстремалей задачи* I.

Доказательство. Напишем уравнения Эйлера — Лагранжа для обеих задач и сравним их. Сначала рассмотрим задачу II и составим для нее функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(\lambda) = \mathscr{L}(\dot{\tilde{\gamma}}) - \langle \lambda, \omega(\dot{\tilde{\gamma}}) \rangle = \mathscr{L}(\dot{\tilde{\gamma}}) + a_\lambda(\dot{\tilde{\gamma}}),$$

где λ: $Z \to \mathfrak{g}^*$ ($\mathfrak{g}^*$-значная форма на Z), a_λ - 1-форма, линейно зависящая от λ. Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\mathscr{Z}(\dot{\tilde{\gamma}}) = [(\mathrm{d}a_\lambda)_x]^T \lfloor \dot{\tilde{\gamma}} = \langle \dot{\tilde{\gamma}}, \mathrm{d}_x a_\lambda \rangle, \tag{2}$$

где $\mathscr{Z}$ — дифференциальный оператор Эйлера — Лагранжа безусловной задачи. При фиксированных начальных условиях λ находится из условий на правом конце кривой.

Напишем уравнение Эйлера — Лагранжа для задачи I:

$$\mathscr{Z}(\dot{\tilde{\gamma}}) = [(\mathrm{d}\bar{a}_\lambda)_x]^T \lfloor \dot{\tilde{\gamma}} = \langle \dot{\tilde{\gamma}}, \mathrm{d}_x \bar{a}_\lambda \rangle, \tag{3}$$

где $\bar{a}_\lambda(\dot{\tilde{\gamma}}) = \langle \lambda, \tilde{\omega}(\dot{\tilde{\gamma}}) \rangle$.

Рассмотрим правую часть (3). По свойствам главного расслоения (см. [4, с. 70]) можно выбрать некоторое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы B: $\forall \pi^{-1}(U_\alpha)$ $\exists$ изоморфизм j_α: $x \mapsto (\pi(x), q_\alpha(x))$ на $U_\alpha \times H$. Зададим соответствие между кривыми в базе B и кривыми в расслоении P следующим образом. Пусть γ — кривая в B, тогда поставим ей в соответствие кусочно-гладкую кривую $\tilde{\gamma}$ в P: $\tilde{\gamma}(t) = j_\alpha^{-1}(\gamma(t), e)$, $\forall t$: $\gamma(t) \in U_\alpha$. По построению кривой $\tilde{\gamma}$ имеем $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Так как $\tilde{\gamma} = L\gamma$ — горизонтальная кривая, то в пространстве TP

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\tilde{\gamma}} + v\dot{\tilde{\gamma}}, \tag{4}$$

где $v\dot{\tilde{\gamma}}$ — вертикальная составляющая векторного поля $\dot{\tilde{\gamma}}$ (см. [4, с. 68], [5, с. 321]). Заметим, что в силу выбора ω, $\tilde{\omega}$ и ла-

гранжиана $\mathscr{L}$

$$\bar{a}_\lambda(\dot{\bar{\gamma}}) = a_\lambda(\dot{\gamma}), \tag{5}$$

$$[(\mathrm{d}\,\bar{a}_\lambda)_x]^{\mathrm{T}} \lfloor v\dot{\bar{\gamma}} - \langle v\dot{\bar{\gamma}}, \mathrm{d}_x\bar{a}_\lambda\rangle = 0.$$

Подставив (4) в (3), учитывая (5), получаем, что правая часть (3) совпадает с правой частью (2). Таким образом, получили, что уравнения (2) и (3) совпадают.

Обратим внимание на то, что множители Лагранжа в задаче I в действительности постоянны (точнее H-инвариантны), что и позволяет редуцировать задачу I к задаче II. Теорема доказана.

Полезно сформулировать задачу Коши, соответствующую задаче II.

Задача IIa. Построить поле экстремалей функционала $\mathscr{F}$ в классе кривых на B с начальными условиями: $u \in B$ — начальная точка, $l \in T_uB$ — начальный вектор скорости, и дополнительным начальным условием

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\,|_{t=0} = h_{\gamma(0)},$$

где h — сечение расслоения $P \xrightarrow{\pi} B$. Поле экстремалей функционала $\mathscr{F}$ зависит от выбора сечения h. Меняя h, можно получить все экстремали задачи II. Связь между задачами Ia и IIa описывается теоремой, аналогичной приведенной выше.

3. Групповой случай. Пусть G — группа Ли размерности n, H — ее замкнутая подгруппа ($\dim H = n - p$), $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы G. Рассмотрим $\mathfrak{H} = T_eH$.

