РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

УДК 62.50;517.972

О.Н.Граничин, канд. физ.–мат. наук
(Санкт–Петербургский государственный университет)

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА НЕПРЕРЫВНОГО ОБЪЕКТА С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОМЕХОЙ

При минимаксном l_1 подходе к решению задачи управления непрерывным динамическим объектом с нерегулярной ограниченной помехой предлагается новый способ конструирования субоптимального регулятора, определяющего кусочно-постоянную стратегию управления, минимизирующую предельное отклонение "выхода" объекта от заданной траектории. В конце работы рассмотрен пример построения субоптимального регулятора для неминимально–фазового объекта с неустойчивостью по управлению второго порядка.

1. Введение

В последнее время возросло внимание к исследованию свойств ℓ_1–оптимальности в поведении динамических систем, функционирующих в условиях внешних нерегулярных ограниченных возмущений.

После дискретизации непрерывной модели динамика управляемого объекта достаточно часто может быть описана скалярным линейным разностным уравнением с аддитивной помехой, связывающим выходные, управляющие и возмущающие переменные. Будем считать, что целью выбора стратегии управления является минимизация абсолютной величины предельного отклонения выхода объекта от заданной траектории. К настоящему времени в литературе сложились два подхода к описанию свойств аддитивной помехи в уравнении объекта управления: стохастический и минимаксный. При стохастическом подходе последовательности помех приписываются какие–либо статистические свойства и достижение цели управления понимается в статистическом смысле. Результаты полученные в этой области хорошо известны, носят достаточно законченный характер и в целом составляют стройную математическую теорию. При минимаксном подходе предполагается, что последовательность помех ограничена, а в остальном произвольна. Цель управления понимается в достижении наилучшего качества управления при наихудщей для выбранного управления реализации последовательности помех.

Интерес к решению задачи о построении оптимального линейного стабилизирующего регулятора для линейного дискретного неминимально–фазового объекта с ограниченными нерегулярными помехами появился после известной работы [1], в которой задача была решена для устойчивого по управлению объекта. Полученное решение имело простой и естественный вид. Позже в [2] было получено решение для систем с запаздыванием и в [3] для сильно–неустойчивого по управлению объекта (старший коэффициент при управлении в уравнении объекта по абсолютной величине превосходил сумму модулей остальных коэффициентов). Отличительной особенностью первых решений задачи было совпадение оптимального регулятора с соответствующим регулятором, получаемым при стохастической постановке задачи. В [4] задача была решена в теоретическом плане для произвольного неминимально–фазового скалярного объекта управления. Было доказано существование оптимального регулятора и установлено, что в общем случае структура оптимального регулятора отличается от соответствующего оптимального регулятора в стохастической постановке. Для построения оптимального регулятора был предложен алгоритм, требующий, к сожалению, перебора значительного числа вариантов. В [5] получены формулы для аналитического вычисления оценки "снизу" минимального значения функционала качества и предложен алгоритм построения субоптимального регулятора. Степени многочленов, определяющих вид оптимального регулятора, в общем случае могут быть очень высокими и в практических приложениях удобнее использовать не оптимальный регулятор, а некоторый другой — с многочленами меньшей степени [6]. Возможность вычислить оценку "снизу" для функционала качества позволяет при этом оценить качество выбранной стратегии управления. Задача l_1–оптимизации при функционале качества более общего вида рассматривается в [7].

Результаты, представленные в этой работе, продолжают исследования, начатые в [1–5]. Вид полученной в [5] оценки "снизу" значения функционала качества для общего вида скалярного линейного уравнения подтолкнул автора к мысли о том, как при дискретизации непрерывной системы, имеющей эксцесс полюсов и нулей равный единице, выбрать некоторую специальную последовательность уменьшающихся шагов дискретизации, при которой последовательность минимальных значений соответствующих функционалов качества дискретизированных систем сходится к полученной оценке "снизу" предельного минимально возможного значения функционала.

Для непрерывных систем с нерегулярной ограниченной помехой попытки решить соответствующую оптимизационную задачу в более общей и традиционной постановке [8,9] сталкиваются с принципиальными трудностями в вопросах с разумным истолкованием полученных теоретических результатов. Оптимальные регуляторы часто оказываются не рациональными. Для приближенного решения задач приходится рассматривать рациональные аппроксимациии. Как и в настоящей работе в итоге приходится решать систему трансцендентных уравнений, но существенно большей размерности.

