УДК

К. С. АМЕЛИН, О. Н. ГРАНИЧИН

ВОЗМОЖНОСТИ РАНДОМИЗАЦИИ В АЛГОРИТМАХ ПРЕДСКАЗАНИЯ КАЛМАНОВСКОГО ТИПА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВНЕШНИХ ПОМЕХАХ В НАБЛЮДЕНИИ

Рассматривается задача предсказания значений случайного процесса, при которой предполагается, что порождающие исследуемый процесс неопределенности имеют статистическую природу, а наблюдения производятся с неизвестными, но ограниченными помехами. Предлагается рандомизированный алгоритм, отфильтровывающий произвольные внешние помехи в наблюдении. Работоспособность нового алгоритма при нерегулярных помехах в наблюдениях иллюстрируется примерами имитационного моделирования в сравнении с традиционными подходами.

Введение

Любая модель никогда не бывает совершенным описанием реальной системы. Очень важно определить в моделе те пределы, при которых моделью еще можно пользоваться. Разработка методов и процедур анализа качества моделей – центральный вопрос в идентификации систем [1, 2].

Задача предсказания значений случайного процесса, порождаемого белым шумом, пропущенным через линейный фильтр, является наиболее типичной для калмановской фильтрации. Изучение случая наблюдений со статистическими погрешностями восходит к пионерским работам Калмана и Бьюси и к настоящему времени представляется вполне законченным. Наряду со статистическими развиваются и минимаксные постановки задач, в которых о неопределенностях предполагается только ограниченность в каком-либо смысле, а в остальном они могут быть произвольными. В таких постановках при априорной известности уровня возмущений обычно удовлетворяются получением предсказаний в виде множеств, у которых размеры стабилизируются с течением времени [3–10]. При этом фактически не рассматриваются возможности получения обоснованных точечных оценок. Дальнейшее практическое использование оценок-множеств ведет к сложным задачам робастной устойчивости.

В статье рассматривается смешанная постановка задачи, при которой предполагается, что порождающие исследуемый процесс $\{\theta^n\}$ неопределенности $\{w^n\}$ имеют статистическую природу

$$\theta^{n+1} = A\theta^n + w^{n+1},$$

а наблюдения $\{y_n\}$ производятся с неизвестными, но ограниченными внешними помехами $\{v_n\}$

Амелин Константин Сергеевич. Аспирант Санкт-Петербургского государственного университета.

Граничин Олег Николаевич. Профессор Санкт-Петербургского государственного университета, доктор физико-математических наук.

$$y_n = \varphi_n^{\mathrm{T}} \theta^n + v_n.$$

Сложность проблемы фильтрации в этом случае часто обусловлена недостаточной вариативностью последовательности наблюдений. Классическая теория калмановской фильтрации хорошо развита для случая помех наблюдения с известными «хорошими» статистическими свойствами (независимость, центрированность и т. п.). При этом последовательность «входов» (регрессоров) $\{ \varphi_n \}$ в модели наблюдения обычно предполагается детерминированной.

Для «обогащения» последовательности наблюдений (повышения их вариативности) в работах [11, 12] предложено выбрать процесс получения данных с использованием специальных пробных сигналов в качестве входов. Поясним, что в широком смысле рандомизированными называются алгоритмы, в которых один или несколько шагов базируются на случайном выборе одного из многих детермированных правил. В рассматриваемом случае при решении задачи фильтрации это случайный выбор набора коэффициентов φ_n на этапе получения данных измерений.

Предложенный алгоритм позволяет осуществить фильтрацию при аддитивно действующей в канале наблюдения помехе, которая может не обладать какими-либо «полезными» статистическими свойствами и вообще не быть случайной. (Здесь под «полезными» подразумеваются те свойства, которые можно использовать в алгоритме). Предложенный в [11, 12] новый рандомизированный алгоритм при малых неконтролируемых возмущениях $\{ w^n \}$ в динамике модели позволяет получать почти точные оценки даже при высоком уровне помех наблюдения. При этом процедура работает для произвольных внешних помех в наблюдении и не требует априорного знания их характеристик. Необходимым условием является только их независимость от рандомизации в канале наблюдения (в математическом смысле последовательности внешних помех наблюдения $\{ v_n \}$ и рандомизированных «входов» $\{ \varphi_n \}$ некоррелированны). Помехи могут быть белошумными или коррелированными, с нулевым средним или смещенные (среднее не ноль), уровень сигнал–шум может быть высоким или низким. В задаче трекинга новый рандомизированный алгоритм детально изучен в работах [13–15].

Основная идея обоснования оригинального нового способа базируется на преобразовании уравнения модели наблюдений. Если левую и правую части соответствующего уравнения домножить на рандомизированный центрированный вектор коэффициентов преобразования сигнала в канале наблюдения, то для новой последовательности наблюдений получается модель с центрированной статистической неопределенностью. Применение к этой модели традиционных калмановских подходов к прогнозированию позволяет сформулировать и обосновать новые алгоритмы прогнозирования. Серия проведенных авторами имитационных экспериментов показывает, что рандомизированный фильтр дает при определенных условиях лучшее качество фильтрации по сравнению с минимаксными алгоритмами.

