АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

5

МОСКВА · 1941

УДК 62-501.52

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОМЕХОЙ

БАРАБАНОВ А. Е., ГРАНИЧИН О. Н.

(Ленинград)

Рассматривается линейный дискретный скалярный динамический объект управления с аддитивной помехой, которая предполагается равномерно ограниченной, а в остальном произвольной. Управление ищется в классе неупреждающих линейных стабилизирующих регуляторов. Предлагается способ вычисления коэффициентов оптимального регулятора, анализируются его свойства. Полученный регулятор может не совпадать с регуляторами, построенными по методу аналитического конструирования при квадратичном функционале качества.

1. Введение

Для описания динамики управляемого объекта в условиях внешних возмущений обычно используется линейное разностное либо дифференциальное уравнение с аддитивной помехой. Это уравнение, связывающее выход объекта с управлением, полностью определяется передаточной функцией объекта, а также характеристиками помехи. Предположим, что управление и выход являются скалярными величинами, передаточная функция фиксирована и управление строится с целью минимизации абсолютной величины выхода объекта.

Известно решение этой задачи в стохастической постановке в случае, когда помеха считается либо белым шумом, либо цветным шумом с известной плотностью. Решение, названное стохастическим оптимальным управлением [1], определяется линейным регулятором, оптимизирующим среднеквадратичную функцию выхода. Удобство технической реализации линейных регуляторов привело к широкому их распространению. Надо отметить, что стохастическая постановка задачи обладает рядом недостатков. Если управляемый процесс функционирует один или несколько раз, то предположение об ансамбле траекторий и его усреднении, лежащее в основе понятия случайного стационарного процесса, перестает соответствовать задаче. Кроме того, предположение о некоррелированности процессов, соответствующих в уравнении объекта белому шуму, является сильным и трудно проверяемым.

Ниже рассматривается детерминированная задача оптимального по выходу управления. Помеха предполагается равномерно ограниченной функцией, а решение ищется в классе линейных регуляторов. Построен оптимальный регулятор и получено геометрическое соотношение, связывающее его с решением указанной выше линейно-квадратичной (стохастической) задачи.

Данная задача в различных частных случаях решалась в [2–4]. В этих работах объект предполагался минимально-фазовым либо почти минимально-фазовым. Обобщение полученных в них результатов наталкивается на трудность, связанную с неограниченностью управлений в замкнутой системе. Эту трудность удалось обойти с помощью нового метода решения, основанного на геометрических свойствах пространства передаточных функций замкнутой устойчивой системы управления.

Близкие задачи оптимального управления при детерминированной ограниченной помехе рассматривались в [5]. Основное отличие этих задач состоит в конечности временного промежутка, благодаря чему снимался вопрос об ограниченности управлений. Кроме того, получаемые законы оптимального управления имели более сложную структуру, чем линейные регуляторы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейный скалярный объект управления, описываемый уравнением вида

(1) $$a(\nabla)y_t=b(\nabla)u_t+v_t \quad (t=1,2,\ldots),$$

где y_t — скалярный выход объекта; u_t — управление; ∇ — оператор сдвига назад, $\nabla x_t=x_{t-1}$; $a(z)$ и $b(z)$ — взаимно простые полиномы, причем имеется запаздывание в управлении: $a(0)=1$, $b(0)=0$. Помеху v_t будем считать полностью нерегулярной [2], т. е. принимающей произвольные значения в промежутке $[-C_v, C_v]$.

Требуется построить линейную стационарную обратную связь

(2) $$\alpha(\nabla)u_t=\beta(\nabla)y_t,$$

т. е. выбрать коэффициенты полиномов $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ так, чтобы:

1) система (1), (2) была устойчивой;
2) управление было неупреждающим, $\alpha(0)\neq 0$;
3) минимизировался функционал качества

(3) $$J(\alpha,\beta)=\sup_{(v_t)_{t=1}^{\infty}}\overline{\lim_{t\to\infty}}|y_t|.$$

Кроме того, будет рассмотрен «конечный» критерий качества

(3′) $$J_T(\alpha,\beta)=\sup_{(v_t)_{t=1}^{T}}\sup_{1\leqslant k\leqslant T}|y_k|\to\min$$

при фиксированном $T>0$ и нулевых начальных данных уравнения (1).