2. Постановка задачи

Рассморим непрерывную систему управления с передаточной функцией от входа к выходу

$$G(s) \;=\; \frac{g_0(s-\lambda^{(1)})\dots(s-\lambda^{(m)})\dots(s-\lambda^{(n-1)})}{(s-\bar\lambda^{(1)})(s-\bar\lambda^{(2)})\dots(s-\bar\lambda^{(n)})}.$$

Будем считать, что эксцесс полюсов и нулей системы равен единице, первые m нулей передаточной функции $G(s)$ неустойчивые,

$$\mathrm{Re}\;\; \lambda^{(i)} > 0\;, \quad i\;=\;1,\dots,m\;,$$

а остальные устойчивые

$$\mathrm{Re}\;\; \lambda^{(i)} < 0\;, \quad i\;=\;m+1,\dots,n-1\;;$$

(здесь Re λ обозначает вещественную часть комплексного числа λ), пусть полюса передаточной функции $G(s)$ $\bar\lambda^{(1)},\dots,\bar\lambda^{(n)}$ не совпадают с ее первыми m неустойчивыми нулями. Выходные сигналы наблюдаюся на фоне нерегулярной помехи, ограниченной константой C_v. Система функционирует в непрерывном времени $t\in[0,+\infty)$.

Выберем некоторый шаг дискретизации $\delta>0$. Рассмотрим семейство кусочно–постоянных функций, задающих управляющие воздействия, изменяющиеся в моменты времени $\delta_k \quad k\;=\;0,1,2,\dots$. Рассматривая дискретизацию заданной непрерывной системы в нулевом приближении (см.[10]), при достаточно малых δ получаем дискретную систему с передаточной функцией

$$H_\delta(z) \;=\; \frac{h_\delta z\,(z-\lambda_\delta^{(1)})\dots(z-\lambda_\delta^{(m)})\dots(z-\lambda_\delta^{(n-1)})}{(z-\bar\lambda_\delta^{(1)})(z-\bar\lambda_\delta^{(2)})\dots(z-\bar\lambda_\delta^{(n)})}$$

с полюсами $\bar\lambda_\delta^{(1)},\dots,\bar\lambda_\delta^{(m)},\dots,\bar\lambda_\delta^{(n-1)}$ и нулями $\lambda_\delta^{(1)},\dots,\lambda_\delta^{(n)}$. Известно, что при $\delta\to 0$ (см.[10]), полюсы передаточной функции $H_\delta(z)$ связаны с полюсами $G(z)$ соотношениями :

$$\bar\lambda_\delta^{(i)} \;=\; e^{-\delta\bar\lambda^{(i)}}\;, \quad i\;=\;1,\dots,n\;,$$

а для нулей подобные соотношения выполняются приближенно

$$\lambda_\delta^{(i)} \approx e^{-\delta\lambda^{(i)}}\ , \quad i = 1,\ldots,n-1\ .$$

В форме вход–выход уравнение для соответствующей дискретной динамической системы может быть записано в виде линейного скалярного разностного уравнения

$$a_\delta(q^{-1})y_k = b_\delta(q^{-1})u_{k-1} + v_k\ , \quad k = 1,2,\ldots\ . \tag{1}$$

где $k = 1,2,\ldots$, y_k – выходные, u_k – управляющие переменные, q^{-1} – оператор сдвига на такт назад: $q^{-1}y_{(k)} = y_{k-1}$, v_k – ограниченные помехи:

$$\mid v_k \mid \le \delta^n C_v \quad k = 1,2,\ldots\ ,$$

$a_\delta(z)$ и $b_\delta(z)$ — многочлены, определяемые полюсами и нулями передаточной функции $H_\delta(z)$

$$a_\delta(z) = (z-\bar\lambda_\delta^{(1)})(z-\bar\lambda_\delta^{(2)})\ldots(z-\bar\lambda_\delta^{(n)}),$$

$$b_\delta(z) = h_\delta(z-\lambda_\delta^{(1)})\ldots(z-\lambda_\delta^{(m)})\ldots(z-\lambda_\delta^{(n-1)}).$$

Цель управления для дискретизированной системы состоит в построении линейного стабилизирующего регулятора вида

$$c_\delta(q^{-1})u_k = d_\delta(q^{-1})(y_k - \bar y_{\delta,k}) \tag{2}$$

с некоторыми многочленами $c_\delta(z)$ и $d_\delta(z)$ от z, обеспечивающего

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \mid y_k - \bar y_{\delta,k} \mid \le \mathcal{I}_\delta\ , \qquad \mathcal{I}_\delta = \inf_{(c_\delta,d_\delta)} \sup_{\{v^{(k)} \le \delta^n C_v\}} \overline{\lim_{k\to\infty}} \mid y_k - \bar y_{\delta,k} \mid\ ,$$

$$\sup_k(\mid y_k \mid + \mid u_k \mid) < \infty\ ;$$

при заданной заранее ограниченной последовательности выходов $\{y_{\bar\delta,k}\}$. Последовательность значений $\{u_k\}$, формируемая соответствующим оптимальным стабилизирующим регулятором, может использоваться при построении кусочно–постоянной стратегии управления для непрерывной системы. При этом величина функционала $\mathcal{I}_\delta$ в какой–то мере также характеризует качество соответствующей стратегии управления.

