АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1966

УДК 62-501.72:62-506

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОБНЫХ СИГНАЛОВ В КАНАЛЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

ГРАНИЧИН О. Н., ФОМИН В. Н.

(Ленинград)

Предлагается и обосновывается схема идентификации объекта управления при наличии контура обратной связи. Объект функционирует в дискретном времени и описывается линейным разностным уравнением. Схема основана на использовании некоррелированных пробных сигналов в цепи обратной связи. Обоснование предлагаемого метода параметрической идентификации осуществляется при весьма общих условиях, что делает его пригодным для решения задач адаптивного управления, когда текущие оценки неизвестных параметров объекта используются для формирования управляющих воздействий. Интенсивность пробного сигнала уменьшается со временем, и это позволяет получать состоятельные оценки неизвестных параметров и синтезировать предельно-оптимальное управление. Работоспособность синтезированного адаптивного управления устанавливается не только теоретически, но и путем его имитации на ЭВМ.

1. Введение

Известно, что совмещение процессов управления и идентификации может вызвать затруднение при решении задач управления из-за возможного вырождения процесса идентификации, когда малая вариативность управляющих и возмущающих воздействий не допускает однозначного восстановления неизвестных параметров объекта [1]. Положительные результаты по параметрической идентификации получены в предположении, что аддитивно действующие на объекты возмущения (помехи) являются стохастическими и обладают полезными свойствами (центрированность, стационарность, некоррелированность и т. д.) [2]. Если вариативность возмущающих воздействий недостаточна, то прибегают к «обогащению» управляющих воздействий путем использования «пробного сигнала» с достаточно богатыми спектральными свойствами (см., например, [3, с. 536], а также [4], где обсуждаются условия «постоянного возбуждения» на управляющие воздействия, при которых обеспечивается разрешимость задачи идентификации). В литературе описаны различные способы «включения» пробного сигнала в процедуру идентификации.

В работе [5] был предложен вариант алгоритма идентификации линейного объекта, названный авторами «алгоритмом стохастической аппроксимации с возмущением на входе». Идентификация объекта здесь достигается за счет подачи на его вход специального измеряемого сигнала. В [6, 7] этот алгоритм был обобщен на случай систем с обратной связью. Во всех этих работах требовалась априорная устойчивость объекта управления, центрированность и некоррелированность возмущающих воздействий и еще одно довольно ограничительное условие, связывающее собственно управление с сигналом, поступающим в канал управления. Обсуждение этого условия можно найти в [7], где показано, что оно может выполняться при весьма специальных видах обратной связи и достаточно точном знании параметров объекта. При этом обсуждалась лишь возможность субоптимального управления, поскольку пробный сигнал является белой помехой с положительной дисперсией.

Значительное развитие упомянутого метода осуществлено в [8], где описан алгоритм идентификации, пригодный для широкого класса систем управления: обоснование схемы идентификации дается при весьма общих предположениях о характере обратных связей, на помеху накладывается лишь условие ограниченности вторых моментов и независимость ее от пробного сигнала. Не требуется предположения об устойчивости объекта; возможная зависимость помехи от пробного сигнала обсуждается в [9]. Подчеркнем, что при столь общих условиях другие известные схемы идентификации неработоспособны.

В работах [5—9] схема идентификации определялась записью объекта в стандартной форме. Это обстоятельство придает универсальность изучаемому в них алгоритму идентификации, но в то же время снижает его эффективность, так как приводит к необходимости оценивать слишком большое и заведомо избыточное число параметров (для объекта n-го порядка со скалярным управлением число оцениваемых параметров в общем случае имеет порядок n^2). В [10] удалось аналогичную схему идентификации реализовать для линейного объекта, записанного в переменных «вход — выход», что позволило довести число оцениваемых параметров до числа коэффициентов уравнения объекта. Если некоторые коэффициенты уравнения известны, то и эта схема обладает избыточностью, так как размерность пространства оцениваемых параметров оказывается больше числа неизвестных коэффициентов.

В данной работе предлагается усовершенствование предложенной в [10] схемы идентификации, что позволяет добиться минимальной размерности пространства оцениваемых параметров. Как и в [10], предлагаемый алгоритм доставляет состоятельные оценки неизвестных параметров в условиях, когда на объекте аддитивно действуют произвольные, ограниченные в среднеквадратичном смысле возмущающие воздействия. В случае, когда эти воздействия ограничены (а в остальном произвольны, т. е. могут не обладать полезными статистическими свойствами), на основе предложенного метода идентификации осуществляется синтез адаптивного управления. Синтезированное управление обладает оптимальными (в минимаксном смысле) свойствами. Для минимально-фазового объекта управления при минимальном запаздывании в управлении обсуждаемая задача адаптивного управления (в субоптимальном варианте) может быть решена в рамках метода рекуррентных целевых неравенств [11]. В данной работе адаптивное управление линейным объектом общего вида со скалярными входом и выходом реализуется путем совмещения процессов идентификации и оптимального управления. Используемые при этом оптимизационные обратные связи получены в [11, 12] (см. также [13]).

2. Постановка задачи идентификации

Рассматривается объект управления (ОУ) со скалярным входом и выходом. Объект функционирует в дискретном времени и описывается линейным разностным уравнением

$$y_t+a^{(1)}y_{t-1}+\ldots+a^{(n)}y_{t-n}=b^{(k)}u_{t-k}+\ldots+b^{(m)}u_{t-m}+v_t, \tag{2.1}$$

где $t\geqslant\max(m, n)$, u_t — управляющая, y_t — выходная и v_t — возмущающая скалярные переменные в момент времени t; n, m — произвольные натуральные числа, определяющие порядок уравнения; k — натуральное число (запаздывание в управлении). Часть коэффициентов уравнения (2.1) неизвестна. Обозначим

$$\tau=\mathrm{col}\,(a^{(i_1)},\ldots,a^{(i_{n'})}, b^{(j_1)},\ldots,b^{(j_{m'})}) \tag{2.2}$$

— вектор, составленный из неизвестных коэффициентов уравнения (2.1), номера которых $i_1,\ldots,i_{n'}$, $j_1,\ldots,j_{m'}$. Предполагается известным ограниченное и замкнутое множество T возможных значений вектора (2.2).

Задача идентификации ОУ состоит в получении оценок τ_t, $t=1, 2,\ldots$ вектора (2.2), обладающих свойствами

$$\lim_{t\to\infty}\tau_t=\tau,\qquad \tau_t\in T. \tag{2.3}$$

Оценка τ_t в момент времени t формируется как функция наборов управляющих $\mathbf{u}_0^t=(u_0, u_1, \ldots, u_t)$ и выходных $\mathbf{y}_0^t=(y_0, y_1, \ldots, y_t)$ переменных. Эта функция, разумеется, не должна зависеть от неизвестного параметра τ, определяющего ОУ, но может определяться свойствами множества T.

Если возмущающие и (либо) управляющие переменные в (2.1) являются случайными величинами, то сходимость в (2.3) будем понимать с вероятностью 1 и называть это свойство состоятельностью оценок $\{\tau_t\}$.