Статья организована следующим образом. Вначале дан иллюстрирующий предварительный пример. Далее описывается способ предсказания значений случайного процесса, наблюдаемого на фоне произвольных помех. Обосновывается разумность его применения в той ситуации, когда можно реально рандомизировать последовательность входов модели наблюдения (измерений) – коэффициентов преобразования изучаемого процесса. Предлагаемый фильтр имеет структуру, похожую на упрощенный вариант фильтра Калмана, что может говорить о его определенных оптимальных свойствах. Приведены результаты по оптимизации выбора параметров алгоритма при априорном задании характеристик динамики изменений фильтруемого процесса и уровня помех в наблюдениях. Показан пример имитационного моделирования. В заключение подведены итоги и формулируются ближайшие планы дальнейших исследований.

Предварительный пример

Рассмотрим задачу оценки неизвестной случайной скалярной величины θ, принимающей значения 0 или 1, которая последовательно $n = 1, 2, \ldots$ регистрируется с выбираемыми экспериментатором скалярными весами φ_n в зашумленном канале наблюдения (измерения производятся с помехами)

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n.$$

С исторической точки зрения эта задача является классической. Иногда она трактуется как задача об обнаружении (детектировании) сигнала $\{\varphi_n\}$, который, может быть, попадает в устройство регистрации (случай $\{\theta = 1\}$) или не попадает (случай $\{\theta = 0\}$). Оцениваемая величина θ представляет собой характеристику типа «да – нет». Большинство методов теории оценивания прежде всего апробировались на этой задаче, поэтому набор возможных способов её решения при различных предположениях о статистических свойствах сигнала $\{\varphi_n\}$ и «хороших» помехах $\{v_n\}$ достаточно обширен [4].

Будем считать, что возможен случайный (рандомизированный) выбор весов φ_n. Пусть $\{\varphi_n\}$ – последовательность значений независимых между собой случайных величин с известным ненулевым средним значением $M_\varphi \neq 0$ и положительной ограниченной дисперсией $\sigma_\varphi^2 > 0$ и $\varphi_1 \neq M_\varphi$. Просуммировав и усреднив n последовательных данных наблюдения, получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \theta + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

В силу усиленного закона больших чисел [16] последовательность величин $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$ стремится к среднему значению M_φ. Если взять $\hat{\theta}^0 = 0$ и в качестве очередной оценки выбрать

$$\hat{\theta}^n = \frac{1}{nM_\varphi}\sum_{k=1}^{n} y_k,$$

то, предполагая случайную природу помех наблюдения, их независимость, одинаковую распределенность и ограниченность вторых статистических моментов, можно также доказать сходимость с вероятностью единица последовательности оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ к значению $\theta + \frac{M_v}{M_\varphi}$, где M_v – среднее значение помехи.

В момент времени n при выборе гипотезы о значении величины θ разумно взять операцию сравнения величины текущей оценки $\hat{\theta}^n$ с некоторым *пороговым значением* δ. Если $\hat{\theta}^n < \delta$, то принимается гипотеза $\{\theta = 0\}$, в противном случае $\{\theta = 1\}$. При известной величине M_v естественно в *решающем правиле* задать пороговое значение $\delta = \frac{1}{2} + \frac{M_v}{M_\varphi}$.

При произвольных помехах в наблюдении этот простой алгоритм не годится. Даже если помехи случайные, независимые, одинаково распределенные, но с неизвестным средним значением, то при $\left|\frac{M_v}{M_\varphi} > \frac{1}{2}\right|$ рассмотренный выше алгоритм в пределе будет давать неправильные ответы. Как всё-таки подступиться к решению такой задачи? Пусть помехи представляют собой значения неизвестной, но ограниченной детерминированной функции: $|v_n| \le C_v$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$, $n = 1, 2, \ldots$ – центрированные входы. Предположим дополнительно ограниченность четвертого центрального момента: $E\{|\Delta_n|^4\} < \infty$. Здесь и далее $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания (усреднения).

Домножим на Δ_n обе части соотношения, определяющего наблюдаемые величины y_n, и, произведя несложные преобразования, получим

$$\Delta_n y_n = \Delta_n^2\theta + \Delta_n M_\varphi \theta + \Delta_n v_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Рандомизация $\{\varphi_n\}$ при произвольных внешних помехах $\{v_n\}$ обеспечивает центрированность погрешностей в полученной новой модели наблюдений. Просуммировав и усреднив, имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k^2\theta + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k M_\varphi\theta + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k v_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Первое и второе слагаемые в правой части при сделанных предположениях в силу усиленного закона больших чисел [16] при $n \to \infty$ с вероятностью единица стремятся к $\sigma_\varphi^2\theta$ и к нулю соответственно. Можно показать, что по той же причине и последнее слагаемое с вероятностью единица при $n \to \infty$ стремится к нулю. Отсюда следует, что последовательность оценок $\{\hat{\theta}^n\}$, формируемых по правилу

$$\hat{\theta}^n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_k y_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta_k^2} = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\Delta_k^2}(\Delta_k\hat{\theta}^{n-1} - y_k) \approx \hat{\theta}^{n-1} - \frac{1}{n\sigma_\varphi^2}(\Delta_k\hat{\theta}^{n-1} - y_k), \quad n = 1,2,...,$$