3. Основной результат

Коэффициенты оптимального регулятора в задаче (1)—(3), как будет показано ниже, удовлетворяют некоторому соотношению, из которого могут быть найдены конечным перебором.

Для точного описания этого соотношения потребуются следующие обозначения. Полином будем называть устойчивым, если все его корни расположены вне круга $\bar{D}_1=\{z\,|\,|z|\leqslant 1\}$. Разобьем полином $b(z)$ на «устойчивую» и «неустойчивую» части: $b(z)=b_+(z)b_-(z)$, так что все корни $b_+(z)$ находятся вне $\bar{D}_1$, а все корни $b_-(z)$ — в $\bar{D}_1$. Пусть степень $b_-(z)$ равна p ($\deg b_-(z)=p$, $b_-(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_pz^p$), и через $b_-^*(z)$ обозначим полином в обратных степенях: $b_-^*(z)=z^pb_-(z^{-1})=b_p+b_{p-1}z+\ldots+b_0z^p$. Отметим, что корни $b_-^*(z)$ лежат либо на окружности $S^1=\{z\,|\,|z|=1\}$, и тогда совпадают с корнями $b_-(z)$, либо вне $\bar{D}_1$, т. е. в области устойчивости.

Определим последовательность $(\gamma_t)_{t=1}^{\infty}$ как решение разностного уравнения

(4) $$b_-^*(\nabla)\gamma_t=0 \quad (t=1,2,\ldots)$$

с начальными данными $\gamma_0=1$, $\gamma_{-i}=0$, $1\leqslant i\leqslant p-1$. Если полином $b_-^*(z)$ устойчив, то $\gamma_t\to 0$ с экспоненциальной скоростью. Обозначим через Γ_t фазовый вектор уравнения (4): $\Gamma_t=\mathrm{col}\,(\gamma_t,\gamma_{t-1},\ldots,\gamma_{t-p+1})$. Тогда (4) переписывается в виде

(4′) $$\Gamma_{t+1}=B\Gamma_t \quad (t=0,1,\ldots);\quad \Gamma_0=\mathrm{col}\,(1,0,\ldots,0),\quad B=\left(\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{\bar{b}}\\ \hline I_{p-1} & 0\end{array}\right),$$

где $\bar{b}=b_p^{-1}(-b_{p-1},\ldots,-b_0)$; I_{p-1} — единичная матрица порядка $p-1$.

Определим множество K в $\mathbb{R}^p$ как выпуклую симметричную оболочку Γ_i:

(5) $$K = \mathrm{co}\{\pm\Gamma_i,\quad i=0,1,\ldots\}.$$

Теорема 1. Пусть полином $b(z)$ не имеет корней на единичной окружности S^1. Тогда решение оптимизационной задачи (1)—(3) существует и множество K есть выпуклая оболочка конечного числа точек $\pm\Gamma_i$ $(0 \leqslant i \leqslant \leqslant i_k < \infty)$.

Решение может быть найдено следующим способом. Пусть луч $\{\lambda^{-1}a(B)^{-1}\Gamma_0, \lambda>0\}$ пересекает границу K в точке $x \in \mathbb{R}^p$ при $\lambda=\lambda_0$, причем

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Gamma_{k_{(i)}}, \quad \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| = 1$$

есть разложение x по крайним точкам K. Тогда:

1) оптимальное значение функционала качества есть $J_{\text{кач}} = \lambda_0 l_0$;

2) оптимальный полином $\alpha(z)$ из регулятора (2) равен

(6) $$\alpha(z) = b_+(z)\bar{a}(z), \quad \text{где} \quad \bar{a}(z) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z^{k_i};$$

3) оптимальный полином $\beta(z)$ вычисляется из уравнения

(7) $$\bar{a}(z)a(z) - \beta(z)b_-(z) = 1,$$

которое разрешимо.