Предлагаемое ниже решение задачи идентификации основано на использовании управляющих воздействий вида

$$u_t=\bar{u}_t+\bar{w}_t, \tag{2.4}$$

где $\bar{u}_t$ — собственно управляющие воздействия, формируемые, например, с помощью обратной связи, $\bar{w}_t$ — специально вводимые воздействия, совокупность $\bar{\mathbf{w}}^\infty=(\bar{w}_0, \bar{w}_1, \ldots)$ которых назовем пробным сигналом. Свойства управления $\mathbf{u}^\infty=(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots)$ и пробного сигнала $\bar{\mathbf{w}}^\infty$ будут сформулированы позднее. Именно наличие пробного сигнала в цепи обратной связи позволяет в конечном счете осуществить идентификацию ОУ, подверженного действию помехи $\mathbf{v}^\infty=(v_0, v_1, \ldots)$ весьма общего вида.

3. Введение параметра идентификации

Основная идея упомянутых выше работ [5—10] состоит во введении параметра оценивания θ (отличного от вектора (2.2) неизвестных коэффициентов ОУ), для которого схема оценивания допускает получение состоятельных оценок и по которому вектор (2.2) несложно вычислить. Следуя этой идее, введем вектор

$$\bar{\theta}=\mathrm{col}\,(\bar{\theta}^{(0)}, \bar{\theta}^{(1)}, \ldots, \bar{\theta}^{(p-1)}), \quad p=n+m-k-1, \tag{3.1}$$

определяемый из системы линейных уравнений

$$\bar{\theta}^{(s)}+a^{(1)}\bar{\theta}^{(s-1)}+\ldots+a^{(n)}\bar{\theta}^{(s-n)}=b^{(k+s)}, \quad s=0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.2}$$

в которой положено $\bar{\theta}^{(-1)}=\ldots=\bar{\theta}^{(-n)}=0$, $b^{(m+1)}=\ldots=b^{(m+n)}=0$.

Система (3.2), очевидно, однозначно разрешима относительно компонент вектора (3.1). Обозначим через $\bar{\Theta}$ множество векторов (3.1), определяемых системой (3.2), когда τ пробегает T. Можно рассматривать (3.2) и как систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов уравнения ОУ (2.1) $a^{(i_1)}, \ldots, a^{(i_{n'})}$, $b^{(j_1)}, \ldots, b^{(j_{m'})}$ при заданном векторе $\bar{\theta}$. При $p>n'+m'$ количество уравнений в этой системе больше количества неизвестных. Это позволяет предположить, что для точного определения неизвестных коэффициентов уравнения (2.1) по вектору $\bar{\theta}$ достаточно задать не все, а только некоторые из его компонент.

Фиксируем некоторые натуральные числа q, $r_0, \ldots, r_{q-1}$, $q\geqslant n'+m'$, $r_{q-1}\leqslant p$ и введем в рассмотрение q-мерный вектор

$$\theta=\mathrm{col}\,(\theta^{(0)}, \ldots, \theta^{(q-1)})=\mathrm{col}\,(\bar{\theta}^{(r_0)}, \ldots, \bar{\theta}^{(r_{q-1})}), \tag{3.3}$$

составленный из компонент вектора (3.1), и $(p-q)$-мерный вектор

$$\tilde{\theta}=\mathrm{col}\,(\bar{\theta}^{(l_1)}, \ldots, \bar{\theta}^{(l_{p-q})}), \tag{3.4}$$

составленный из компонент вектора (3.1), не вошедших в набор (3.3). Через Θ и $\tilde{\Theta}$ обозначим множества всех векторов θ и $\tilde{\theta}$, получаемых по формулам (3.3), (3.4) при $\bar{\theta}\in\bar{\Theta}$. Тогда систему уравнений (3.2) в компактной форме можно записать в виде

$$\Phi(\xi, \theta)=0, \tag{3.5}$$

где $\Phi(\cdot)$ — полиномиальная функция своих аргументов, $\xi=\mathrm{col}(\tau, \tilde{\theta})$ — вектор размерности p. Нас будут интересовать те случаи, в которых вектор (3.3) введен так, что уравнение (3.5) разрешимо относительно ξ.

Такая разрешимость заведомо будет иметь место, если выполнено условие:

А. При всех $\xi \in T \times \overset{\smile}{\Theta}$, $\theta \in \Theta$ матрица $\partial\Phi/\partial\xi$ размерности $p \times p$ не вырождена, т. е. имеет место неравенство

$$\det \partial\Phi/\partial\xi \neq 0. \tag{3.6}$$

Итак, при выполнении условия А уравнение (3.5) однозначно определяет зависимость $\xi = \xi(\theta)$ или

$$\tau = \varphi(\theta), \quad \overset{\smile}{\theta} = \psi(\theta). \tag{3.7}$$

Тем самым для идентификации ОУ (2.1) оказывается достаточно восстановить вектор (3.3) размерности q, который назовем параметром оценивания. Функция $\psi(\cdot)$ позволит затем вычислить неизвестные коэффициенты ОУ (2.1).

4. Примеры введения параметра оценивания

Поясним, как вводится параметр оценивания в типичных случаях. С этой целью остановимся подробнее на специальном варианте уравнения (2.1) при $k=1$, $n=m=2$, т. е. имеем

$$y_t + a^{(1)} y_{t-1} + a^{(2)} y_{t-2} = b^{(1)} u_{t-1} + b^{(2)} u_{t-2} + v_t. \tag{4.1}$$

Система (3.2) состоит из $p=4$ уравнений и записывается так:

$$\begin{aligned} &\bar\theta^{(0)} = b^{(1)},\\ &\bar\theta^{(1)} + a^{(1)}\bar\theta^{(0)} = b^{(2)},\\ &\bar\theta^{(2)} + a^{(1)}\bar\theta^{(1)} + a^{(2)}\bar\theta^{(0)} = 0,\\ &\bar\theta^{(3)} + a^{(1)}\theta^{(2)} + a^{(2)}\bar\theta^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

1°. Предположим, что все коэффициенты уравнения (4.1) неизвестны, т. е. $\tau = \mathrm{col}(a^{(1)}, a^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)})$. В данном случае можно положить $\theta = \overline{\theta}$, $\xi = \tau = \mathrm{col}(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \tau^{(3)}, \tau^{(4)})$ и (3.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\theta^{(0)} - \tau^{(3)} = 0,\\ &\theta^{(1)} + \tau^{(1)}\theta^{(0)} - \tau^{(4)} = 0,\\ &\theta^{(2)} + \tau^{(1)}\theta^{(1)} + \tau^{(2)}\theta^{(0)} = 0,\\ &\theta^{(3)} + \tau^{(1)}\theta^{(2)} + \tau^{(2)}\theta^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Нетрудно убедиться, что $\det \partial\Phi/\partial\xi = [\theta^{(1)}]^2 - \theta^{(0)}\theta^{(2)}$, и условие (3.6) будет выполнено, если полиномы $a(\lambda) = 1 + \lambda a^{(1)} + \lambda^2 a^{(2)}$, $b(\lambda) = \lambda b^{(1)} + \lambda^2 b^{(2)}$ не имеют общих корней и $|a^{(2)}| + |b^{(2)}| \neq 0$ при всех $\tau \in T$. Функции (3.7) определяются соотношениями (4.3) и сводятся к

$$\tau = -[\partial\Phi/\partial\xi]^{-1}\theta \tag{4.4}$$

(матрица $\partial\Phi/\partial\xi$ здесь не зависит от ξ).