Рассмотрим множество всевозможных соответствующих заданной непрерывной системе дискретизированных задач при различных шагах дискретизации δ. Предположим, что существует предел

$$\mathcal{I}_\star = \underline{\lim_{\delta\to\infty}} \mathcal{I}_\delta. \tag{3}$$

<u>*Постановка задачи.*</u> Требуется предложить способ выбора последовательности $\{\delta_j\}$, $\delta_j > 0$, $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$ и алгоритм построения соответствующих линейных стабилизирующих регуляторов

$$c_{\delta_j}(q^{-1})u_{\delta_j,k} \ = \ d_{\delta_j}(q^{-1})(y_k - \bar{y}_{\delta_j,k})$$

для дискретизированных систем, обеспечивающих выполнение предельных соотношений

$$\sup_{\{v_{\delta_j,k} \le \delta_j^n C_v\}} \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \mid y_k - \bar{y}_{\delta_j,k} \mid \le \ \mathcal{I}_\star + \mathcal{O}(\delta_j) \ ,$$

$$\sup_k(\mid y_k \mid + \mid u_{\delta_j,k} \mid) \ < \infty \ ;$$

где $\mathcal{O}(\delta_j)$ – некоторая функция, значения которой стремятся к нулю при $\delta_j \to 0$.

3. Минимизация функцианала качества

Для дискретных объектов с нерегулярной ограниченной помехой значение функционала качества, минимизирующего предельное отклонение от нуля выхода обекта, прямо пропорционально сумме модулей коэффициетов передаточной функции от помехи к выходу объекта (ℓ_1–норма). В [4] впервые было доказано существование оптимальной передаточной функции стабилизирующего реглятора для дискретного объекта, имеющей столько же ненулевых коэффициентов, какова степень неустойчивости объекта по управлению.

Для простоты будем считать, что все неустойчивые нули передаточной функции $G(s)$ различны. Пусть $X = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})^T$ некоторый вектор из $\mathcal{R}_+^m = \{X \in \mathcal{R}^m, \quad x_i > 0, \quad i = 1, \dots, m\}$. Определим матричную функцию

$$W(X) \ = \ \begin{Vmatrix} e^{-\lambda^{(1)}x^{(1)}} & e^{-\lambda^{(1)}x^{(2)}} & \dots & e^{-\lambda^{(1)}x^{(m)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda^{(m)}x^{(1)}} & e^{-\lambda^{(m)}x^{(2)}} & \dots & e^{-\lambda^{(m)}x^{(m)}} \end{Vmatrix}$$

и вектор

$$A = \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n (\bar{\lambda}^{(1)} - \lambda^{(i)})}, \ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\bar{\lambda}^{(2)} - \lambda^{(i)})}, \dots, \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\bar{\lambda}^{(m)} - \lambda^{(i)})} \right)^T \in \mathbf{R}^m \ .$$

Обозначим $F(X) \ = \ (f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X))^T \ = \ W^{-1}(X)A$ — набор функций от X , определенных в $\mathcal{R}_+^m$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{I}(X) = C_v \sum_{i=1}^m \mid f_i(X) \mid \ . \tag{4}$$

Т е о р е м а 1 *Оценка "снизу" для минимально–возможного значения функционала (3) существует и совпадает с минимумом функционала (4) в $\mathcal{R}_+^m$.*

$$\mathcal{I}_\star \;=\; \min_{X\in\mathcal{R}_+^m} \mathcal{I}(X)$$

Доказательство теоремы 1 приведено в последнем разделе этой главы и опирается на результаты [3–5]. Функционал (4) достигает своего минимального значения в некоторой внутренней точке $X_{opt}\in\mathcal{R}_+^m$, так как его значение неограниченно возрастает при $X\to\infty$ или при стремлении X к границе множества $\mathcal{R}_+^m$. Из определения $F(X)$ видно, что

$$f_i(X) \;\neq\; 0\;, \qquad i=1,2,\ldots,m\;.$$

для любого $X_{opt}\in\mathcal{R}_+^m$. Несложно сформулировать необходимые условия, которым должна удовлетворять точка X_{opt}, минимизирующая в $\mathcal{R}_+^m$ функционал (4). Обозначим

$$\mathrm{sign}(X) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(x^{(1)}) \\ \mathrm{sign}(x^{(2)}) \\ \vdots \\ \mathrm{sign}(x^{(n)}) \end{pmatrix}, \;\; \mathrm{sign}(x^{(i)}) \;=\; \begin{cases} \frac{x^{(i)}}{|x^{(i)}|}\;, & \text{если} \;\; x^{(i)}\neq 0, \\ 0\;, & \text{если} \;\; x^{(i)}=0 \end{cases}.$$