Доказательство теоремы 1 (см. приложение) — геометрическое. Оно основано на свойствах устойчивых передаточных функций объекта (1), и в нем используется техника выпуклого анализа.

Перечислим некоторые свойства оптимального регулятора, вытекающие из способа его построения и доказательства теоремы 1.

1. Характеристический полином замкнутой системы (1), (2) устойчив и находится из уравнения (7):

$$\chi(z) = \alpha(z)a(z) - \beta(z)b(z) = \bar{a}(z)b_+(z)a(z) - -\beta(z)b_+(z)b_-(z) = b_+(z).$$

Условие неупреждаемости выполнено, так как $b_+(0) = \alpha(0)a(0) \neq 0$ в силу устойчивости полинома $b_+(z)$ и запаздывания в управлении.

2. Связь построенного решения с оптимальными регуляторами линейно-квадратичной задачи. Если в (1) шум v_t отсутствует, начальные данные нулевые, кроме y_0, и выбран функционал качества $J = \sum_{t=1}^{\infty} y_t^2$ либо если v_t — белый шум при среднеквадратичном функционале J, то оптимальный регулятор строится методами аналитического конструирования [6]. Как отмечалось в [6], он совпадает с решением рассмотренной задачи для минимально-фазового объекта (1). Для неминимально-фазового объекта регуляторы, как правило, различны. Доказательство теоремы 1 дает геометрическую интерпретацию этого факта с использованием единичных шаров в банаховых пространствах l^2 (для квадратичной функции J) и l^1 (для квазилинейной функции J вида (3)).

3. Степень оптимальных полиномов $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ оценивается через число крайних точек многогранника K. Грубая оценка этого числа: $i_k \leqslant \leqslant C\rho^{-1}$, где ρ — расстояние от корней $b_-(z)$ до окружности S^1. Это следует из независимости первых p векторов Γ_i, $0 \leqslant i \leqslant p-1$ и из свойств линейного уравнения (4'). Отметим, что степень оптимальных полиномов $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, совпадающая с памятью регулятора (2), может неограниченно возрастать, если корни $b_-(z)$ приближаются к окружности S^1.

4. Решение (6), (7) совпадает с известными решениями задачи (1)—(3) в частных случаях [2, 4, 6]. Если объект управления (1) — минимально-фазовый, то $b(z)=z^p b_+(z)$, где p — запаздывание в управлении. Тогда, очевидно, $b_-^*(z)=1$ и в уравнении (4'): $\bar{b}=0$ и $\Gamma_t=0$ при $t\geqslant p$. Поэтому степень $\bar{\alpha}(z)$ из (6) не превосходит $p-1$, и пара $(\bar{\alpha}(z), \beta(z))$ однозначно находится из уравнения (7), что согласуется с [2].

Этот же способ нахождения оптимального регулятора применим и при условии сильной неустойчивости полинома $b_-(z)$ [4]: $|b_p|>|b_0|+|b_1|+\ldots+|b_{p-1}|$. Действительно, ввиду очевидного равенства $b_-^*(\nabla)\Gamma_t=0$ все векторы Γ_t при $t\geqslant p$ включены в выпуклую симметричную оболочку предыдущих. Отсюда степень $\bar{\alpha}(z)$ не выше $p-1$ и регулятор строится, как и для минимально-фазового объекта, из уравнения (7).

5. Рассмотрим вырожденный случай: полином $b(z)$ имеет корни на границе области устойчивости — единичной окружности S^1. В линейно-квадратичной задаче в этих условиях точная нижняя грань функционала качества не достигается, и оптимального регулятора не существует. В задаче (1)—(3) на вопрос о существовании, как показывают примеры, возможны оба ответа в зависимости от полиномов $a(z)$ и $b(z)$.