Аналогичное положение сохраняется и в общем случае: если все коэффициенты уравнения (2.1) неизвестны, то вектор (3.3) отождествляется с (3.1) и $\xi = \tau$. Неравенство (3.6) тогда выполняется, если при каждом $\tau \in T$ и произвольном комплексном λ полиномы

$$a(\lambda, \tau) = 1 + \lambda a^{(1)} + \ldots + \lambda^n a^{(n)}, \quad b(\lambda, \tau) = \lambda^k b^{(k)} + \ldots + \lambda^m b^{(m)} \tag{4.5}$$

удовлетворяют условию

$$|a(\lambda, \tau)| + |b(\lambda, \tau)| \neq 0, \quad |a^{(n)}| + |b^{(m)}| \neq 0. \tag{4.6}$$

Зависимости (3.7) вновь сводятся к (4.4). Доказательство этого простого утверждения может быть найдено в [10, 13].

2°. Пусть неизвестен лишь коэффициент $b^{(2)}$, т. е. $\tau = b^{(2)}$. В качестве параметра оценивания можно выбрать $\theta = \theta^{(0)} = \bar\theta^{(1)}$. Тогда $\xi = \mathrm{col}(b^{(2)}, \bar\theta^{(2)}, \bar\theta^{(3)}, \bar\theta^{(3)})$ и из (4.2) находим, что матрица $\partial\Phi/\partial\xi$ не зависит от ξ и

$\det \partial\Phi/\partial\xi = 1$. Поэтому зависимости (3.7) сводятся к формуле

(4.7) $$\operatorname{col}(\tau, \bar\theta) = -[\partial\Phi/\partial\xi]^{-1}\Phi(0, \theta).$$

Аналогичная ситуация и в общем случае: если неизвестны только некоторые из коэффициентов полинома $b(\lambda, \tau)$ (см. (4.5)), т. е. $\tau = \operatorname{col}(b^{(j_1)}, \ldots, b^{(j_m)})$, то, принимая в качестве (3.3) вектор $\theta = \operatorname{col}(\bar\theta^{(j_1-k)}, \ldots, \bar\theta^{(j_m-k)})$, убеждаемся, что в соотношении (3.5) функция $\Phi(\xi, \theta)$ линейна по ξ и $|\det \partial\Phi/\partial\xi| = 1$, так что зависимости (3.7) сводятся к (4.7).

3°. Если в уравнении (4.1) неизвестен лишь коэффициент $a^{(1)}$, то принимаем $\tau = a^{(1)}$, $\theta = \bar\theta^{(1)}$, $\xi = \operatorname{col}(a^{(1)}, \bar\theta^{(0)}, \bar\theta^{(2)}, \bar\theta^{(3)})$. Из (4.2) находим $\det \partial\Phi/\partial\xi = -\bar\theta^{(0)} = -b^{(1)}$ и при $b^{(1)} \neq 0$ соотношения (4.2) однозначно определяют зависимости (3.7).

Столь же проста ситуация и в общем случае ОУ (2.1), когда $\tau = \operatorname{col}(a^{(1)}, \ldots, a^{(k_*)})$, $b^{(k)} \neq 0$. Принимая $\theta = \operatorname{col}(\bar\theta^{(1)}, \ldots, \bar\theta^{(k_*)})$, находим $|\det \partial\Phi/\partial\xi| = |b^{(k)}|^{n'} \neq 0$, а потому соотношение (3.5) однозначно определяет зависимости (3.7).

4°. Рассмотрим, наконец, уравнение (4.1), в котором $\tau = \operatorname{col}(a^{(1)}, b^{(1)}, b^{(2)})$, т. е. известен лишь коэффициент $a^{(2)}$. Предполагая, что при каждом $\tau \in T$ выполнено неравенство $b^{(2)} \neq a^{(1)}b^{(1)}$, можем в качестве параметра оценивания (3.3) выбрать вектор $\theta = \operatorname{col}(\bar\theta^{(0)}, \bar\theta^{(1)}, \bar\theta^{(2)})$. Нетрудно проверить, что в данном случае $|\det \partial\Phi/\partial\xi| = |\theta^{(1)}| \neq 0$, поскольку равенство $\bar\theta^{(1)} = 0$, $\bar\theta \in \Theta$ влечет равенство $b^{(2)} = a^{(1)}b^{(1)}$. Зависимости (3.7) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&a^{(1)} = -[\theta^{(1)}]^{-1}(\theta^{(2)} - \theta^{(0)}a^{(2)}), \quad b^{(1)} = \theta^{(0)},\\
&b^{(2)} = \theta^{(1)} - \theta^{(0)}[\theta^{(1)}]^{-1}(\theta^{(2)} - \theta^{(0)}a^{(2)}),\\
(4.8)\qquad &\\
&\bar\theta^{(0)} = \theta^{(0)}, \ \bar\theta^{(1)} = \theta^{(1)}, \ \bar\theta^{(2)} = \theta^{(2)}, \ \bar\theta^{(3)} = \theta^{(2)} \times\\
&\times [\theta^{(1)}]^{-1}(\theta^{(2)} - \theta^{(0)}a^{(2)}) - a^{(2)}\theta^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что во всех приведенных примерах размерность оцениваемого параметра θ минимальна, так как совпадает с числом неизвестных коэффициентов ОУ. Кроме того, нетрудно убедиться, что вторая из функций (3.7) обладает свойством, которое для общего случая сформулируем в виде следующего условия.

В. Компонента $\psi^{(l)}(\theta)$, $l = 0, 1, \ldots, p-1$ функции $\psi(\theta)$ может зависеть только от тех компонент вектора θ, порядковый номер которых в $\bar\theta$ не превосходит l, т. е. $\psi^{(l)}(\theta) = \psi^{(l)}(\theta^{(i)}, \ldots, \theta^{(i)})$, где $i : r_i \leq l$.

Условие В, как следует из рассмотренных примеров, носит достаточно общий характер.

5. Алгоритм идентификации и состоятельность оценок

Сделаем следующее предположение о множестве оцениваемых параметров.

С. Множество Θ векторов (3.3) имеет структуру $\Theta = \Theta^{(0)} \times \ldots \times \Theta^{(q-1)}$, где $\Theta^{(i)}$ — ограниченные замкнутые интервалы.

Через P_i далее обозначается операция проектирования на $\Theta^{(i)}$: для произвольной точки $\theta^{(i)}$ выполнено $P_i\theta^{(i)} = \theta^{(i)}$, если $\theta^{(i)} \in \Theta^{(i)}$, в противном случае $P_i\theta^{(i)}$ — конец интервала $\Theta^{(i)}$, ближайший к $\theta^{(i)}$.