Перепишем функционал (4) в виде

$$\mathcal{I}(X) = C_v \mathrm{sign}(F(X))^T F(X).$$

Необходимое условие минимума

$$\frac{\partial \mathcal{I}(X)}{\partial x^{(i)}}(X_{opt}) = 0, \qquad i=1,2,\ldots,m.$$

Введем обозначение

$$W(X) \;=\; \begin{Vmatrix} 0 & ,\ldots, & -\lambda^{(1)}e^{-\lambda^{(1)}x^{(i)}} & ,\ldots, & 0 \\ \vdots & ,\ldots, & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ,\ldots, & -\lambda^{(m)}e^{-\lambda^{(m)}x^{(i)}} & ,\ldots, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда после несложных вычислений, получаем

$$\frac{\partial \mathcal{I}(X)}{\partial x^{(i)}}(X) = -\mathrm{sign}(F(X))^T W^{-1}(X) W_i(X) F(X) \quad i=1,2,\ldots,m\;.$$

Из предыдущих рассуждений следует доказательство теоремы.

Т е о р е м а 2 *Необходимое условие минимума функционала (4). Точка $X_{opt} \in \mathcal{R}^m_+$ должна удовлетворять системе m трансцендентных уравнений*

$$\mathrm{sign}(F(X_{opt}))^T W^{-1}(X_{opt}) W_i(X_{opt}) F(X_{opt}) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Заметим, что в последней формуле вместо выбора неизвестного m-мерного вектора $\mathrm{sign}(F(X_{opt}))$, состоящего из плюс/минус единиц, можно просто перебрать все 2^{m-1} различных вариантов, решить столько же различных систем уравнений и выбрать среди их решений одно, минимизирующее функционал (4).

4. Построение субоптимального регулятора

Рассмотрим множество $\mathcal{Q}^m_+$ m – мерных векторов с рациональными координатами. Пусть $X_{opt} \in \mathcal{R}^m_+$ точка минимума функционала (5.12). Существует последовательность $\{X_j\}$, $X_j \in \mathcal{Q}^m_+$, $X_j \to X_{opt}$ при $j \to \infty$ Из вида функционала (5.12) видно , что

$$\mathcal{I}(X_j) \to \mathcal{I}(X_{opt}) \;\; j \to \infty$$

и

$$\mathcal{I}(X_j) = \mathcal{I}_\star + \mathcal{O}(\|X_j - X_{opt}\|_{\mathcal{R}^m_+})$$

Здесь $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^m_+}$ – обозначение для нормы вектора в $\mathcal{R}^m_+$. Пусть $\{\delta_j\}$ — последовательность рациональных чисел $\delta_j \to 0$ такая, что

$$L_{\delta_j} = (l^{(i)}_{\delta_j}, \ldots, l^{(m)}_{\delta_j})^T = \delta_j X_j \in \mathcal{Z}^m_+ = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \ldots \times \mathbf{N}$$

$\mathbf{N}$– множество натуральных чисел. Для каждого значения шага дискретизации δ_j можно рассмотреть соответствующую дискретную систему. При достаточно больших j многочлен $b_{\delta_j}(z)$ представим в виде

$$b_{\delta_j}(z) = b^-_{\delta_j}(z) b^+_{\delta_j}(z),$$

в котором $b^-_{\delta_j}(z)$ соответствует m неустойчивым нулям системы, а $b^+_{\delta_j}(z)$ — остальным устойчивым нулям. Рассмотрим полиномы, определяющие вид линейного субоптимального стабилизирующего регулятора (2):

$$c_{\delta_j}(z) = (1 + c^{(1)}_{\delta_j} z^{l^{(1)}_{\delta_j}} + \ldots + c^{(m)}_{\delta_j} z^{l^{(m)}_{\delta_j}}) b^+_{\delta_j}(z),$$

$$d_{\delta_j}(z) = d^{(0)}_{\delta_j} + d^{(1)}_{\delta_j} z + \ldots + d^{\bar{l}_{\delta_j}-1}_{\delta_j} z^{\bar{l}_{\delta_j}-1}, \;\bar{l}_{\delta_j} = \max(l^{(1)}_{\delta_j}, \ldots, l^{(m)}_{\delta_j})$$

неизвестные коэффициенты которых находятся из уравнения

$$a_{\delta_j}(z)(1 + c^{(1)}_{\delta_j} z^{l^{(1)}_{\delta_j}} + \ldots + c^{(n)}_{\delta_j} z^{l^{(n)}_{\delta_j}}) - z b^-_{\delta_j}(z) d_{\delta_j}(z) = 1,$$

которое однозначно разрешимо.