Определим главное расслоение G над группой H:

$$G \xrightarrow[\pi]{H} G/H = B, \tag{6}$$

где π — каноническая проекция. Для простоты считаем, что расслоение тривиализуемо. Зафиксируем тривиализацию и обозначим через i отображение $i: B \to G$, $i(z) = (z, e)$. Введем в расслоении связность следующим образом. Пусть $\omega: TB \to \mathfrak{H}$ — базовая форма связности на B. Обозначим $\tilde{\omega}_g$ ее поднятие в точку $g \in G$. Тогда $\operatorname{Ker} \tilde{\omega}_g = Z_g$ — горизонтальное подпространство в точке g. Заметим, что в общем случае форма связности не является левоинвариантной, например, для группы Энгеля это не так.

Пусть на B задана риманова (или в общем случае финслерова) метрика $\|\cdot\|$. Определим неголономную метрику $\hat{\rho}$ на G, порожденную $\|\cdot\|$ [2, с. 329], [3].

Задача I′ (о неголономной геодезической). Пусть g_0, $g_1 \in G$. Найти кратчайшую относительно метрики $\hat{\rho}$ горизонтальную кривую в G, соединяющую точки g_0 и g_1.

Не умаляя общности, считаем, что $g_0 = e$, $g_1 = g$.

Детализируя рассуждения п. 2, запишем явно условие (1) в формах. Будем считать, что H вложено в G, в силу выбора тривиализации расслоения. Пусть $\omega(t)$ — кривая в структурной

группе H: $w(0) = e$, тогда уравнение (1) принимает вид (см. [4, с. 73])

$$w^{-1}(t)\,\dot{w}(t) = -\omega(\dot{\gamma}(t)), \qquad \Pi_\gamma = w(1), \tag{7}$$

(уравнение Маурера — Картана или уравнение логарифмической производной). Его интегрирование с начальным условием $u \equiv B$ даст образ u при параллельном переносе. По теореме п. 2 задача I эквивалентна следующей изопериметрической задаче.

Задача II′. Найти кратчайшую кривую γ в B в смысле метрики $\|\cdot\|$, соединяющую точки e и $u = \pi(g)$, при изопериметрическом условии (7).

Сделаем переход от задачи II′ к соответствующей задаче Коши в B.

Задача IIa′. На многообразии B с римановой метрикой $\|\cdot\|$ найти

$$\inf \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt,$$

среди всех кривых γ: $[0, 1] \to B$, $\gamma(0) = e$, $\dot{\gamma}(0) = f$, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\,|_{t=0} = h \in \mathfrak{h}$.

Если предположить, что начальный вектор ускорения $h = 0$ (в случае римановой метрики), то решение задачи IIa′ есть геодезическая, при общем h соответствующий класс кривых, исходящих из нуля, будем называть псевдогеодезическими.

Для решения задачи II′ составим функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(\lambda) = \|\dot{\gamma}\| + \langle\lambda, \omega(\dot{\gamma})\rangle.$$

Тогда уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид: $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = l_\lambda(\dot{\gamma})$, где l_λ — семейство скалярных форм на B, линейно зависящих от множителей Лагранжа λ (уравнение движения в магнитном поле). Здесь λ находятся из начальных условий и условий (7).

4. Примеры интегрируемых задач.

4.1. Группа Гейзенберга. Пусть N — трехмерная группа Гейзенберга. Рассмотрим ее алгебру Ли, которую можно реализовать векторными полями в $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Определим главное расслоение $N \simeq \mathbb{R}^3$ над группой $[N, N] \simeq \mathbb{R}$:

$$N \xrightarrow[\pi]{[N,\,N]} N\,|_{[N,\,N]} = B.$$

Введем на этом расслоении связность. Горизонтальным пространством в точке $g \in N$ будем считать $Z_g = \mathrm{Lin}\,\{e_1, e_2\}$. Эта

связность левоинвариантная, так как $[N, N] Z \subset Z [N, N]$. Пусть на пространство B введена риманова метрика. Сформулируем для данного случая задачи I и II.

I (на группе N). Найти кривую $\gamma = (x_1, x_2, x_3)$, реализующую

$$\inf \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\, dt,$$

при условиях

$$x_i(0) = 0, \quad x_i(1) = x_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \dot{x}_3 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1).$$

II (на множестве B). Найти кривую $\gamma = (x_1, x_2)$, реализующую

$$\inf \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\, dt,$$

при условиях

$$\int_0^1 (\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1)\, dt = x_3, \tag{8}$$

$$x_i(0) = 0, \quad x_i(1) = x_i, \quad i = 1, 2.$$

Задачи I и II эквивалентны, их решения можно найти в [2] (с. 334). Заметим, что форма в (8) есть форма площади, поэтому (8) — условие сохранения площади, ограниченной кривой γ и отрезком, соединяющим начальную и конечную точки. Поэтому задача I свелась к классической изопериметрической задаче на B. Для метрики вида $\|\dot{\gamma}\| = |\dot{x}_1| + |\dot{x}_2|$ формулы для экстремалей получены в работах [6], [7]. В [8] рассмотрены соответствующие задачи для многомерной группы Гейзенберга. Для произвольной метабелевой группы Ли задачи I и II приведены в [9].