Алгоритм идентификации примем в виде

(5.1) $$\theta_{t+1}^{(i)} = P_i\left[\theta_t^{(i)} + \gamma_t\left(y_{st+r_i} - \sum_{j=0}^{r_i}\psi^{(j)}(\theta_t)u_{st-1-k+r_i}\right)\bar w_{st-k}\right],$$

где $t = 0, 1, \ldots$; $i = 0, 1, \ldots, q-1$; $s = \max r_i + 1$; $\psi^{(j)}(\theta_t)$ — соответствующая компонента вектор-функции $\psi(\theta_t)$; r_i — индексы, определенные в (3.3); γ_t — неотрицательные величины, задающие шаг алгоритма. Алгоритм (5.1) предполагает задание начального вектора оценок $\theta_0 = \operatorname{col}(\theta_0^{(0)}, \ldots, \theta_0^{(q-1)})$.

Сформулируем теперь условия, которым удовлетворяют пробный сигнал $\bar w^*$, коэффициенты γ_t и собственно управление $\bar u^*$.

D. Пробные воздействия $\bar{w}_t$ задаются соотношениями

$$\bar{w}_t = \varkappa_t w_t, \tag{5.2}$$

где $\{w_t\}$ — независимые случайные величины со свойствами

$$M w_t = 0, \quad |w_t| \leqslant C_w < \infty, \quad M|w_t|^2 = \sigma_w^2 > 0, \tag{5.3}$$

$$\varkappa_{st+i-k} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s-1, \quad \varkappa_{st-k} = \sqrt{\gamma_t^{-1}\eta_t}, \tag{5.4}$$

$$\gamma_t = \delta_t R_t^{-1}. \tag{5.5}$$

Здесь $\{\eta_t\}$, $\{\delta_t\}$ — положительные числа со свойствами [1]

$$\sum_{t=0}^{\infty} \eta_t = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} (\eta_t^2 + \eta_t \delta_t) < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \eta_t \delta_t^{-1} = 0; \tag{5.6}$$

R_t — неотрицательная функция, вычисляемая при некоторых натуральных ρ и $d \geqslant \max(m, n)$ по формуле

$$R_t = \rho + \sum_{i=1}^{d} |y_{st-i}|^2 + \sum_{j=k}^{d} |\bar{u}_{st-j}|^2 + \sum_{j=k+1}^{kd} |u_{st-j}|^2. \tag{5.7}$$

Отметим, что $\lim \varkappa_t = 0$, $t \to \infty$, если $R_t \leqslant \mathrm{const} < \infty$. Из (5.2), (5.4) следует, что пробный сигнал отличен от нулевого лишь в моменты времени, кратные числу s.

E. Собственно управление $\mathbf{u}^\infty$ формируется по закону

$$\bar{u}_t = U_t(\bar{u}_0^{t-1}, y_0^t), \quad t = 1, 2, \ldots, \quad \bar{u}_0 = U_0(y_0), \tag{5.8}$$

где $\mathbf{U}_0^\infty(\cdot) = (U_0(\cdot), U_1(\cdot), \ldots)$ — некоторая последовательность функций (стратегия управления), обеспечивающая выполнение неравенств

$$|\mathrm{M}\{\bar{u}_{st-k+l}\bar{w}_{st-k}\} | \mathscr{F}^{st-1}| \leqslant C \eta_t \delta_t^{-1} R_t, \tag{5.9}$$

$$\mathrm{M}\{|\bar{u}_{st-k+l}|^2 | \mathscr{F}^{st-1}\} \leqslant C R_t, \quad l = 1, \ldots, s-1, \tag{5.10}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Здесь $\mathscr{F}^{st-1}$ — σ-алгебра, порождаемая случайными величинами y_0^{st-1}, u_0^{st-k-1}, w_0^{st-k-1}; функция R_t определяется формулой (5.7) и η_t, δ_t — числа из условия D.

Условие E представляется малоограничительным. Оно выполняется, в частности, для рассматриваемой ниже задачи адаптивного управления.

F. Помеха $\mathbf{v}^\infty$ независима от пробного сигнала $\mathbf{w}^\infty$ (если возмущающие воздействия v_t — случайные величины) и выполняются неравенства

$$\mathrm{M}|v_t|^2 \leqslant \sigma_v^2 < \infty. \tag{5.11}$$

Теорема 1. При выполнении условий A—F оценки θ_t, определяемые алгоритмом идентификации (5.1) и произвольным вектором $\theta_0 \in \Theta$, состоятельны. При этом оценки $\tau_t = \varphi(\theta_t)$ (см. (3.7)) удовлетворяют с вероятностью 1 равенству (2.3).

Доказательство теоремы приведено в приложении. Анализ доказательства показывает, что в алгоритме (5.1) η_t, δ_t могут быть выбраны случайными неотрицательными величинами, измеримыми при каждом t относительно σ-алгебры $\mathscr{F}^{st-1}$ и удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_{t=0}^{\infty} \eta_t = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \eta_t \delta_t^{-1} = 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \mathrm{M}(\eta_t^2 + \eta_t \delta_t) < \infty.$$

---

[1] В качестве таких чисел можно взять $\eta_t = 1/t$, $\delta_t = 1/\sqrt{t}$.

6. Постановка задачи адаптивного управления

Для ОУ (2.1), часть коэффициентов (2.2) которого неизвестна, а помеха $\mathbf{v}^\infty$ удовлетворяет условию F и имеет место

$$(6.1)\qquad |v_t|\leqslant C_v,\quad t=0,1,\ldots,$$

рассмотрим следующую задачу управления. Пусть цель управления (ЦУ) состоит в обеспечении неравенств

$$(6.2)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}|y_t|\leqslant I(\tau),\qquad \sup_t|u_t|<\infty,$$

где величина $I(\tau)$ определяет качество управления. Неравенства (6.2) необходимо обеспечить в классе U^p реализуемых стратегий управления вида $\mathrm{U}^\infty(\cdot)=(U_0(\cdot),\,U_1(\cdot),\ldots)$, с помощью которых управление $\mathbf{u}^\infty$ формируется по формулам (2.4), (5.8). Ограничимся далее оптимизационной задачей, принимая

$$(6.3)\qquad I(\tau)=\inf_{\mathrm{U}^\infty(\cdot)\in\mathrm{U}^c}\ \sup_{|v_t|\leqslant C_v}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}|y_t|,$$

где U^c — класс всех стратегий управления, порождаемых линейными обратными связями вида

$$(6.4)\qquad u_t+\alpha_1u_{t-1}+\ldots+\alpha_ru_{t-r}=\beta_0y_t+\ldots+\beta_ry_{t-r},$$

стабилизирующими ОУ (2.1), т. е. система управления (2.1), (6.4) обеспечивает выполнение неравенства

$$(6.5)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}(|y_t|+|u_t|)<\infty$$

независимо от выбора начальных данных. Число r в обратной связи (6.4) может быть произвольным.

Стратегия управления из U^p, обеспечивающая ЦУ (6.2), (6.3) при каждом $\tau\in T$, называется адаптивной в классе $T\times V$ по отношению к указанной ЦУ. Здесь через V обозначено множество всех помех $\mathbf{v}^\infty$, обладающих свойством (6.1).

Задача состоит в построении адаптивной стратегии управления.