Т е о р е м а 3 *При введенных выше обозначениях*

$$\mathcal{I}_{\delta_j} = \mathcal{I}_\star + \mathcal{O}(\delta_j) \ .$$

Доказательство теоремы 3 также приведено в конце главы вместе с доказательством теоремы 1.

5. Заключение и пример

Рассмотрим непрерывный объект управления (ОУ) второго порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{(s+\ln 0.8)(s+\ln 0.9)}{(s-\ln 2)(s-8.37287)(s+0.1829643)}$$

Этот ОУ неустойчивый по управлению, оба нуля передаточной функции неустойчивые $\lambda^{(1)} = -\ln 0.8, \quad \lambda^{(2)} = -\ln 0.9$. Уровень помех $C_v = 1$. С учетом введенных ранее обозначений

$$W(X) \ = \ \begin{Vmatrix} 0.8^{x_1} & 0.8^{x_2} \\ 0.9^{x_1} & 0.9^{x_2} \end{Vmatrix}, \qquad A \ = \ \begin{pmatrix} -0.6428569 \\ -0.7137128 \end{pmatrix}.$$

Функционал (4) при этом имеет вид

$$\mathcal{I}(X) = \frac{\mid -0.6428569 \cdot 0.9^{x_2} + 0.7137128 \cdot 0.8^{x_2} \mid}{\mid 0.8^{x_1} 0.9^{x_2} - 0.8^{x_2} 0.9^{x_1} \mid} +$$

$$+ \frac{\mid 0.6428569 \cdot 0.9^{x_1} - 0.7127128 \cdot 0.8^{x_1} \mid}{\mid 0.8^{x_1} 0.9^{x_2} - 0.8^{x_2} 0.9^{x_1} \mid}.$$

Исследование этого функционала на экстремум приводит к оптимальной точке

$$X_{opt} = (1 \, , \ \ 9.094096)^T,$$

при которой значение функционала (3) равно $\mathcal{I}_\star = 0.8504958$.

Рассмотрим четыре различных случая выбора шага дискретизации $\delta = 0.1;\ 0.01;\ 0.001;\ 0.0001$. Результаты исследования соответствующих субоптимальных значений функционалов (4) приведены в таблице 1.

Таблица 1.

δ	l_1	l_2	$\mathcal{I}_\delta$	$\mathcal{I}_\delta - \mathcal{I}_\star$
0.1	10	91	1.435992	0.5854962
0.01	100	909	0.8984116	0.0479158
0.001	1000	9094	0.8551918	0.004696
0.0001	10000	90941	0.8509649	0.0004691

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теорем 1 и 3. Введем передаточные функции системы (1)–(2) от помехи $v_{\delta,n}$ к выходу $y_{\delta,n}$ и к управлению $u_{\delta,n}$

$$H_y(z) = \frac{c_\delta(z)}{a_\delta(z)c_\delta(z) - zb_\delta(z)d_\delta(z)},\ H_u(z) = \frac{d_\delta(z)}{a_\delta(z)c_\delta(z) - zb_\delta(z)d_\delta(z)}.$$

Нетрудно доказать (см.[10]), что устойчивость системы (1)–(2) равносильна отсутствию общих неустойчивых множителей у многочленов $c_\delta(z)$, $d_\delta(z)$ и отсутствию полюсов у функций $H_y(z)$ и $H_u(z)$ в единичном круге $D_1 = \{z : \mid z \mid \leq 1\}$. Аналитические функции, удовлетворяющие последнему свойству, будем называть устойчивыми. Разложим многочлен $b_\delta(z)$ на устойчивую и неустойчивую части

$$b_\delta(z) = b_\delta^-(z)b_\delta^+(z)$$

Каждому стабилизирующему регулятору (2) с взаимно простыми многочленами $c_\delta(z)$ и $d_\delta(z)$ однозначно соответствует пара устойчивых дробно–рациональных функций $H_y(z)$ и $H_u(z)$ и множество этих функций является афинным и допускает следующую параметризацию