сходится с вероятностью единица к θ. Зададим некоторое пороговое значение $\delta = 1/2$. В качестве решающего правила в момент времени n можно выбрать операцию сравнения величины текущей оценки $\hat{\theta}^n$ с выбранным пороговым значением δ. Если $\hat{\theta}^n < \delta$, то принимается гипотеза о том, что $\{\theta = 0\}$, в противном случае $\{\theta = 1\}$. Заметим, что домножение на Δ_n обеих частей соотношения, определяющего наблюдаемые величины y_n, не является составной частью алгоритма, а используется лишь для его обоснования.

Выведенное правило фактически представляет собой рандомизированный итеративный алгоритм, в котором на каждой итерации наблюдение является результатом «взвешивания» со случайным коэффициентом скалярной величины θ вместе с аддитивной ограниченной помехой. Далее идея рандомизации процесса наблюдений будет использована при решении задачи фильтрации общего вида.

Предсказание случайного процесса, наблюдаемого на фоне произвольных ограниченных помех

Ограничимся рассмотрением следующей постановки задачи: наблюдается скалярный сигнал, удовлетворяющий уравнению

$$y_n = \varphi_n^{\mathrm{T}} \theta^n + v_n, \tag{1}$$

представляющий собой преобразованный векторный процесс $\{\theta^n\}$, $\theta^n \in \mathrm{R}^r$ и помеху наблюдения $\{v_n\}$. Здесь φ_n – r-мерный вектор, известный в момент времени n. Векторный процесс $\{\theta^n\}$ порождается устойчивым линейным фильтром

$$\theta^{n+1} = \mathrm{A}\theta^n + w^{n+1}, \tag{2}$$

в котором A – известная матрица: $\| \mathrm{A} \| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})} \le 1$, а $\{w^n\}$ – реализация последовательности центрированных независимых случайных величин. Здесь и далее $\| \cdot \|$ – норма, $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $\lambda_{\min}(\cdot)$ – максимальное и минимальное собственные значения матрицы A.

Перечислим основные условия, при которых будут формулироваться основные результаты.

А. Входы $\{\varphi_n\}_{n \ge 1}$ представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с ограниченными *известными* математическими ожиданиями: $\| \mathrm{E}\{\varphi_n\} \| \le M_\varphi < \infty$, $\forall n$ векторы φ_n не зависят от случайных величин $\{ w^1, \ldots, w^n \}$ и от $\{ v_1, \ldots, v_n \}$, если $v_1, \ldots, v_n$ – случайные. Случайные векторы

$$\Delta_n = \varphi_n - \mathrm{E}\{\varphi_n\}$$

имеют симметричные функции распределения с матрицами ковариаций, удовлетворяющими условиям:

$$\mathrm{E}\{\Delta_n \Delta_n^{\mathrm{T}}\} = \mathrm{B} > 0, \qquad \| \mathrm{B} \| \le \sigma_\Delta^2 < \infty$$

и ограниченным четвертым статистическим моментом

$$\mathrm{E}\{\| \Delta_n \|^4\} = M_4^4 < \infty.$$

Б. $\forall\ n$ – случайные векторы w^{n+1} независимые и центрированные ($\mathrm{E}\{w^{n+1}\}=0$), удовлетворяющие условию

$$\mathrm{E}\{w^n {w^n}^{\mathrm{T}}\} \le \mathrm{Q}_w \le \sigma_w^2 \mathrm{I} < \infty.$$

В. Последовательность помех наблюдения $\{v_n\}_{n\ge 1}$ представляет собой либо значения детерминированной неизвестной ограниченной функции $|v_n| \le C_v$, $n = 1, 2, \ldots$, либо $\forall\ n$ – реализацию случайных векторов, которые независимы с Δ_n и ограничены в среднеквадратическом смысле

$$\mathrm{E}\{v_n^2\} \le C_v^2 < \infty.$$

Здесь и далее: $\mathrm{B} > 0$ означает, что B – положительно-определенная матрица.

Задача *фильтрации с прогнозом на один шаг* состоит в нахождении оценки $\hat{\theta}^{n+1}$ значения процесса $\{\theta^n\}$ в момент времени $n+1$ по наблюдениям y_k, φ_k, $k \le n$. Качество фильтрации определяется средней величиной квадрата невязки

$$\mathrm{E}\{\| \hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1} \|^2\}.$$

Обычно считают, что в модели наблюдений векторы $\{\varphi_n\}$ задаются детерминированной последовательностью. Предположим, что последовательность векторов $\{\varphi_n\}$ случайная и удовлетворяет условию **А**.