4.2. Группа Энгеля. Пусть $\mathfrak{A}$ — четырехмерная нильпотентная алгебра Ли с базисом $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, двумя образующими ξ_1, ξ_2 и порождающими соотношениями $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$, $[\xi_2, \xi_3] = \xi_4$, остальные скобки равны нулю. Для этой группы решения задач I и II записываются с помощью эллиптических функций.

Базису можно сопоставить векторные поля

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$\xi_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \xi_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Группа Ли G алгебры $\mathfrak{A}$ — это множество верхнетреугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c & d \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

Рассмотрим главное расслоение

$$G \xrightarrow[\pi]{H} G/H = B,$$

где H — группа, порожденная матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c, d) \in \mathbb{R}^2.$$

Введем связность на главном расслоении, приняв в качестве горизонтального подпространства в точке $g \in G$ $Z_g = \mathrm{Lin}\,\{\xi_1, \xi_2\}$. Считаем, что на B введена евклидова метрика. Рассмотрим две эквивалентные задачи.

I. В пространстве G найти кривую $\tilde{\gamma}$, реализующую

$$\inf\left\{\int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}\|\,dt:\ \tilde{\gamma}(0) = 0,\ \tilde{\gamma}(1) = (x_i)_{i=1}^4,\ \dot{\tilde{\gamma}} \in Z\right\}.$$

II. В пространстве B найти кусочно гладкую кривую $\gamma = (x_1, x_2)$, реализующую

$$\inf\left\{\int_0^1 \|\dot{\gamma}\|\,dt:\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = (x_1, x_2),\right.$$
$$\left.\int_\gamma x_1\,dx_2 = x_3,\quad \int_\gamma x_1 x_2\,dx_2 = x_4\right\}.$$

Определяя константы $\lambda_1, \lambda_2, a, b$ $(a > b)$ соответствующим образом по краевым условиям, в результате решения получаем:

$$y_1 = (|b| - |a|/2 + a/2)\,E(\mathrm{am}(u), k) - |a|\,u + (b + |a|)\,t/2,$$

$$y_2 = \begin{cases} \sqrt{|b|}\,\mathrm{cn}(u) & \text{при } a \geq 0, \\ \pm\sqrt{(|b| - |a|)\,\mathrm{cn}^2(u) + |a|} & \text{при } a < 0, \end{cases}$$

где

$$k = \frac{\sqrt{|b|} - \sqrt{a/2 - |a|/2}}{\sqrt{|b|} + \sqrt{a/2 - |a|/2}},$$

$$u = \mp K(k) \pm \frac{\sqrt{|b|}\,\sqrt{+a/2 + |a|/2}}{2\sqrt{2}}\left(t - \sqrt{a/2 + |a|/2}\right).$$

Здесь использованы обозначения для эллиптического интеграла второго рода $E(\varphi, k)$, полного эллиптического интеграла первого рода $K(k)$, эллиптического косинуса $\mathrm{cn}(u)$ и амплитуды $\mathrm{am}(u)$. Связь между параметрами a и b устанавливается из начального условия $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Решение задачи II x_1 и x_2 задаются соотношениями

$$x_1 = y_1/2\lambda_2, \quad x_2 = (y_2 - y_2(0))\,\lambda_2.$$

Для того чтобы выписать решение задачи 1, необходимо воспользоваться равенствами:

$$x_3(t) = \int_0^t x_1 \dot{x}_2 \, dt = \frac{y_1 y_2}{2\lambda_2^2} - \int_0^t \frac{y_2^2 + (a+b)\, y_2/2}{2\lambda_2^2} \, dt,$$

$$x_4(t) = \int_0^t x_1 x_2 \dot{x}_2 \, dt = -\lambda_2 x_3/\lambda_2 = \frac{y_1 y_2^2}{4\lambda_2^3} - \int_0^t \frac{y_2^3 - (a-b)\, y_2^2/2}{4\lambda_2^3} \, dt.$$

Задача для общих групп Ли степени нильпотентности 3 приведена в [9]. При этом условия (7) переписываются в виде условий на сохранение некоторых площадей и объемов.

Ленинградский государственный университет

Поступило 15.02.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. 1938. Т. 3, № 2. С. 83—94.

[2] Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные задачи и геометрия распределений // Дополнение к русскому переводу книги: Гриффитс П. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М.: Мир, 1986.

[3] Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987.— С. 1—91.

[4] Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1.— М.: Наука, 1981.

[5] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.

[6] Граничина О. А. Сфера на группе Гейзенберга для неголономной полисистемы // Новое в глобальном анализе: Топологические и геометрические методы анализа. Воронеж, 1989. С. 141—146.

[7] Кираллова Л. С. Нериманова метрики и принцип максимума // Докл. АН УзбССР. 1986. № 7. С. 9—11.

[8] Граничина О. А. Кратчайшие на многомерной группе Гейзенберга. Деп. в ВИНИТИ. № 6862-В89.

[9] Вершик А. М., Граничина О. А. Неголономные вариационные задачи в расслоениях и изопериметры. Деп. в ВИНИТИ, № 1390.