$$H_y(z) = \bar{c}_\delta(z) + zb_\delta^-(z)\psi(z), \tag{5}$$

$$H_u(z) = \bar{d}_\delta(z) + a_\delta(z)(b_\delta^+(z))^{-1}\psi(z),$$

где $\psi(z)$ — произвольная устойчивая дробно–рациональная функция и $\bar{c}_\delta(z)$ и $\bar{d}_\delta(z)$ – решения уравнения

$$a_\delta(z)\bar{c}_\delta(z) - zb_\delta^-(z)\bar{d}_\delta(z) = 1. \tag{6}$$

В частности, уравнение (6) однозначно разрешимо при условии: степень полинома $\bar{c}_\delta(z)$ не меньше m. Устойчивая функция $H(z)$ разлагается в степенной ряд, сходящийся в D_1:

$$H_y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} H^{(i)}z^i \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \mid H \mid^{(i)} < \infty\ .$$

Передаточная функция $H_y(z)$ обладает также следующим свойством

$$y_\delta^{(k)} - \bar{y}_\delta^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} H^{(i)}v_\delta^{(k-i)}$$

при нулевых начальных данных $u_\delta^{(-i)} = y_\delta^{(-i)} = 0$, при $i \geq 0$ Для устойчивых систем (1)–(2) функционал (3) не зависит от начальных данных, поэтому

$$I_\delta(c_\delta, d_\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \mid H_y^{(i)} \mid \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{I}(H_y(\cdot)). \tag{7}$$

Задача минимизации функционала (3) может быть переформулирована так: на афинном многообразии (5) найти функцию, минимизирующую функционал $\tilde{I}(\cdot)$, определенный в (7). Многочлен $b_\delta^-(z)$ при достаточно малых $\delta > 0$ имеет вид

$$b_\delta^-(z) \; = \; \prod_{i=1}^{m}(z - \lambda_\delta^{(i)}) \; .$$

Выберем целое неотрицательное число $r > 0$ такое, что многочлен

$$c_r(\lambda) \; = \; \prod_{i=1}^{m}(z^{2^r} - (\lambda_\delta^{(i)})^{2^r}) \; = \; c_r^{(0)} + c_r^{(1)} z + \ldots + z^{m \cdot 2^r}$$

сильно неустойчивый (см.[3]), т.е. его коэффициенты удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=0}^{m2^r-1} \mid c_r^{(i)} \mid \leq 1.$$

В качестве такого числа r можно взять, например,

$$r \; = \; \left[\log_2(2^m - 1)/\log_2(\max\{\lambda_\delta^{(1)}, \ldots, \lambda_\delta^{(m)}\})\right].$$

Покажем, что существует стабилизирующий регулятор (2), минимизирующий функционал (3), передаточная функция $H_y(z)$ которого (5) является многочленом степени не меньшей $m2^r$.

Определим вспомогательный многочлен

$$\chi(z) \; = \; \prod_{i=1}^{m}(z - \lambda_\delta^{(i)}) \prod_{i=1}^{m}(z - (\lambda_\delta^{(i)})^2) \ldots \prod_{i=1}^{m} \left(z^{2^{r-1}} - (\lambda_\delta^{(i)})^{2^{r-1}}\right).$$

Легко убедиться, что

$$c_r(z) \; = \; b_\delta^-(z)\chi(z).$$

Выберем произвольный регулятор (2), передаточная функция $\bar{H}_y(z)$ (5) которого имеет степень больше $m2^r$, т.е. $\bar{H}_y(z)$ либо многочлен степени большей $m2^r$, либо $\bar{H}_y(z)$ раскладывается в D_1 в бесконечный степенной ряд. В силу (5) функция

$$H_y(z) \; = \; \bar{H}_y(z) + z b_\delta^-(z)\psi(z)$$

является передаточной для некоторого стабилизирующего регулятора (2), если $\psi(z)$ – устойчивая дробно–рациональная функция. Функцию $\bar{H}_y(z)$ можно представить в виде отношения двух многочленов

$$\bar{H}_y(z) \ = \ \varphi_1(z)/\varphi_2(z),$$

в котором $\varphi_2(z)$ устойчивый многочлен. Многочлены $c_r(z)$ и $\varphi_2(z)$ не имеют общих корней. Определим полиномы $\bar{\varphi}(z)$ и $p(z)$ из уравнения

$$\varphi_1(z) \ = \ -zc_r(z)\bar{\varphi}(z) + p(z)\varphi_2(z)$$

и условия, что степень многочлена $p(z)$ не больше $m2^r$. Рассмотрим устойчивую дробно–рациональную функцию

$$\bar{\psi}(z) \ = \ \bar{\varphi}(z)/\varphi_2(z) \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\psi}^{(i)} z^i.$$

