АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1990

УДК 62-505.1

О. Н. ГРАНИЧИН, канд. физ.-мат. наук

(Ленинградский государственный университет)

ПОСТРОЕНИЕ СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОМЕХОЙ

Для скалярного дискретного динамического объекта, описываемого линейным разностным уравнением с аддитивной ограниченной помехой, предлагается способ конструирования субоптимального стабилизирующего регулятора, минимизирующего предельное отклонение выхода объекта при «наихудшей» реализации помехи. Получена оценка снизу для наименьшего значения соответствующего функционала качества. В ряде случаев предлагаемый метод позволяет построить оптимальный регулятор. Рассмотрен пример, для которого ранее предлагавшиеся в литературе методы не давали эффективного способа конструирования оптимального регулятора.

1. Введение

Динамика управляемого объекта, функционирующего в условиях внешних возмущений, после дискретизации непрерывной модели достаточно часто описывается линейным разностным уравнением с аддитивной помехой, связывающим выход объекта с управлением и помехой. Будем считать, что управление строится с целью минимизации абсолютной величины выхода объекта.

При использовании стохастического подхода, в соответствии с которым последовательности неконтролируемых возмущений приписывалась случайная, в математическом смысле этого слова, природа, в [1] решена задача минимизации среднего значения предельной величины отклонения от нуля квадрата величины выхода объекта. В [2—5] исследуется вопрос о построении предельно оптимального в минимаксном смысле стабилизирующего регулятора, при предположении об ограниченности неконтролируемых возмущений. Красивые решения задачи получены для устойчивого по управлению объекта в [2, 3] и в одном интересном частном случае для сильно неустойчивого по управлению объекта [4]. В [5] доказано существование оптимального регулятора для произвольного управляемого скалярного объекта, описываемого линейным разностным уравнением с аддитивной ограниченной помехой, предложен способ построения оптимального регулятора, требующий, к сожалению, перебора значительного числа вариантов. При этом оставался открытым вопрос о возможности более конструктивного описания оптимального регулятора.

2. Постановка задачи

Рассмотрим скалярный объект управления (ОУ), описываемый линейным разностным уравнением вида

(1) $$y_t+a_1y_{t-1}+\ldots+a_ny_{t-n}=b_ku_{t-k}+b_lu_{t-l}+v_t,$$

в котором $t=1, 2, \ldots$, y_t, u_t, v_t — соответственно выходная, управляющая и возмущающая переменные, k — натуральное число (запаздывание в управлении). Начальные данные $y_{1-n}, \ldots, y_0$ и $u_{1-l}, \ldots, u_{-k}$ предполагаются заданными, последовательность помех $\{v_t\}_{t=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченной: $|v_t| \leqslant C_v$, $t=1, 2, \ldots$, а в остальном произвольной.

Требуется построить линейную стабилизирующую стационарную обратную связь

$$u_t+\alpha_1 u_{t-1}+\ldots+\alpha_s u_{t-s}=\beta_0 y_t+\beta_1 y_{t-1}+\ldots+\beta_p y_{t-p}, \tag{2}$$

$s, p \geqslant 0$, минимизирующую предельное отклонение от нуля абсолютной величины выхода объекта при «наихудшей» последовательности возмущений (см. [5]).

3. Основной результат

Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — неустойчивые ненулевые корни полинома $b(\lambda)=\lambda^k b_k+\ldots+\lambda^l b_l$. Для простоты будем считать, что все они различны и вещественны. Определим для любого m-мерного вектора $\mathbf{X}$ из множества $T^m=\{\mathbf{X}\in\mathbb{R}^m, x_1\geqslant k, x_i\geqslant 1\}$ матрицу размерности $(m+k)\times(m+k)$:

$$W(\mathbf{X})=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2a_1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 6a_2 & 6a_1 & 3 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{k-1} & \lambda_1^{x_1} & \lambda_1^{x_1+x_2} & \ldots & \lambda_1^{x_1+\ldots+x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_m & \ldots & \lambda_m^{k-1} & \lambda_m^{x_1} & \lambda_m^{x_1+x_2} & \ldots & \lambda_m^{x_1+\ldots+x_m} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

Нетрудно показать, что эта матрица невырожденная. Обозначим $g_0(\mathbf{X})$, $g_1(\mathbf{X}), \ldots, g_{m+k-1}(\mathbf{X})$ — координаты вектора $\mathbf{G}(\mathbf{X})=W^{-1}(\mathbf{X})\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}=(1 \; -a_1 \ldots (k-1)a_{k-1} \; 1/a(\lambda_1) \ldots 1/a(\lambda_m))^T$, $a(\lambda)=1+\lambda a_1+\ldots+\lambda^n a_n$. Рассмотрим заданную на множестве T^m функцию

$$J(\mathbf{X})=\sum_{i=0}^{m+k-1} |g_i(\mathbf{X})|. \tag{4}$$

Эта функция достигает минимального значения в некоторой точке $\mathbf{X}^0$ множества T^m, так как неограниченно возрастает при $\mathbf{X}\to\infty$.