Класс U^c стабилизирующих стратегий управления отличается от класса U^p реализуемых стратегий управления не только линейностью соответствующих обратных связей, но и возможностью выбора последних в зависимости от значения параметра τ, т. е. коэффициенты $\alpha_i=\alpha_i(\tau)$, $\beta_j=\beta_j(\tau)$ обратной связи (6.4) могут зависеть от τ. Способ вычисления коэффициентов $\alpha_i(\tau)$, $\beta_j(\tau)$ оптимальной обратной связи описан в [11] для минимально-фазовых ОУ (2.1). Общий случай изучен в [12], где показано, что коэффициенты оптимальной обратной связи могут быть выбраны непрерывными функциями вектора τ, если выполнено условие:

G. При всех $\tau\in T$ и $|\lambda|\leqslant1$ выполнены неравенства (4.6) и $b(\lambda,\tau)\neq0$ при $|\lambda|=1$. Пусть, кроме того, для некоторого натурального d выполнены неравенства [2]

$$\sup_{\tau\in T}\deg\alpha(\lambda,\tau)\leqslant d-k,\qquad \sup_{\tau\in T}\deg\beta(\lambda,\tau)\leqslant d-k.$$

Такое d заведомо существует, если множество T компактно.

7. Синтез адаптивной стратегии

С помощью полиномов $\alpha(\lambda,\tau)=1+\lambda\alpha_1(\tau)+\ldots+\lambda^r\alpha_r(\tau)$, $\beta(\lambda,\tau)=\beta_0(\tau)+\ldots+\lambda^r\beta_r(\tau)$, определяющих оптимальную в U^c стратегию управления при $\tau\in T$, зададимся обратной связью

$$(7.1)\qquad \alpha(\nabla,\tau_t)\bar u_t=\beta(\nabla,\tau_t)y_t,\qquad \nabla\bar u_t=\bar u_{t-1},\ \nabla y_t=y_{t-1},$$

в которой τ_t — настраиваемые параметры, выбираемые в виде неупреждающих функций переменных $\mathbf{y}_0{}^t$, $\mathbf{u}_0{}^{t-1}$. Для формулировки алгоритма их

[2] $\deg\alpha(\lambda)$ — степень полинома $\alpha(\lambda)$.

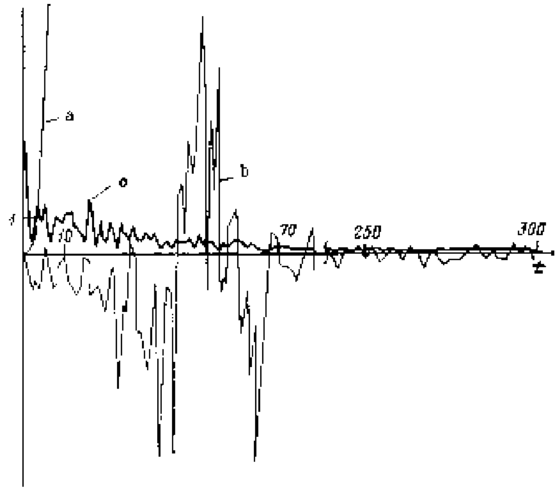


Fig. 1. a) Output variable for a non-adaptive control; b) output variable for the adaptive control; c) identification error $|\tau_t - \tau|^2$.

9. EXAMPLE OF SYNTHESIZING AN ADAPTIVE CONTROL STRATEGY

We will show how to construct an adaptive control for a CP per Eq. (4.1) in which $a^{(2)} = 1$, $T = \{\tau: -10 \le a^{(1)} \le 0,\ 0 \le b^{(1)} \le 10,\ 1 \le b^{(2)} \le 10\}$. We will assume that the interference satisfies the condition of Eq. (6.1) with $G_v = 10^{-1}$, and the test signal $\bar{w}^{\infty}$ has the properties of Eq. (5.3) when $G_w = 0.5$; $\sigma_w^2 = 1/12$. In this case the optimal feedback will have the form $u_t + \alpha_1(\tau)u_{t-1} = \beta_0(\tau)y_t + \beta_1(\tau)y_{t-1}$, where $\alpha_1(\tau) = b^{(2)}[b^{(1)}]^{-1}$, $\beta_0(\tau) = [b^{(1)}]^{-1}a^{(1)}$, $\beta_1(\tau) = [b^{(1)}]^{-1}$, if $|b^{(2)}| < |b^{(1)}|$. Otherwise $\alpha_1(\tau) = [b^{(2)}b^{(1)} - a^{(1)}|b^{(2)}|^2]Q$, and $\beta_0(\tau) = [b^{(2)} + a^{(1)}b^{(1)} - |a^{(1)}|^2 b^{(2)}]Q$,

$$\beta_1(\tau) = [b^{(1)} - b^{(2)}a^{(1)}]Q, \quad Q = [|b^{(2)}|^2 + |b^{(1)}|^2 - b^{(1)}b^{(2)}a^{(1)}]^{-1}.$$

Actually we will synthesize the control u^{∞} thusly:

$$u_t = \bar{u}_t + \bar{w}_t,\ \bar{u}_t + \alpha_1(\tau_t)\bar{u}_{t-1} = \beta_0(\tau_t)y_t - \beta_1(\tau_t)y_{t-1},$$

where $\bar{w}_{t'} = 0$ when $t' \ne 3t - 1$, $t = 1, 2, \ldots$, $\bar{w}_{3t-1} = \sqrt{\eta_t T_t \delta_t^{-1}}\, w_{3t-1}$,

$$\eta_t = 1/j_t,\quad \delta_t = 1/\sqrt{j_t},\quad R_t = 1 + |u_{3t-2}|^2 + |\bar{u}_{3t-1}|^2 + |u_{3t-3}|^2 + |y_{3t-1}|^2 + |y_{3t-3}|^2.$$

The numbers j_t are calculated from the recursion relationship*

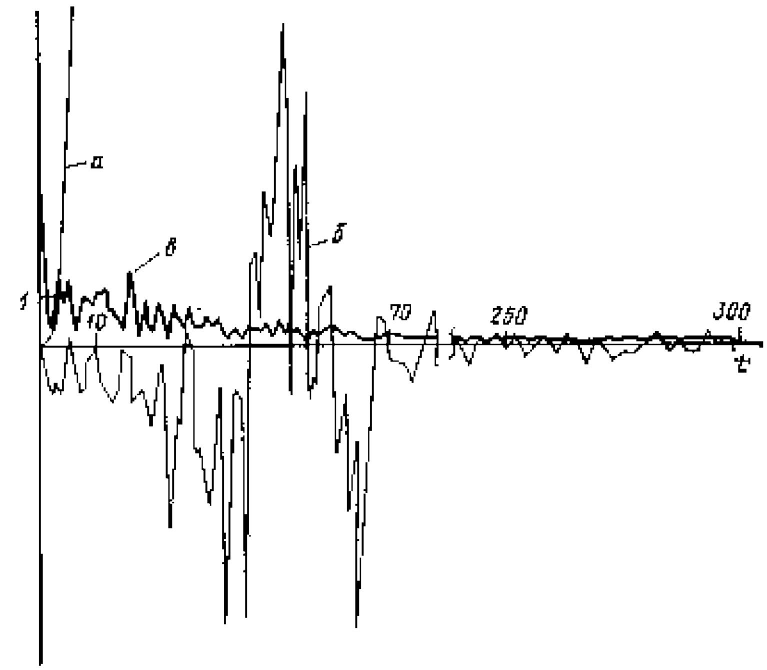
$$j_{t+1} = j_t + 1/9[3 - |v_{3t}| - |v_{3t+1}| - |v_{3t+2}|],\quad j_0 = 1. \tag{9.1}$$