4. Некоторые обобщения

Геометрическое доказательство теоремы 1 позволяет распространить результат на близкие по формулировке задачи. Ниже будет рассмотрена задача с ослабленными требованиями к помехе v_t, а также задача оптимизации на конечном промежутке времени.

1. Пусть помеха v_t в уравнении (1) удовлетворяет соотношению

$$d(\nabla)v_t=c(\nabla)e_t \quad (t=1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где (e_t) — нерегулярная в промежутке $[-C_e, C_e]$ последовательность; $d(z)$ и $c(z)$ — взаимно простые полиномы, $d(z)$ устойчив. Тогда оптимизационная задача (1)—(3), (8) имеет решение, которое формулируется так же, как и теорема 1. Разобьем полином $c(z)$ на устойчивую и неустойчивую составляющие: $c(z)=c_+(z)c_-(z)$ и определим $c_-^*(z)=z^k c(z^{-1})$, где k — степень $c_-(z)$. Пусть γ_t есть решение уравнения

$$c_-^*(\nabla)b_-^*(\nabla)\gamma_t=0 \quad (t=1, 2, \ldots), \quad \gamma_0=1, \quad \gamma_{-i}=0, \quad 1\leqslant i\leqslant p+k-1. \tag{9}$$

Определим в $\mathbb{R}^{p+k}$ фазовый вектор $\Gamma_t=\mathrm{col}\,(\gamma_t, \gamma_{t-1}, \ldots, \gamma_{t-p-k+1})$, который удовлетворяет в силу (9) уравнению

$$\Gamma_{t+1}=G\Gamma_t \quad (t=0, 1, \ldots), \quad \Gamma_0=\mathrm{col}\,(1, 0, \ldots, 0).$$

Выпуклая оболочка $K=\mathrm{co}\{\pm\Gamma_i, i=0, 1, \ldots\}$ есть многогранник при условии, что полиномы $b(z)$ и $c(z)$ не имеют корней на окружности S^1.

Теорема 2. Пусть в задаче (1)—(3), (8) полиномы $c(z)$ и $b(z)$ не имеют корней на окружности S^1. Тогда оптимальный регулятор существует. Пусть луч $\{\lambda^{-1}c(G)a(G)^{-1}d(G)^{-1}\Gamma_0, \lambda>0\}$ пересекает границу K в точке $x\in\mathbb{R}^{p+k}$ при $\lambda=\lambda_0$, причем

$$x=\sum_{i=1}^{p+k}\alpha_i\Gamma_{\tau_i}, \quad \sum_{i=1}^{p+k}|\alpha_i|=1$$

— разложение x по крайним точкам K. Тогда:

1) полином $\bar{\alpha}(z)=\lambda_0\sum_{i=1}^{p+k}\alpha_i z^{\tau_i}$ делится на $c_-(z)$, т. е. $\bar{\alpha}(z)=m(z)c_-(z)$ и $m(z)$ — полином;

2) оптимальное значение функционала качества есть $J_{\min}=\lambda_0 C_e$;

3) оптимальный полином $\alpha(z)$ из уравнения (2) равен

$$\alpha(z)=m(z)b_+(z)d(z);$$

4) оптимальный полином $\beta(z)$ ищется из уравнения

$$m(z)a(z)d(z)-b_-(z)\beta(z)=c_1(z),$$

которое разрешимо.

2. Рассмотрим задачу оптимального управления объектом (1) с функционалом качества (3′). Оптимальный регулятор ищется, по-прежнему, в классе неупреждающих и стабилизирующих регуляторов. Последнее требование введено для того, чтобы при больших промежутках $[0, T]$ управления не были слишком большими.

Рассуждения из доказательства теоремы 1 полностью применимы и в этом случае, если начальные данные нулевые: $u_{-i}=y_{-i}=0$ при $i\geq 0$.