Теорема. Пусть ОУ (1) полностью управляемый, полином $b(\lambda)$ не имеет корней, равных по модулю единице, точка $\mathbf{X}^0$ минимизирует функцию (4) в T^m, $\mathbf{X}^c$ — ближайшая к $\mathbf{X}^0$ точка из T^m, координаты которой являются натуральными числами. Тогда коэффициенты субоптимального регулятора совпадают с коэффициентами полиномов $\alpha^c(\lambda)$ и $\beta^c(\lambda)$, имеющими вид

$$\alpha^c(\lambda)=\left(\sum_{i=0}^{k-1} g_i(\mathbf{X}^c)\lambda^i+g_k(\mathbf{X}^c)\lambda^{x_1}+\ldots+g_{m+k-1}(\mathbf{X}^c)\lambda^{x_1+\ldots+x_m}\right)\times$$
$$\times b(\lambda)/(\lambda^k(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_m)),$$

$$
\beta^0(\lambda)=\Big(a(\lambda)\Big(\sum_{i=0}^{k-1} g_i(\mathbf{X}^c)\lambda^i+g_k(\mathbf{X}^c)\lambda^{x_1}+\ldots
$$

$$
(5)\qquad +g_{m+k-1}(\mathbf{X}^c)\lambda^{x_1+\ldots+x_m}\Big)-1\Big)\Big/\left(\lambda^k(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_m)\right).
$$

При этом функционал качества управления равен $C_0J(\mathbf{X}^c)$ и отличается от минимально возможного на величину не более $C_0(J(\mathbf{X}^c)-J(\mathbf{X}^0))$.

Нетрудно убедиться, что замкнутая система (1)—(2) с указанным в теореме регулятором устойчива, так как ее характеристический полином равен $b(\lambda)/(\lambda^k(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_m))$.

Заметим, что точку $\mathbf{X}^0$, минимизирующую функционал (4), можно найти, используя традиционные методы исследования на экстремум непрерывной, кусочно-дифференцируемой функции m переменных.

Лемма. Функция (4) достигает минимума в точке $\mathbf{X}^0$, если эта точка вместе с некоторым набором из m' чисел $s_1,\ldots,s_{m'}$ $(0\leqslant m'\leqslant m)$ удовлетворяет системе $m+m'$ уравнений

$$
S^TD_i(X)\begin{Vmatrix}0 & \ldots & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & 0\\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{Vmatrix}W^{-1}(\mathbf{X})\,\mathbf{A}=0,\ i\in\hat I=\{i_1,\ldots i_r,\ i_j\in\mathbb{N},\ 1\leqslant i_j\leqslant m\},
$$

$$
(6)\qquad x_i=1,\ i\in\{1,\ldots,m\}\setminus\hat I,
$$

$$
g_j(\mathbf{X})=0,\ j\in\tilde I=\{j_1,\ldots,j_{m'},\ j_l\in\mathbb{N},\ k\leqslant j_l\leqslant m+k-1\}.
$$

Здесь $\hat I$ и $\tilde I$ — некоторые подмножества множества индексов $\{1,\ldots,m\}$, $D_i(\mathbf{X})$, $i=1,\ldots,m$ — матрицы размерности $m\times m$, первые $i-1$ столбцов которых суть векторы $\mathbf{E}_h=(0\ldots0\ 1\ 0\ldots0)^T$, $h=1,\ldots,i-1$, составленные из нулей и единицы на h-м месте, а последние $m-i+1$ столбцов совпадают с соответствующими столбцами матрицы

$$
\begin{Vmatrix}\lambda_1^{x_1} & \ldots & \lambda_1^{x_1+\ldots+x_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_m^{x_1} & \ldots & \lambda_m^{x_1+\ldots+x_m}\end{Vmatrix}^{-1}\begin{Vmatrix}\ln\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \ln\lambda_m\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\lambda_1^{x_1} & \ldots & \lambda_1^{x_1+\ldots+x_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_m^{x_1} & \ldots & \lambda_m^{x_1+\ldots+x_m}\end{Vmatrix},
$$

$\mathbf{S}$ — вектор размерности m, в котором на местах с номерами $j_1-k+1,\ldots,j_{m'}-k+1$ стоят неизвестные параметры, а на остальных местах — константы, равные либо плюс, либо минус единице, в зависимости от знака соответствующего значения $g_{j-k+1}(\mathbf{X})$. Числа $s_1,\ldots,s_{m'}$ в условии леммы играют фактически роль множителей Лагранжа при решении задачи на условный экстремум, их число может равняться и нулю (случай $m'=0$).