The evaluations $\theta_t = \mathrm{col}(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)})$ and τ_t are calculated by means of Eqs. (5.1) and (7.4) to (7.7) in which the function $\varphi(\theta)$ is determined by the relationships of Eq. (4.8). The control system that has been described was simulated on a computer (when $\tau = \mathrm{col}(a^{(1)}, b^{(1)}, b^{(2)}) = \mathrm{col}\ (-1, 1, 2)$ and the initial conditions were $y_0 = y_{-1} = u_{-1} = 0$). The optimal value of the functional (6.3) is equal to 0.1875. Figure 1 shows how the output variable acts, correspondingly, for a nonadaptive (a) and the adaptive (b) variants (in the first case the feedback coefficients were constants $\alpha_1(\tau_0) = 0$, $\beta_0(\tau_0) = 1$, and $\beta_1(\tau_0) = 0$ and corresponded to the parameter $\tau_0 = \mathrm{col}(0, 0, 1)$, while in the second case they were changed in accord with Theorem 2, where the parameter τ_0 produced the initial value). Also shown in this figure is the process of identification that is realized with the adaptive control according to the procedure of Eqs. (5.1) and (4.8).

APPENDIX

Proof of Theorem 1. From Eq. (5.1) we obtain for the quantity $\Delta\theta_t^{(i)} = \theta_t^{(i)} - \theta^{(i)}$

*According to Theorem 2 for the numbers j_t it is possible to choose Ct, i.e., $j_{t+1} = j_t + C$, $C > 0$. Simulation on a computer has shown that the random quantities of Eq. (9.1) provide the best identification.



а — выходная переменная при неадаптивном управлении; б — выходная переменная при адаптивном управлении; в — погрешности идентификации $|\tau_t-\tau|^2$

где $\overline{w}_{t'}=0$ при $t'\neq 3t-1$, $t=1, 2, \ldots$, $\overline{w}_{3t-1}=\sqrt{\eta_t R_t \delta_t^{-1}}\, w_{3t-1}$,

$\eta_t=1/j_t$, $\delta_t=1/\sqrt{j_t}$, $R_t=1+|u_{3t-2}|^2+|\overline{u}_{3t-1}|^2+|\overline{u}_{3t-2}|^2+|y_{3t-1}|^2+|y_{3t-2}|^2$.

Числа j_t вычисляются согласно рекуррентному соотношению [2]

(9.1) $$j_{t+1}=j_t+1/9[3-|\nu_{3t}|-|\nu_{3t+1}|-|\nu_{3t+2}|], \quad j_0=1.$$

Оценки $\theta_t=\mathrm{col}(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)})$ и τ_t вычисляются согласно формулам (5.1), (7.4)—(7.7), в которых функция $\varphi(\theta)$ определяется соотношениями (4.8). Описанная система управления моделировалась на ЭВМ (при $\tau=\mathrm{col}(a^{(1)}, b^{(1)}, b^{(2)})=\mathrm{col}(-1, 1{,}2)$ и начальных условиях $y_0=y_{-1}=\overline{u}_{-1}=0$). Оптимальное значение функционала (6.3) равно 0,1875. На рисунке показано, как ведет себя выходная переменная соответственно в неадаптивном (а) и адаптивном (б) вариантах управления (в первом случае коэффициенты обратной связи были постоянными $\alpha_1(\tau_0)=0$, $\beta_0(\tau_0)=1$, $\beta_1(\tau_0)=0$ и отвечали параметру $\tau_0=\mathrm{col}(0, 0, 1)$, во втором случае изменялись согласно теореме 2, причем параметр τ_0 порождал начальную оценку). На том же рисунке показан процесс идентификации, осуществляемый при адаптивном управлении в соответствии с процедурой (5.1), (4.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из соотношения (5.1) для величины $\Delta\theta_t^{(i)}=\theta_t^{(i)}-\theta^{(i)}$ имеем

$$|\Delta\theta_{t+1}^{(i)}|^2 \leqslant |\Delta\theta_t^{(i)}|^2 + 2\gamma_t \overline{w}_{3t-k}\Delta\theta_t^{(i)} \left(y_{3t+r_t} - \sum_{j=0}^{r_t} \psi^{(j)}(\theta_t) u_{3t-j-k+r_t} \right) +$$

(П.1)

$$+ \gamma_t^2 |\overline{w}_{3t-k}|^2 \left(y_{3t+r_t} - \sum_{j=0}^{r_t} \psi^{(j)}(\theta_t) u_{3t-j-k+r_t} \right)^2.$$

[2] Согласно теореме 2 можно в качестве чисел j_t выбрать Ct, т. е. $j_{t+1}=j_t+C$, $C>0$. Моделирование на ЭВМ показало, что случайные величины (9.1) обеспечивают лучшую идентификацию.

[illegible]ляется из уравнения $y_{st+r_i}=-a^{(1)}y_{st+r_i-1}-\ldots-a^{(n)}y_{st+r_i-n}+b^{(k)}u_{st+r_i-k}+\ldots$ $\ldots+b^{(m)}u_{st+r_i-m}+v_{st+r_i}$ переменные $y_{st+r_i-1},\ldots,y_{st}$ в силу (2.1), с учетом (3.2), (3.7) получим представление

$$(\text{П.2})\qquad y_{st+r_i}=f_i(y_{st-n}^{st-1},u_{st-m}^{st-k-1})+\bar f_i(v_{st}^{st+r_i})+\sum_{j=0}^{r_i}\psi^{(j)}(\theta)u_{st-j-k+r_i},$$

где $i=0,1,\ldots,q-1$; $f_i(\cdot)$, $\bar f_i(\cdot)$ – линейные функции соответствующих аргументов. Подставляя (П.2) в соотношение (П.1) и производя в последнем усреднение при условии σ-алгебры $\mathcal{F}^{st-1}$, с учетом (5.2) – (5.4), (5.11) находим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}\{|\Delta\theta_{t+1}^{(i)}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\leqslant(1-2\eta_t\sigma_w^2)|\Delta\theta_t^{(i)}|^2+\\
&+2\gamma_t\Delta\theta_t^{(i)}\sum_{j=0}^{r_i}(\psi^{(j)}(\theta)-\psi^{(j)}(\theta_t))\mathrm{M}\{\bar w_{st-k}\bar u_{st-j-k+r_i}|\mathcal{F}^{st-1}\}+\\
&+C\delta_t\eta_t R_t^{-1}\left(\rho+\sum_{l=1}^{n}|y_{st-l}|^2+\sum_{l=k+1}^{m}|u_{st-l}|^2+\sum_{l=0}^{r_i}M\{|\bar u_{st-k+l}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\right),
\end{aligned}\qquad(\text{П.3})$$

где C – некоторая детерминированная постоянная. Здесь учтено, что $|w_t|\leqslant C_w$, $\mathrm{M}\{|v_{st-l}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\leqslant\sigma_v^2$, $\mathrm{M}\{v_{st+l}\bar w_{st-k}|\mathcal{F}^{st-1}\}=0$ при $l\geqslant0$; $\mathrm{M}\{y_{st-l}\bar w_{st-k}|\mathcal{F}^{st-1}\}=0$ при $l\geqslant1$; $\mathrm{M}\{\bar u_{st-k}\bar w_{st-k}|\mathcal{F}^{st-1}\}=0$, $\mathrm{M}\{y_{st-l}\bar w_{st-k}|\mathcal{F}^{st-1}\}=0$ при $l\geqslant k+1$; $\psi^{(r_i)}(\theta_t)=\theta_t^{(i)}$.