При сделанном предположении **А** процесс (1) измерения процесса θ^n является фактически рандомизированным, так как искомый сигнал «взвешивается» со случайно выбираемым набором коэффициентов φ_n, значения которых в текущий момент известны.

Рассмотрим следующий алгоритм построения очередной оценки

$$\hat{\theta}^{n+1} = \mathrm{A}\hat{\theta}^n - \alpha \mathrm{A}\Gamma\Delta_n(\varphi_n^{\mathrm{T}}\hat{\theta}^n - y_n),\ \Delta_n = \varphi_n - \mathrm{E}\{\varphi_n\}, \tag{3}$$

где $n = 0,1,\ldots$, $\alpha > 0$ – размер шага и Γ – положительно определенная симметричная матрица.

Будем считать, что начальные данные $\hat{\theta}^0$ заданы произвольным неслучайным вектором из $\mathbb{R}^r$. Алгоритм (3) называем рандомизированным, так как текущее измерение выполняется с рандомизированным входом (набором весов) и изменение текущей оценки происходит в выбираемом случайно (рандомизируемом) направлении $\mathrm{A}\Gamma\Delta_n$.

В Приложении приведено доказательство следующей теоремы о свойствах оценок алгоритма (3).

Т е о р е м а. *Пусть последовательности* $\{y_n\}, \{\varphi_n\}, \{v_n\}, \{\theta^n\}$ *и* $\{w^n\}$ *связаны уравнениями (1) и (2),* $\alpha > 0$, Γ *– положительно определенная матрица и* $\hat{\theta}^0$ *– произвольный неслучайный вектор из* $\mathbb{R}^r$.

Если выполнены предположения **А–В**, ***тогда*** *для ошибок предсказания оценок* $\{\hat{\theta}^n\}$, *генерируемых по алгоритму (3), для любого* $\rho > 0$ *и достаточно ма-*

лого α *такого, что*

$$\psi(\alpha,\rho) = (1-2\alpha\lambda_{\min}(\mathrm{B\Gamma}) + \alpha^2 \| \Gamma \|^2 (M_4^4 + (M_\varphi + \frac{1}{\rho}) M_\varphi \mathrm{T}r[\mathrm{B}])) \| \mathrm{A} \|^2 < 1, \quad (4)$$

выполняются неравенства

$$\mathrm{E}\{\| \hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1} \|^2\} \le \frac{r\sigma_w^2 + \alpha^2(1+M_\varphi\rho)\| \mathrm{A\Gamma} \|^2 \mathrm{T}r[\mathrm{B}]C_v^2}{1-\psi(\alpha,\rho)} + \psi(\alpha,\rho)^n \mathrm{E}\{\| \hat{\theta}^0 - \theta^0 \|^2\}. \quad (5)$$

Заметим, что полученная в теореме оценка является точной в том смысле, что при замене в условиях неравенств на равенства выражение (5) в типичных случаях также превращается в равенство.

Второе слагаемое в правой части неравенства (5) показывает вклад неопределенности о начальных данных и экспоненциально стремится к нулю с течением времени.

Интересно проанализировать первое слагаемое. Обычно в предположениях ограниченности помех при решении задач минимаксной фильтрации удовлетворяются результатами, точность которых пропорциональна характерным размерам множества неопределенности. Из формулы (5) следует неожиданное новое свойство рандомизированного алгоритма (точнее, алгоритма с рандомизированным процессом измерений и изменяющим текущую оценку в выбираемом случайном направлении). При малом уровне неконтролируемого изменения исследуемого процесса (малом σ_w^2) за счет выбора меньшего параметра шага алгоритма α возможно достижение малой среднеквадратичной невязки по сравнению с уровнем помех наблюдения C_v.

Оптимизация выбора параметров алгоритма

При известных априори характеристиках динамики изменений процесса $\{\theta^n\}$ и уровня помех $\{v_n\}$ в наблюдениях можно поставить и решить задачу об оптимизации выбора параметров алгоритма.

Результат теоремы дает возможность изучить зависимость качества фильтрации от величины размера шага алгоритма α. Пусть $\Gamma = \mathrm{B}^{-1}$, $\mathrm{E}\{\| \hat{\theta}^0 - \theta^0 \|^2\} = 0$, $\| \mathrm{A} \| = 1$. Введем обозначения:

$$c = \frac{r\sigma_w^2}{2}, \quad d(\rho) = \frac{M_4^4 + (M_\varphi + 1/\rho) M_\varphi \mathrm{T}r[\mathrm{B}]}{2\lambda_{\min}^2(\mathrm{B})}.$$

В этом случае для достаточно малых α из заключения теоремы следует, что

$$\mathrm{E}\{\| \hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1} \|^2\} \le D(\alpha,\rho) + O(\alpha^2),$$

где

$$D(\alpha,\rho) = c(\frac{1}{\alpha} + d(\rho) + \left(d(\rho)^2 + \frac{(1+M_\varphi\rho)\mathrm{T}r[\mathrm{B}]C_v^2}{2c\lambda_{\min}^2(\mathrm{B})} \right)\alpha).$$

Последнее выражение характеризует взаимное влияние возможности фильтрации и чувствительности к помехам при достаточно малых α. На практике дискретные модели обычно используются как приближения непрерывных. Малость размера шага алгоритма α естественным образом «увязывается» с малым шагом дискретизации.