В силу (3) многочлен $p(z)$ удовлетворяет соотношению

$$p(z) \ = \ \bar{H}_y(z) + c_r(z)\bar{\psi}(z) \ = \ \bar{H}_y(z) + zb_{\delta}^{-}(z)\frac{\bar{\varphi}(z)\chi(z)}{\varphi_2(z)}$$

и, следовательно, является передаточной функцией некоторого стабилизирующего регулятора. Рассмотрим последовательность многочленов $\{p_j(z)\}$, определяемых многочленом $p(z)$ $c_r(z)$ и коэффициентами разложения функции $\bar{\psi}(z)$

$$p_0(z) \ = \ p(z) \ , \ \ p_{j+1}(z) \ = \ p_j(z) - c_r(z)\bar{\psi}^{(j)} z^j \ = \ p(z) - c_r(z)\sum_{i=0}^{j} \bar{\psi}^{(i)} z^{(i)} \ ,$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots$$

Эта последовательность при $j \to \infty$ стремится к функции $\bar{H}_y(z)$. Можно получить

$$\tilde{I}(p_{j+1}(\cdot)) \ = \ \sum_{i=0}^{m2^r+j} \mid p_{j+1}^{(i)} \mid = \mid p_j^{(0)} \mid + \ldots + \mid p_j^{(j-1)} \mid +$$

$$+ \mid p_j^{(j)} - \bar{\psi}^{(j)} c_r^{(0)} \mid + \ldots + \mid p_{(j)}^{m2^r+j-1} - \bar{\psi}^{(j)} c_r^{(m2^r-1)} \mid +$$

$$+\mid \bar{\psi}^{(j)} \mid \geq \sum_{i=0}^{m2^r+j-1} \mid p_j^{(i)} \mid + \bar{\psi}^{(j)} \left(1 - \sum_{i=0}^{m2^r-1} \mid c_r^{(i)} \mid\right) \ \geq$$

$\geq \ \tilde{I}(p_j(\cdot)) \ \ \geq \tilde{I}(p_0(\cdot)) \ \ = \ \ \tilde{I}(p(\cdot))$.,$\tilde{I}(p(\cdot)) \ \ \leq \ \ \tilde{I}(\bar{H}_y(\cdot))$.,, m2^r найдется другая степени не большей $m2^r$, значение функционала качества для которой не хуже. С другой стороны, среди многочленов ограниченной степени, удовлетворяющих (5), существует минимизирующий функционал (5.11).

Обозначим $\bar{p}(z)$ – многочлен, степени не большей $m2^r$, минимизирующий функционал (3). Рассмотрим параметризацию множества передаточных функций (5), в которой $\bar{c}_\delta(z)$ полином степени не большей m, являющийся одним из решений уравнений (6). Переформулируем задачу минимизации функционала (3). В пространстве $\mathcal{R}^{m2^r}$ найти минимум функционала

$$I(\psi^{(0)}, \ldots, \psi^{(m2^r)}) \ = \ \tilde{I}(p(\cdot)) \ .$$

Рассмотрим выпуклое многогранное множество Ω, задаваемое системой $m2^r$ неравенств

$$\mathrm{sign}(\bar{p}^{(i)})(\bar{c}^{(i)} + b_-^{(1)}\psi^{(i-1)} + b_-^{(2)}\psi^{(i-2)} + \ldots + b_-^{(m)}\psi^{(i-m)}) \geq 0$$

Здесь $b_-^{(i)}$ это коэффициенты многочлена $b_\delta^-(z)$, $\psi^{(j)} = 0$, если $j < 0$. Исследуемый функционал линеен на Ω, коэффициенты многочлена $\psi(z)$, соответствующего оптимальному многочлену $\bar{p}(z)$, принадлежат множеству Ω, а, следовательно, наш функционал ограничен снизу на Ω. Хорошо известно, что линейный ограниченный снизу функционал на выпуклом многогранном множестве достигает своего минимального значения в одной из его вершин. Вершинам множества Ω соответствуют передаточные функции, являющиеся многочленами с m ненулевыми коэффициентами. Отсюда следует, что многочлен $\bar{p}(z)$ имеет вид

$$\bar{p}(z) \ = \ 1 + f^{(1)}z^{l_1} + \ldots + f^{(m)}z^{l_m},$$

и минимальное значение соответствующего функционала (3) равно

$$I_\delta \ = \ \delta^n C_v \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \mid f^{(i)} \mid \right) \ .$$