Принимая во внимание (5.10), (5.2) – (5.4), имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}\{|u_{st-k+l}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\leqslant2\mathrm{M}\{|\bar u_{st-k+l}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}+\\
&+2\mathrm{M}\{|\bar w_{st-k}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\leqslant C_1R_t+C_2\eta_t\gamma_t^{-1}
\end{aligned}$$

с некоторыми постоянными C_1, C_2. Учитывая эти свойства и (5.7), (5.9) из (П.3) выводим неравенство

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}\{|\Delta\theta_{t+1}^{(i)}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\leqslant(1-2\eta_t\sigma_w^2)|\Delta\theta_t^{(i)}|^2+\\
&+2C_3\eta_t|\Delta\theta_t^{(i)}|\sum_{j=0}^{i-1}|\Delta\theta_t^{(j)}|+C_4\delta_t\eta_t+C_5\eta_t^2
\end{aligned}\qquad(\text{П.4})$$

с некоторыми постоянными C_3, C_4, C_5, $i=0,1,\ldots,q-1$.

Здесь было использовано неравенство

$$\sum_{j=0}^{r_i}|\psi^{(j)}(\theta)-\psi^{(j)}(\theta_t)|\leqslant C'\sum_{j=0}^{i}|\theta^{(j)}-\theta_t^{(j)}|,$$

выполнение которого очевидным образом следует из условий А и В. При $i=0$ неравенство (П.4) принимает вид

$$(\text{П.5})\qquad \mathrm{M}\{|\Delta\theta_{t+1}^{(0)}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\leqslant(1-2\eta_t\sigma_w^2)|\Delta\theta_t^{(0)}|^2+C_4\delta_t\eta_t+C_5\eta_t^2.$$

В силу (5.6) и следствия к теореме Дуба о сходимости полумартингалов (см., например, [11, теорема 2, II.1]) из (П.5) выводим равенство $\lim\Delta\theta_t^{(0)}=0$, $t\to\infty$, справедливое с вероятностью 1, и неравенство $\mathrm{M}\sum_{t=0}^{\infty}|\Delta\theta_t^{(0)}|^2\eta_t<\infty$. Воспользуемся теперь методом математической индукции. Пусть $\lim|\Delta\theta_t^{(l)}|=0$, $t\to\infty$ с вероятностью 1 и

$$(\text{П.6})\qquad \sum_{t=1}^{\infty}\mathrm{M}|\Delta\theta_t^{(l)}|^2\eta_t<\infty$$

при $l=0,1,\ldots,i-1$. Тогда из (П.4) получим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}\{|\Delta\theta_{t+1}^{(i)}|^2|\mathcal{F}^{st-1}\}\leqslant(1-2\eta_t\sigma_w^2+C_6\eta_t)|\Delta\theta_t^{(i)}|^2+\\
&+\eta_t\sum_{j=0}^{i-1}|\Delta\theta_t^{(j)}|^2C_6^{-1}C_3^2q+C_4\delta_t\eta_t+C_5\eta_t^2,
\end{aligned}\qquad(\text{П.7})$$

где C_4 — произвольная положительная постоянная. Выбирая $C_4 < 2\sigma_\infty^2$ и учитывая, что в силу (П.6) выполнено

$$\sum_{t=1}^{\infty} \eta_t M \sum_{j=0}^{t-1} |\Delta\theta_t^{(j)}|^2 < \infty,$$

из (П.7) в силу упомянутого выше следствия к теореме Дуба выводим равенство $\lim \Delta\theta_t^{(j)} = 0$, $t\to\infty$, справедливое с вероятностью 1, и неравенство $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \eta_t M |\Delta\theta_t^{(j)}|^2 < \infty$.

Этим завершен индукционный переход от $t-1$ к t. Посылка индукции (при $t=0$) была установлена выше. Таким образом, состоятельность оценок $\{\theta_t\}$ доказана. Состоятельность оценок $\tau_t = \varphi(\theta_t)$ очевидным образом следует из непрерывности функции $\varphi(\theta)$ на множестве Θ, которое в силу условия С компактно.

Доказательство теоремы 2. Воспользовавшись уравнением (2.1) и формулами (7.1), (2.4), (5.2) – (5.4), получим представление

(П.8)
$$u_{st-k+l} = \chi_l(\tau, \tau_{st-k-1}^{st-k+l})u_{st-k} + \\ + \overline{\chi}_l(\tau, \tau_{st-k-1}^{st-k+l}, y_{st-d}^{st-1}, u_{st-m}^{st-k-1}, \overline{u}_{st-d}^{st-k-1}, v_{st}^{st+l}),$$

где функция $\overline{\chi}_l(\cdot)$ линейна относительно переменных $y_{st-d}^{st-1}, u_{st-m}^{st-k-1}, \overline{u}_{st-d}^{st-k-1}, v_{st}^{st+l}$ и ее коэффициенты, а также функция $\chi_l(\cdot)$ непрерывны по $\tau, \tau_{st-k+1}^{st-k+l}$ и в силу компактности множества T ограничены. Поэтому с учетом (6.1) выполняются неравенства

(П.9)
$$|\chi_l(\tau, \tau_{st-k+1}^{st-k+l})u_{st-k} + \overline{\chi}_l(\tau, \tau_{st-k+1}^{st-k+l}, y_{st-d}^{st-1}, u_{st-m}^{st-k-1}, \overline{u}_{st-d}^{st-k-1}, v_{st}^{st+l})|^2 \leqslant C_1 R_t,$$
$$|\chi_l(\tau, \tau_{st-k+1}^{st-k+l})| \leqslant C_2$$

с некоторыми постоянными C_1, C_2. Из (П.8), (П.9) следуют неравенства (5.9), (5.10), тем самым оказываются выполненными все условия теоремы 1. Следовательно, $\theta_t\to\theta$ при $t\to\infty$, а потому $\tau_t\to\tau$ с вероятностью 1. Убедимся в ограниченности функции (5.7). Для этого введем векторы

(П.10) $$z_t = \mathrm{col}(y_{t-1}, \ldots, y_{t-d}, u_{t-k}, \ldots, \overline{u}_{t-d}, \overline{w}_{t-k-1}, \ldots, \overline{w}_{t-m}).$$