Оптимизируя по α и ρ выражение для $D(\alpha,\rho)$, находим

$$\alpha_* = \left(d(\rho_*)^2 + \frac{(1+M_\varphi \rho_*)\mathrm{T}r[\mathrm{B}]C_v^2}{2c\lambda_{\min}^2(\mathrm{B})} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где ρ_* – точка минимума функции

$$\overline{D}(\rho) = c\left(d(\rho) + 2\sqrt{d(\rho)^2 + (1+M_\varphi \rho)\mathrm{T}r[\mathrm{B}]C_v^2 \lambda_{\min}^{-2}(\mathrm{B})/(2c)} \right). \tag{6}$$

Если $M_\varphi = 0$, то функция $D(\alpha,\rho)$ не зависит от ρ. В такой ситуации получаем

$$\alpha_* = \frac{2\sigma_w \lambda_{\min}^2(\mathrm{B})}{\sqrt{M_4^8\sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(\mathrm{B})\mathrm{T}r[\mathrm{B}]\sigma_v^2/r}}$$

и

$$\overline{D}_* = \overline{D}(0) = \frac{r\sigma_w}{4\lambda_{\min}^2(\mathrm{B})}\left(M_4^4\sigma_w + 2\sqrt{M_4^8\sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(\mathrm{B})\mathrm{T}r[\mathrm{B}]C_v^2/r}\right).$$

Пусть $r = 1$, $\{\varphi_n\}$ – последовательность скалярных значений независимых бернуллиевских (равных $\pm\varphi$ с одинаковой вероятностью) случайных величин и $\sigma_w^2 << C_v^2$, тогда

$$\alpha_* \text{АГ} \approx \frac{\sigma_w}{|\varphi| C_v}.$$

Интересно заметить, что это значение приблизительно совпадает с предельной величиной калмановского коэффициента усиления для фильтра Калмана, если помехи наблюдения $\{v_n\}$ независимые и равны $\pm C_v$ с равной вероятностью.

Пример

Рассмотрим пример применения рандомизированного алгоритма фильтрации (3) к решению задачи о предсказании значения скалярного процесса $\{\theta^n\}$, порождающегося устойчивым линейным фильтром

$$\theta^{n+1} = \theta^n + w^{n+1},\ n = 1,2,\ldots,\ \theta^1 = 0,$$

где $\{w^n\}$ представляет собой реализацию независимых равномерно распределенных на интервале $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ случайных величин

$$\mathrm{E}\{w^n\} = 0,\ \mathrm{E}\{(w^n)^2\} = \frac{2}{81}.$$

Наблюдению в каждый момент времени доступны величины

$$y_n = \varphi_n \theta^n + v_n,$$

представляющие собой смесь преобразованного процесса $\{\theta^n\}$ и *неизвестной, но ограниченной* детерминированной помехи $\{v_n\}: |v_n| \leq 2$.

При компьютерном моделировании рандомизация процесса наблюдений достигалась за счет выбора в качестве последовательности коэффициентов преобразования оцениваемого процесса в канале наблюдения $\{\varphi_n\}$ последовательности значений независимых между собой случайных величин, порождаемые равномерным распределением на интервале $[0,5;1,5]$.

Процесс $\{\theta^n\}$ наблюдался на интервале времени от 1 до 200. Качество предсказания определялось средней величиной невязки

$$\tilde{D}(\{\hat{\theta}^n\}) = \frac{1}{199}\sum_{n=1}^{199} \| \hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1} \|^2.$$

Оптимизация по ρ функции $\bar{D}(\rho)$ из (6) дает значение $\rho_* = 0{,}269$. Подставив это значение в формулу для α_*, получаем для алгоритма (3) оптимальное в данном случае значение размера шага $\alpha_* \approx 11{,}3808$, $\Gamma = 1/48$ и ошибка прогнозирования не превосходит

$$D(\alpha_*, \rho_*) = 1{,}3699 < C_v^2 = 4.$$

При этом $\alpha_* \Gamma = 11{,}3808/48 = 0{,}2371.$

В типичных случаях для четырех разных помех показано сравнительное поведение оценок предсказания, формируемых по трем алгоритмам (рис. 1–4):

рандомизированному

$$\hat{\theta}^{n+1} = \hat{\theta}^n - 0{,}2371(\varphi_n - 1{,}0)(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n), \tag{7}$$

алгоритму LMS [1] (упрощенному фильтру Калмана [4])

$$\hat{\theta}^{n+1} = \hat{\theta}^n - 0{,}2371\varphi_n(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n) \tag{8}$$