Доказательство теоремы опирается на результаты [5], лемму можно доказать традиционными методами исследования функции на экстремум.

4. Пример

Рассмотрим ОУ, описываемый уравнением третьего порядка

$$
(7)\qquad y_t-1{,}91y_{t-1}+5{,}2y_{t-2}=0{,}72u_{t-1}-1{,}7u_{t-2}+u_{t-3}+v_t,\quad t=1,\ 2,\ldots
$$

Последовательность помех ограничена единицей, т. е. $|v_t|\leqslant1$, $t=1,2,\ldots$ ОУ (7) не является устойчивым по управлению, ненулевые корни полинома $b(\lambda)=0{,}72\lambda-1{,}7\lambda^2+\lambda^3$ оба по модулю меньше 1, $\lambda_1=0{,}8$, $\lambda_2=0{,}9$, а значит, для построения предельно оптимального минимаксного стабилизирующего регулятора неприменим метод, описанный в [2, 3]. Вместе с тем полином $b(\lambda)$ не является сильнонеустойчивым, так как $|-1{,}7|+|0{,}72|>1$. Это не позволяет воспользоваться результатами [4]. Следуя вышеизложенному, получаем

$$g_0(\mathbf{X})=1,$$
$$g_1(\mathbf{X})=(-0{,}6428572\cdot 0{,}8^{-x_1}\cdot 0{,}9^{x_2}+0{,}7137132\cdot 0{,}8^{x_2}\cdot$$
$$\cdot 0{,}9^{-x_1})(0{,}9^{x_2}-0{,}8^{x_1})^{-1},$$
$$g_2(\mathbf{X})=(0{,}6428572\cdot 0{,}8^{-x_1}-0{,}7137132\cdot 0{,}9^{-x_1})\times$$
$$\times(0{,}9^{x_2}-0{,}8^{x_1})^{-1}.$$

Если рассмотреть функционал (4), заданный на T^2, то точка $\mathbf{X}^0$, в которой он достигает минимума, в силу леммы должна удовлетворять одной из десяти систем уравнений, задаваемых формулами (6) при различных наборах индексов $I=\varnothing$; {1}, {2}; {1,2} и $\bar{I}=\varnothing$; {1}; {2}. Так как для ОУ (7) $g_i(\mathbf{X})\neq 0$ для любого $\mathbf{X}\in T^2$, то можно считать, что $\bar{I}=\varnothing$. Решением одной из полученных таким образом систем уравнений является пара чисел $x_1^0=1$ и $x_2^0=8{,}094096$, для которых значение функции (4) равно 1,850496 и меньше, чем для других решений. Ближайшей к $\mathbf{X}^0=(x_1^0 x_2^0)^T$ среди точек с натуральными координатами является $\mathbf{X}^*=(1\ 8)^T$. В силу (5) субоптимальный стабилизирующий регулятор ОУ (7) описывается уравнением

$$u_t-0{,}8103139u_{t-1}+0{,}0401866u_{t-8}=$$
$$=-3{,}7782137y_t+0{,}4510221y_{t-1}+0{,}4601675y_{t-2}+$$
$$+0{,}460087y_{t-3}+0{,}4471951y_{t-4}+0{,}4168675y_{t-5}+$$
$$+0{,}3631662y_{t-6}+0{,}2784931y_{t-7}+0{,}2089703y_{t-8}.$$

Значение функционала качества для этого регулятора равно 1,850500, что всего на 0,000004 превосходит минимальное значение функции (4) на множестве T^2. Дополнительные исследования показывают, что в действительности полученный регулятор является оптимальным для ОУ (7), минимизирующим $\overline{\lim}|y_t|$, $t\to\infty$ при «наихудшей» последовательности помех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саридис Дж.* Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980.
2. *Якубович Е. Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой // АиТ. 1975. № 9. С. 73–79.
3. *Якубович Е. Д.* Оптимальное управление линейной дискретной системой при наличии неизмеряемого возмущения // АиТ. 1977. № 4. С. 49–54.
4. *Барабанов А. Е.* Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольными ограниченными помехами // Вестн. Ленинград. ун-та. 1980. № 13. С. 119–120.
5. *Барабанов А. Е., Граничин О. Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // АиТ. 1984. № 5. С. 39–46.

Поступила в редакцию 25.02.88