В обозначениях (4), (4′), (5) определим выпуклый многогранник $K_T=\text{co}\,\{\pm\Gamma_i,\ i=0, 1, \ldots, T-1\}$.

Теорема 3. Формулировка теоремы 1 остается справедливой, если в ней всюду заменить функционал качества (3) на (3′) и множество K на K_T.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Используем три основные идеи: способ специальной параметризации класса всех устойчивых передаточных функций объекта (1); явное представление выхода y_t через предыдущие помехи v_{t-k}, $k\geq 0$ и коэффициенты передаточной функции; геометрическую интерпретацию полученной задачи нахождения экстремума выпуклой функции на линейном многообразии конечной коразмерности.

1. Регулятор (2) является стабилизирующим, если устойчив характеристический полином системы (1), (2):

$$\chi(z)=a(z)\alpha(z)-b(z)\beta(z).$$

Введем передаточные функции системы (1), (2) от v_t к y_t и к u_t:

$$W_{y|v}(z)=\frac{\alpha(z)}{\chi(z)},\qquad W_{u|v}(z)=\frac{\beta(z)}{\chi(z)}. \tag{П.1}$$

Нетрудно доказать [6], что устойчивость системы (1), (2) равносильна отсутствию общих неустойчивых множителей у полиномов $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ и отсутствию полюсов у функций $W_{y|v}(z)$, $W_{u|v}(z)$ в круге D_1. Аналитические функции, удовлетворяющие последнему свойству, будем называть устойчивыми функциями (в отличие от устойчивого полинома). В [6] также доказано, что каждому стабилизирующему регулятору (2) с взаимно простыми полиномами $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ однозначно соответствует пара устойчивых дробно-рациональных функций $W_{y|v}(z)$ и $W_{u|v}(z)$ и множество этих функций является аффинным и допускает следующую параметризацию:

$$W_{y|v}(z)=W_1(z)+b_-(z)\psi(z), \tag{П.2}$$

$$W_{u|v}(z)=W_2(z)+a(z)(b_+(z))^{-1}\psi(z), \tag{П.3}$$

где параметр $\psi(z)$ — произвольная устойчивая дробно-рациональная функция и функции $W_1(z)$ и $W_2(z)$ — частные устойчивые решения уравнения

$$a(z)W_1(z)-b(z)W_2(z)=1. \tag{П.4}$$

2. Устойчивая функция $W_{y|v}(z)$ разлагается в ряд, сходящийся в D_1:

$$W_{y|v}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i,\qquad \sum_{i=0}^{\infty}|p_i|<\infty.$$

Передаточная функция $W_{y|v}(z)$ обладает также следующим свойством [6]:

$$y_t=\sum_{i=0}^{t-1}p_iv_{t-i}\qquad (t=1, 2, \ldots) \tag{П.5}$$

при нулевых начальных данных: $u_{-i}=y_{-i}=0$ при $i\geq 0$. Для устойчивых систем (1), (2) функционал (3) не зависит от начальных данных. Поэтому из (П.5) и (3) следует

$$C_v^{-1}J(\alpha,\beta)=\sum_{i=0}^{\infty}|p_i|\overset{\text{def}}{=}I^*(W_{y|v}(\cdot)). \tag{П.6}$$

3. Исходная задача может быть переформулирована следующим образом: на аффинном многообразии (П.2) найти функцию, минимизирующую функционал J^*, определенный в (П.6).

Пусть H – множество аналитичных в D_1 функций. Расширим задачу, разрешив параметру $\psi(\cdot)$ из H быть не только дробнорациональной функцией. Пусть M – подмножество H, задаваемое формулой (П.2) при $\psi(\cdot)\in H$.