и фильтру Калмана

$$\hat{\theta}^{n+1} = \hat{\theta}^n - \mathrm{K}_n \varphi_n(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n), \tag{9}$$

$$\mathrm{K}_n = \frac{\gamma_{n-1}}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2},\ \gamma_n = \gamma_{n-1} - \frac{\varphi_n^2 \gamma_{n-1}^2}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2} + \frac{2}{81},\ \gamma_0 = 0.$$

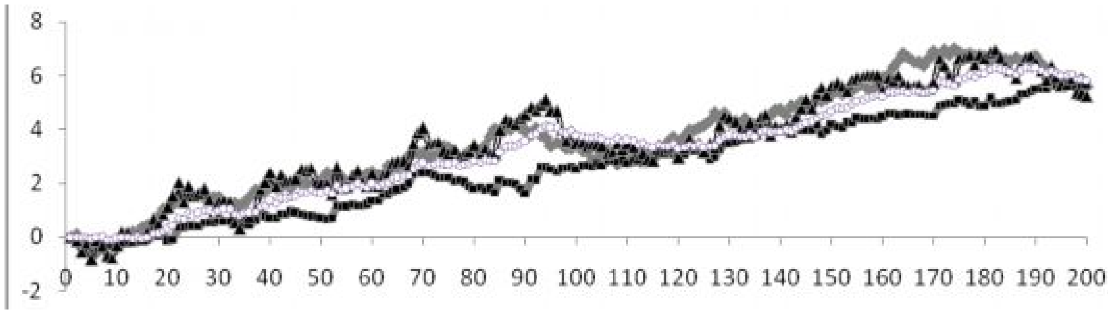

Рис. 1. Фильтрация при белошумных помехах $v_n = 4,0*(rand() - 0,5)$

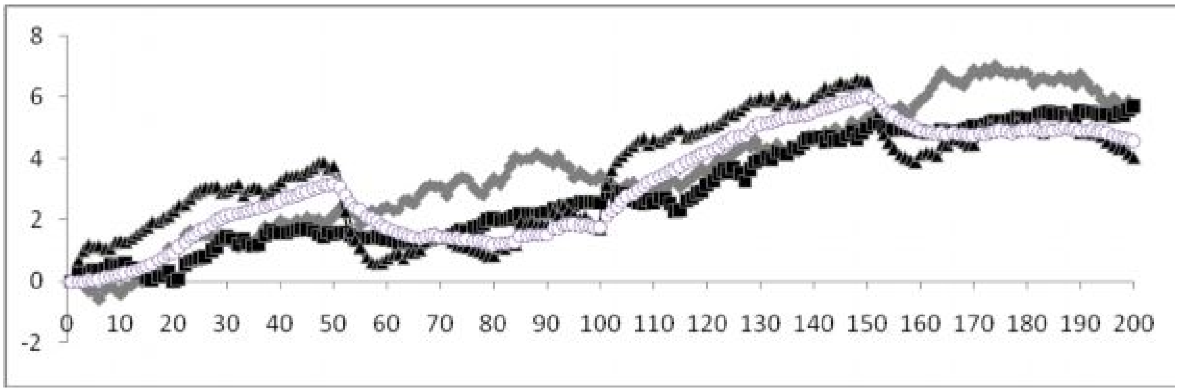

Рис. 2. Фильтрация при нерегулярных помехах $v_n = 0,1*sin(n) + 1,9*sign(50 - n \bmod 100)$