Эти векторы удовлетворяют в силу (2.1), (7.1), (5.1) уравнению

(П.11) $$z_{t+1} = D_t z_t + L_t' v_{t+1} + L_t'' \overline{w}_{t-k},$$

где векторы L_t', L_t'' и матрицы D_t выписываются стандартным образом по вектору τ и коэффициентам уравнения (7.1) [4]. В силу состоятельности оценок τ_t обратная связь (7.1) будет с некоторого момента t_* стабилизирующей для ОУ (2.1), т. е. полином $g_t(\lambda) = a(\lambda, \tau)\alpha(\lambda, \tau_t) - b(\lambda, \tau)\beta(\lambda, \tau_t)$ не будет иметь корней при $|\lambda| \leqslant 1$. Нетрудно убедиться, что это эквивалентно устойчивости матриц D_t. В силу $\tau_t\to\tau$ при $t\to\infty$ матрицы $\overline{D}_t = D_{s(t+1)-1} \cdot \ldots \cdot D_{st}$ при достаточно больших t устойчивы и равномерно по t ограничены, а потому матрицы $H_t = \sum\limits_{h=0}^{\infty} (\overline{D}_t^h)^* \overline{D}_t^h$ равномерно по t огра-

---

[4] Для ОУ, описанного в разделе 9, матрицы D_t и векторы L_t', L_t'' имеют следующий вид:

$$D_t = \left\| \begin{matrix} -a^{(1)}, & -a^{(2)}, & b^{(1)}, & b^{(2)}, & b^{(2)}, \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ \beta_1(\tau_t) - \beta_0(\tau_t)\, a^{(1)}, & -\beta_0(\tau_t)\, a^{(2)}, & b^{(1)} - \alpha_1(\tau_t), & \beta_0(\tau_t)\, b^{(2)}, & \beta_0(\tau_t)\, b^{(2)} \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{matrix} \right\|$$

$L_t' = \mathrm{col}(1, 0, \beta_0(\tau_t), 0, 0)$, $L_t'' = \mathrm{col}(b^{(2)}, 0, \beta_0(\tau_t)\, b^{(2)}, 0, 1)$.

пичены. Запишем уравнение (П.11) в виде

$$z_{s(t+1)}=\bar{D}_t z_{st}+\overline{\mathbf{B}}_t, \tag{П.12}$$

где
$$\overline{\mathbf{B}}_t=\bar{D}_t L_{st}'' x_{st-k} w_{st-k}+\sum_{i=0}^{s-1}\left(\prod_{j=1}^{i} D_{s(t+1)-j}\right) L'_{s(t+1)-i-1} v_{s(t+1)-i}.$$

Из (5.2) – (5.7) для нормы $|\overline{\mathbf{B}}_t|$ вектора B_t получаем оценку

$$|\bar{B}_t|\leqslant C'+\varepsilon|z_{st}| \tag{П.13}$$

с некоторой постоянной C' при любом $\varepsilon>0$. Для функции $V_t=\mathbf{z}_{st}^* H_{t-1}\mathbf{z}_{st}$ с учетом (П.13) находим

$$V_{t+1}\leqslant V_t+\mathbf{z}_{st}^*(H_t-H_{t-1})\mathbf{z}_{st}-\nu|\mathbf{z}_{st}|^2+C$$

с постоянными $\nu>0$, $C>0$. Так как $\lim (H_t-H_{t-1})=0$, $t\to\infty$, то $V_t\leqslant \mathrm{conts}<\infty$, что эквивалентно неравенству

$$\sup_t(|y_t|^2+|u_t|^2+|u_t|^2)<\infty. \tag{П.14}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось убедиться в выполнении первого из неравенств (6.2). Для этого заметим, что уравнение (7.1) можно записать в виде

$$\alpha(\nabla,\tau)u_t=\beta(\nabla,\tau)y_t+e_t, \tag{П.15}$$

где величины $e_t=[\alpha(\nabla,\tau)-\alpha(\nabla,\tau_t)]u_t+[-\beta(\nabla,\tau)+\beta(\nabla,\tau_t)]y_t+\alpha(\nabla,\tau)\bar{w}_t$ в силу непрерывности полиномов $\alpha(\lambda,\tau)$, $\beta(\lambda,\tau)$ по τ и установленных выше свойств $\lim \tau_t=\tau$, $t\to\infty$, $H_t<\infty$ и (П.14) обладают свойством $\lim e_t=0$, $t\to\infty$. Нетрудно поэтому убедиться, что для системы управления (2.1), (П.15) предел $\overline{\lim}\,|y_t|$, $t\to\infty$ совпадает с аналогичным пределом для той же системы управления при $e_t=0$. Но при $e_t=0$ для регулятора (П.15) в силу оптимальности обратной связи справедливо равенство

$$\sup_{|w_t|\leqslant C_w}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\,|y_t|=I(\tau),$$

где $I(\cdot)$ – функционал из (6.3), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gustavsson I., Ljung L., Soderstrom T.* Identification of processes in closed loop-identifiability and accuracy aspects.– Automatica, 1977, № 1, p. 59–71.
2. Современные методы идентификации систем/Под ред. Эйкхоффа П. М.: Мир, 1983.
3. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
4. *Фомин В. Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984.
5. *Saridis G. N., Stein G. A.* A new algorithm for linear system identification.– IEEE Trans. Automat. Control, 1968, v. AC-13, № 5, p. 592–594.
6. *Saridis G. N., Lobbia R. N.* Parameter identification and control of linear discrete-time systems.– IEEE Trans. Automat. Control, 1972, v. AC-17, № 1, p. 52–60.
7. *Saridis G. N., Lobbia R. N.* Commention «Parameter identification and control of linear discrete-time systems». – IEEE Trans. Automat. Control, 1975, v. AC-20, № 3, p. 442.
8. *Агафонов С. А.* Алгоритмы стохастической аппроксимации с возмущением на входе в задаче адаптивного управления линейным объектом. Деп. в ВИНИТИ, 1981, № 5682-81.
9. *Агафонов С. А., Фомин В. Н.* Идентификация объектов управления с использованием пробных сигналов. Деп. в ВИНИТИ, 1982, № 4226-82.
10. *Граничин О. Н., Фомин В. Н.* Синтез адаптивного управления с использованием пробных сигналов в канале обратной связи. Деп. в ВИНИТИ, 1984, № 1339-84.
11. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
12. *Барабанов А. Е., Граничин О. Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой.– АиТ, 1984, № 5, с. 39–46.
13. *Фомин В. Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Поступила в редакцию
2.XI.1984

ADAPTIVE CONTROL WITH TENTATIVE SIGNALS IN THE FEEDBACK CHANNEL

GRANICHIN O. N., FOMIN V. N.

An identification technique for a feedback process is proved efficient. The process functions in discrete time and is described by a linear difference equation. The technique relies on uncorrelated tentative signals in the feedback loop. The worth of this parametric identification method is proved under very general conditions, which makes the method applicable to solution of adaptive control problems where the current estimates of the unknown process parameters are employed in generation of control functions. The intensity of the tentative signal decreases with time and this leads to consistent estimates of unknown parameters and to design of an extreme optimal control. The adaptive control thus designed is proved operational by computer simulation as well as theoretically.