Докажем, что M имеет в H конечную коразмерность. Точнее,

$$\text{(П.7)}\qquad \begin{gathered}\forall f(\cdot)\in H \quad \exists r(z)=r_0+r_1z+\ldots+r_{p-1}z^{p-1},\\ \exists\psi(\cdot)\in H: f(z)=r(z)+b_-(z)\psi(z),\end{gathered}$$

где $p=\deg b_-(z)$. Действительно, полюсы функции $f(z)/b_-(z)$ в D_1 являются корнями $b_-(z)$ и поэтому [7] найдется полином $r(z)$, такой, что

$$\frac{f(z)}{b_-(z)}-\frac{r(z)}{b_-(z)}=\psi(z),\qquad \deg r(z)\leqslant \deg b_-(z)-1$$

и $\psi(z)$ – аналитичная в $\bar{D}_1$ функция, что совпадает с (П.7).

Отметим, что H становится унитарным пространством (с нормой пространства Харди H_2), а M – замкнутым аффинным подпространством в нем, если ввести скалярное произведение из $L^2(S^1)$:

$$\text{(П.8)}\qquad \langle f(\cdot),g(\cdot)\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} f(z^{-1})g(z)\,\frac{dz}{z},\qquad f(\cdot),g(\cdot)\in H.$$

В результате получена бесконечномерная задача минимизации выпуклого функционала J^* из (П.6) на плоскости M конечной коразмерности. Она просто сводится к конечномерной задаче проектированием на ортогональное дополнение M. Удобно иметь в виду геометрическую интерпретацию функционала J^*.

Пусть $\bar{K}$ – единичный шар в метрике J^*:

$$\text{(П.9)}\qquad \bar{K}=\{f(\cdot)\in H\,|\,J^*(f)\leqslant 1\}.$$

Пусть $\lambda\geqslant 0$. Очевидно, что если $\lambda\bar{K}\cap M=\varnothing$, то минимум функционала J^* больше λ. Отсюда

$$J^*_{\min}(=C_v^{-1}J_{\max})=\min\{\lambda\geqslant 0\,|\,\lambda\bar{K}\cap M\neq\varnothing\}\stackrel{\text{def}}{=}\lambda_0.$$

Минимум достигается, как показывают проведенные ниже прямые вычисления. Таким образом, $\lambda_0\bar{K}$ касается M в точке $x(\cdot)$, и эта функция является передаточной от v_t к y_t для оптимального регулятора. Факт касания $\lambda_0\bar{K}$ и M равносилен касанию их ортогональных проекций $\lambda_0\bar{K}_{\text{пр}}$ и $M_{\text{пр}}$ вдоль M на ортогональное дополнение $M^\perp$ множества M. (Точнее, $M^\perp=\{f(\cdot)\in H\,|\,\forall\psi(\cdot)\in H\ \langle f(\cdot),\ b_-(\cdot)\psi(\cdot)\rangle=0\}$.)

Поскольку $M_{\text{пр}}=M\cap M^\perp=\{\bar{w}(\cdot)\}$ состоит из одной функции, то

$$\text{(П.10)}\qquad J^*_{\min}=\lambda_0=\min\{\lambda\geqslant 0\,|\,\bar{w}(\cdot)\in\lambda\bar{K}_{\text{пр}}\}.$$

Отметим, что $\bar{w}(\cdot)$ имеет наименьшую $L^2(S^1)$-норму в множестве M и поэтому ввиду (П.5) является оптимальной передаточной функцией в линейно-квадратичной задаче (1), (2) с белым шумом v_t. Точка касания $\lambda_0\bar{K}$ и M, конечно, может не совпадать с $\bar{w}(\cdot)$. Это и означает, что решения линейно-квадратичной и минимаксной задач различны.