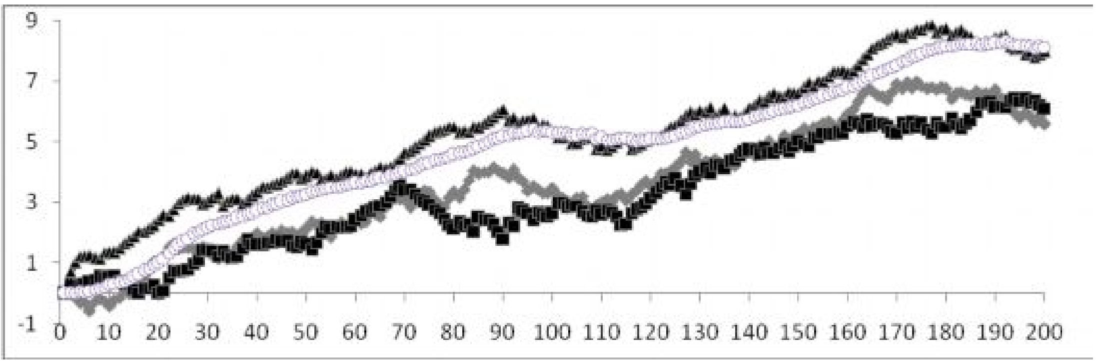

Рис. 3. Фильтрация при постоянной помехе $v_n = 2,0$

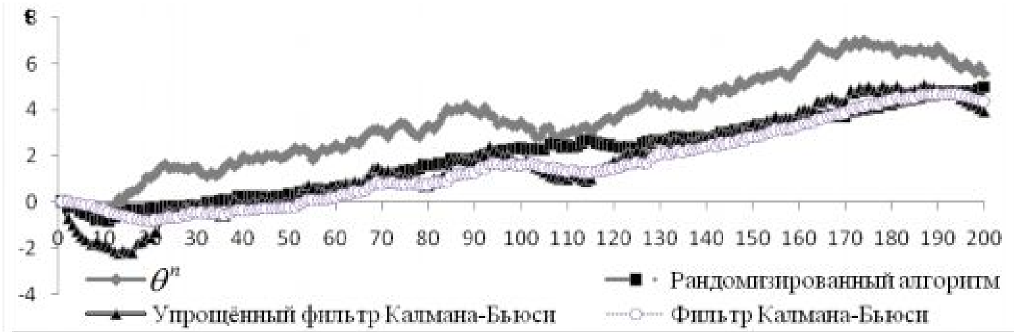

Рис. 4. Фильтрация при постоянной помехе $v_n = -2,0$

Известно, что фильтр Калмана (9) дает оптимальные оценки в случае гауссовых независимых помех в наблюдении, метод (8) достаточно эффективен при центрированных независимых помехах. Поэтому при центрированных случайных помехах поведение оценок, генерируемых по алгоритмам (8), (9) хорошее, несмотря на высокий уровень помех наблюдения (см. рис. 1). В ситуациях с постоянной неизвестной помехой или при нулевой в среднем, но недостаточно «разнообразной», средние значения ошибок алгоритмов (8) и (9) соизмеримы с квадратом уровня помехи (см. рис. 2–4). В то же время средний уровень ошибок оценок, доставляемых рандомизированным алгоритмом, во всех ситуациях примерно одинаковый и в несколько раз лучше квадрата уровня помехи.

В таблице сведены итоговые результаты средних значений ошибок типичных компьютерных экспериментов.

Помехи	(7)	(8)	(9)
$v_n = 4,0*(rand() - 0,5)$	0,5478	0,2571	0,2603
$v_n = 0,1*sin(n) + 1,9*sign(50 - n \bmod 100)$	0,5332	2,8912	2,0125
$v_n = 2,0$	0,6132	3,1256	2,2248
$v_n = -2,0$	0,6812	3,6812	3,6020

Заметим, что в самом рандомизированном алгоритме (3) не используются характеристики помех и при их ошибочном выборе работоспособность алгоритма не пострадает. Формула (5) все равно будет соблюдаться, и ее вид показывает возможность достижения более низкого уровня ошибки, чем действительный уровень помех.

Выводы

В статье представлена рандомизированная процедура фильтрации изменяющегося процесса. С теоретической точки зрения наиболее примечательной особенностью представленной процедуры является то, что она работает без каких-либо существенных предположений о помехах. Это очень важно и с практической точки зрения, так как в реальных приложениях трудно получить априорные знания о характеристиках помех.

Практическим примером является навигационная система легкого беспилотного летательного аппарата, разработанного авторами при поддержке корпорации Интел и лаборатории СПРИНТ математико-механического факультета СПбГУ (http://sites.google.com/site/smartflyllc/). Обычно динамика движения летательного аппарата в воздухе возмущается горизонтальными и вертикальными порывами воздушных масс, которые обоснованно можно считать случайными. В проекте используется планер с размахом крыла 2 м и массой 2,5 кг, поэтому даже небольшие порывы могут заметно повлиять на смещение изначально заданной траектории полета. В разработанной авторами модели позиционирование осуществляется с помощью GPS-датчика, который на практике часто выдает смещенные координаты. Если коэффициенты преобразования сигнала в канале наблюдения являются известными случайными независимыми величинами, то теоретически возможно построение и хороших точечных прогнозов. С практической точки зрения для задач идентификации представляет интерес возможность использования предлагаемого алгоритма, включающего этап изменения свойств самих измерений и их последующую обработку с учетом введенных изменений.

Авторы выражают благодарность рецензентам за конструктивные замечания и комментарии, которые позволили существенно улучшить содержание статьи.

Приложение

Доказательство теоремы. Подставив формулы (1) и (2) в (3), для ошибки предсказания получаем

$$\hat{\theta}^{n+1}-\theta^{n+1}=\mathrm{A}(\mathrm{I}-\alpha\Gamma\Delta_n\Delta_n^{\mathrm{T}})(\hat{\theta}^n-\theta^n)-\alpha\mathrm{A}\Gamma\Delta_n(\mathrm{E}\{\varphi_n\}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}^n-\theta^n)-v_n)-w^{n+1}.$$

Обозначим через $D_n := \| \hat{\theta}^{n+1}-\theta^{n+1} \|^2$. При сделанных выше предположениях в силу независимости случайных векторов Δ_n и w^{n+1}, усредняя условно по отношению к предыстории всех случайных процессов до момента времени n кроме Δ_n и используя предположение **Б,** выводим, что

$$\mathrm{E}\{D_n \mid w^1,\dots,w^n,v_1,\dots,v_n,\Delta_1,\dots,\Delta_n\}=\| \mathrm{A}(\mathrm{I}-\alpha\Gamma\Delta_n\Delta_n^{\mathrm{T}})(\hat{\theta}^n-\theta^n)-$$
$$-\alpha\mathrm{A}\Gamma\Delta_n(\mathrm{E}\{\varphi_n\}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}^n-\theta^n)-v_n) \|^2+r\sigma_w^2.$$