Множество $M^\perp$ конечномерно, что следует из (П.7). Его можно определить в явном виде. Пусть $r(z)$ – полином степени не выше $p-1$. Тогда $n(z)=r(z)/b_-^*(z)\in H$ и при всех $\psi(\cdot)$ из H:

$$\langle n(\cdot),b_-(\cdot)\psi(\cdot)\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{r(z^{-1})}{b_-^*(z^{-1})}\,b_-(z)\psi(z)\,\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} z^{p-1}r(z^{-1})\psi(z)\,dz=0,$$

так как в круге $\bar{D}_1$ нет особенностей. Множество таких полиномов $r(z)$ имеет размерность p, и поэтому

$$M^\perp=\{n(z)=r(z)/b_-^*(z),\quad \deg r(z)\leqslant p-1\}.$$

Остается вычислить проекции $\bar{K}_{\text{пр}}$ и $\bar{w}(\cdot)$. Множество $\bar{K}$ в силу определений (П. 9) и (П.6) является выпуклой оболочкой своих крайних точек $\pm z^i$ $(i=0,1,\ldots)$. Поэтому $\bar{K}_{\text{пр}}$ является выпуклой оболочкой проекций этих точек $\pm(z^i)_{\text{пр}}$ на $M^\perp$.

Далее удобно ввести базис $(n_0(\cdot),\ldots,n_{p-1}(\cdot))$ в $M^\perp$, сопряженный в смысле скалярного произведения (П.8) к базису $(b_p/b_-^*(z),\ zb_p/b_-^*(z),\ldots,z^{p-1}b_p/b_-^*(z))$:

$$\langle n_i(z),z^jb_p/b_-^*(z)\rangle=\delta_{ij},\quad 0\leqslant i,j\leqslant p-1,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Проведем некоторые вычисления с целью удобного представления координат крайних точек $\overline{K}_{\text{пр}}$ в этом базисе. Пусть $\quad (z^i)_{\text{пр}} = \sum\limits_{j=0}^{p-1} g_{ij} n_j(\cdot)$.

Тогда

$$g_{ij} = ((z^i)_{\text{пр}}, b_p z^j / b_-^*(z)) = (z^i, b_p z^j / b_-^*(z)) = (z^{i-j+p} / b_-(z), b_p) = \gamma_{i-j},$$

где $\gamma_i = (z^{i+p} / b_-(z), b_p)$. Единственным полюсом функции $z^{i+p}/b_-(z)$ вне D_1 может быть $z=\infty$. Отсюда по теореме о вычетах: $\gamma_0 = 1$, $\gamma_i = 0$ при $i \leqslant -1$.

Если определить оператор V как сдвиг влево последовательности (γ_i), то

$$b_-^*(V)\gamma_i = V^p b_-(V^{-1})\gamma_i = (z^i b_-(z) / b_-(z), b_p) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, уравнение (4) выполнено и координаты проекций крайних точек K образуют векторы $\pm\Gamma_i$, определенные в (4'). Для завершения доказательства теоремы осталось найти проекцию M на $M^\perp$. Выберем какой-либо стабилизирующий регулятор (2) так, чтобы

$$W_{y|v}(z) = \alpha(z)(\alpha(z)a(z) - \beta(z)b(z))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i.$$

Отсюда, учитывая равенство $\Gamma_i = B^i \Gamma_0$, получим

$$\text{(П.11)} \qquad (W_{y|v}(\cdot))_{\text{пр}} = \overline{w}(\cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i (z^i)_{\text{пр}} \sim \sum_{i=0}^{\infty} p_i (B^i \Gamma_0) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i B^i \right) \Gamma_0 = \alpha(B)[\alpha(B)a(B) - \beta(B)b(B)]^{-1}\Gamma_0 = a(B)^{-1}\Gamma_0.$$

Здесь знак $\sim$ означает переход к координатам в выбранном базисе. Использовались также неравенства $\det \alpha(B) \neq 0$, $\det a(B) \neq 0$ в силу устойчивости системы (1), (2) и $b(B) = b_-(B) = 0$ по теореме Гамильтона – Кэли.