Из-за симметричности распределения для Δ_n имеем

$$(\hat{\theta}^n-\theta^n)^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\{(\mathrm{I}-\alpha\Delta_n\Delta_n^{\mathrm{T}}\Gamma)\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\alpha\mathrm{A}\Gamma\Delta_n \mid F_n\}(\mathrm{E}\{\varphi_n\}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}^n-\theta^n)-v_n)=0.$$

Следовательно, усреднив по отношению к Δ_n в силу предположения **А,** можно заключить, что

$$\mathrm{E}\{D_n \mid w^1,\dots,w^n,v_1,\dots,v_n,\Delta_1,\dots,\Delta_{n-1}\}\le(1-2\alpha\lambda_{\min}(\mathrm{B}\Gamma)+\alpha^2\|\Gamma\|^2 M_4^4)\|\mathrm{A}\|^2 D_{n-1}+$$
$$+\alpha^2(\mathrm{E}\{\varphi_n\}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}^n-\theta^n)-v_n)^2\| \mathrm{A}\Gamma \|^2\mathrm{T}r[\mathrm{B}]+r\sigma_w^2.$$

Далее, взяв безусловное математическое ожидание от обеих частей последней формулы, используя предположение **B** и выполнение при любом $\rho > 0$ неравенства: $2\mathrm{E}\{\varphi_n\}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}^n - \theta^n)v_n \le \rho M_\varphi v_n^2 + \frac{M_\varphi}{\rho} D_{n-1}$, для среднего значения ошибки предсказания получаем оценку

$$\mathrm{E}\{D_n\} \le \psi(\alpha,\rho)\mathrm{E}\{D_{n-1}\} + \alpha^2(1+M_\varphi\rho)\| \mathrm{A}\Gamma \|^2 \mathrm{T}r[\mathrm{B}]C_v^2 + r\sigma_w^2.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует заключение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ljung, L**. System Identification –Theory for the User. 2nd ed. Engle-wood Cliffs. – NJ: Prentice Hall. 1999.
2. **Soderstrem, T.** System Identification/ T.Soderstrem, P.Stoica// Englewood Cliffs. – NJ: Prentice Hall. 1998.
3. **Куржанский, А.Б.** Управление и наблюдения в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
4. **Фомин, В.Н**. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
5. **Черноусько, Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 319 с.
6. **Bai, E.W.** Bounded-error parameter estimation: Noise models and recursive algorithms / E.W.Bai, K.M.Nagpal, R.Tempo // Automatica. Vol. 32. 1996. P. 985-999.
7. **Kibzun A.I., Kan, Yu.S**. Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. – Chichester (UK): Wiley, 1996.
8. **Панков, А.Р.** Минимаксная идентификация обобщенной неопределенно-стохастической линейной модели / А.Р. Панков, К.В. Семенихин // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 11. С. 158-171.
9. **Поляк, Б.Т.** Робастная устойчивость и управление/ Б.Т.Поляк, П.С.Щербаков. – М.: Наука. 2002. 303 с.
10. **Степанов, О.А. Осипов, А.В. Васильев, В.А**. Нечеткие и байесовские алгоритмы в задаче нелинейного оценивания // Гироскопия и навигация. 2009. – № 1 (64). – С. 16-29.
11. **Граничин, О.Н., Поляк, Б.Т.** Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. – М.: Наука. 2003. – 293 с.
12. **Granichin, O.N**. Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 49. Oct. 2004. P. 1830-1835.
13. **Вахитов, А.Т., Граничин, О.Н., Гуревич, Л.С.** Алгоритм стохастической аппроксимации с пробным возмущением на входе в нестационарной задаче оптимизации // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 11. С. 70-79.
14. **Granichin, O., Gurevich, L., Vakhitov, A**. Discrete-time minimum tracking based on stochastic approximation algorithm with randomized differences // Proc. of the Combined 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, December 16-18, 2009, Shanghai, P.R. China. P. 5763-5767.
15. **Granichin, O., Vakhitov, A., Vlasov, V.** Adaptive control of SISO plant with time-varying coefficients based on random test perturbation // In Proc. of the 2010 American Control Conference, June 30-July 02, 2010, Baltimore, MD, USA. P. 4004-4009.
16. **Ширяев, А.Н.** Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 574 с.

***Abstract*.** A random process value prediction problem is considered. In this problem the assumption is made that the uncertainties generating the process analyzed have a statistic nature and that observations are carried out with unknown but bounded noise. A randomized algorithm filtering arbitrary external noise in observation is proposed. Examples of simulation in comparison with traditional approaches are presented.

Материал поступил 02.03.11