Таким образом, доказано, что в некотором базисе в $M^\perp$ координаты $\overline{K}_{\text{пр}}$ и $\overline{w}$ имеют тот вид, который указан в условии теоремы, т. е. $\overline{K}_{\text{пр}} \sim K$, $\overline{w} \sim a(B)^{-1}\Gamma_0$. В силу (П.10) функция $\overline{\alpha}(z)$ из (6) является оптимальной передаточной функцией от v_t к y_t. Полиномы $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ в заключении теоремы вычислены как решения (П.1) при оптимальной передаточной функции $W_{y|v}(z) = \overline{\alpha}(z)$. Остается добавить, что в $\mathbb{R}^p$ граничная точка выпуклого компактного множества раскладывается в выпуклую комбинацию p крайних точек, поэтому обоснован предложенный в заключении теоремы 1 способ вычисления коэффициентов оптимальных полиномов $\alpha(z)$ и $\beta(z)$.

Осталось доказать, что K – многогранник, если $b(z)$ не имеет корней на окружности S^1. Доказательство следует из экспоненциальной устойчивости уравнения (4') и того, что нуль является внутренней точкой множества $\text{co}\{\pm\Gamma_0, \pm\Gamma_1, \ldots, \pm\Gamma_{p-1}\}$ и тем более множества K. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1. Основное различие состоит в том, что роль полинома $b_-(z)$ играет здесь полином $b_-(z)c_-(z)$. Вместо (П.1), (П.2) и (П.4) имеем

$$\text{(П.12)} \qquad W_{y|v}(z) = W_1(z) + b_-(z)c_-(z)\psi(z) = \frac{\alpha(z)c(z)}{d(z)(\alpha(z)a(z) - \beta(z)b(z))},$$

$$a(z)d(z)W_1(z) - b(z)d(z)W_2(z) = c(z).$$

Ортогональное дополнение к множеству M имеет вид

$$M^\perp = \{n(\cdot) \in H \mid n(z) = r(z)(b_-^*(z)c_-^*(z))^{-1}, \quad \deg r(z) < p + k\}.$$

При выводе соотношения, аналогичного (П.11), следует учесть, что по теореме Гамильтона – Кэли

$$\alpha(G)c(G)[\alpha(G)a(G) - \beta(G)b(G)]^{-1} - c(G)a(G)^{-1} =$$
$$= a(G)^{-1}[\alpha(G)a(G) - \beta(G)b(G)]^{-1}c(G)b(G)\beta(G) = 0.$$

Уравнения для $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ из заключения теоремы являются решением (П.12) при оптимальной передаточной функции $W_{y|v}(z) = \overline{\alpha}(z)$.

Доказательство теоремы 3. Отличие от доказательства теоремы 1 состоит в том, что вместо (П.6) функционал качества во вспомогательной задаче имеет вид

$$J^\tau(W_{y|v}(\cdot)) = \sum_{i=0}^{\tau-1} |p_i|.$$

Отметим, что решение этой задачи неединственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саридис Дж.* Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980.
2. *Якубович Е. Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой.— Автоматика и телемеханика, 1975, № 9, с. 73—79.
3. *Якубович Е. Д.* Оптимальное управление линейной дискретной системой при наличии неизмеряемого возмущения.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 4, с. 49—54.
4. *Барабанов А. Е.* Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольными ограниченными помехами.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1980, № 13, с. 119—120.
5. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
6. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию
6.VII.1982

AN OPTIMAL CONTROLLER OF A LINEAR PLANT SUBJECTED TO CONSTRAINED NOISE

BARABANOV A. YE., GRANICHIN O. N.

The paper is concerned with a discrete scalar dynamic plant subjected to additive noise which is assumed to be uniformly constrained and otherwise arbitrary. The control function is sought among non-predictive stabilizing controllers. A technique for computing the coefficients of an optimal controller is proposed; the properties of the controller are analyzed. The resultant controller does not necessarily coincide with those obtained by analytical design with a quadratic performance functional.