По построению коэффициенты многочлена $\bar{p}(z)$ должны удовлетворять системе из m уравнений

$$a_\delta(\lambda_\delta^{(i)})\bar{p}(\lambda_\delta^{(i)}) - \lambda_\delta^{(i)} b_\delta^-(\lambda_\delta^{(i)})\bar{d}_\delta(\lambda_\delta^{(i)}) \ = \ 1$$

Учитывая тот факт, что $\lambda_\delta^{(i)}$ — корни $b_\delta^-(z)$, получаем

$$\bar{p}(\lambda_\delta^{(i)}) \ = \ 1/a_\delta(\lambda_\delta^{(i)}) \ , \ \ i = 1, 2, \ldots, m \ .$$

Обозначив

$$A_\delta \ = \ \left(1/a_\delta(\lambda_\delta^{(i)}) \ , \ldots, 1/a_\delta(\lambda_\delta^{(m)})\right)^T \ ,$$

$$
\bar{W}_\delta(L_\delta) = \begin{Vmatrix} (\lambda_\delta^{(1)})^{l_1} & (\lambda_\delta^{(1)})^{l_2} & \dots & (\lambda_\delta^{(1)})^{l_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_\delta^{(m)})^{l_1} & (\lambda_\delta^{(m)})^{l_2} & \dots & (\lambda_\delta^{(m)})^{l_m} \end{Vmatrix}
$$

и

$$
F_\delta = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)})^T, \qquad L_\delta = (l^{(1)}, \dots, l^{(m)})^T \ ,
$$

последнюю систему уравнений можно переписать в виде

$$
\bar{W}_\delta(L_\delta) F_\delta = A_\delta \ .
$$

Далее получаем

$$
W(\delta L_\delta) F_\delta = \delta^{-n} A + \Big[(A_\delta - \delta^{-n} A) + (W(\delta L_\delta) - \bar{W}_\delta(L_\delta)) F_\delta\Big]
$$

и, следовательно,

$$
F_\delta = \delta^{-n} W^{-1}(\delta L_\delta) A + \bar{\mathcal{O}}(\delta)
$$

с некоторой функцией $\bar{\mathcal{O}}(\delta)$ стремящейся к нулю при $\delta \to 0$.

Для минимального значения функционала (3) при малых $\delta > 0$ имеем

$$
\mathcal{I}_\delta = \delta^n C_v (1 + \delta^{-n} \mathrm{sign}(W^{-1}(\delta L_\delta) A)^T W^{-1}(\delta L_\delta) A) + \mathcal{O}(\delta).
$$

Отсюда при $\delta \to 0$ имеем

$$
\lim_{\delta \to \infty} \mathcal{I}_\delta = \lim_{\delta \to \infty} \mathrm{sign}(W^{-1}(\delta L_\delta) A)^T W^{-1}(\delta L_\delta) A \geq \min_{X \in \mathcal{R}_+^m} \mathcal{I}(x) = \mathcal{I}_\star.
$$

При этом равенство в последнем соотношении получается при выборе описанной при формулировке теоремы 3 последовательности $\{\delta_j\}$ шагов дискретизации. Последнее доказывает утверждения теорем 1 и 3.

Список литературы

[1] *Якубович Е.Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой // АиТ. 1975. No. 9. С.73–79.

[2] *Якубович Е.Д.* Оптимальное управление линейной дискретной системой при наличии неизмеряемого возмущения // АиТ. 1977. No. 4. С.49–54.

[3] *Барабанов А.Е.* Оптимальное управление неминимально–фазовым дискретным объектом с произвольными ограниченными помехами // Вестн. Ленинград. ун–та. 1980. No. 13. С.119–120.

[4] *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // АиТ. 1984. No. 5. С.39–46.

[5] *Граничин О.Н.* Построение субоптимального регулятора линейного объекта с ограниченной помехой // АиТ. 1990. No. 2. С.59–62.

[6] *Polyak B., Halpern M.* Robust Stability and Design of Linear Discrete-Time SISO Systems Under l_1 Uncertainties // IEEE TAC. 1999. V.44. P.2076–2080.

[7] *Khammash M.* A New Approach to the Solution of the l_1 Control Problem: The Scaled-Q Method // IEEE TAC. 2000. V.45. P.180–187.

[8] *Dahlen M., Peason J.* l_1–Optimal Compensators for Continuous-Time Systems// IEEE TAC. 1987. V.32. P.889–895.

[9] *Wang Z-Q., Sznaier M., Blanchini F.* Further Results on Rational Approximation of l_1 Optimal Controller// IEEE TAC. 1995. V.40. P.552–557.

[10] *Острем К., Виттенмарк В.* Системы управления с ЭВМ. М.: Наука, 1987.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т.Поляком.

Поступила в редакцию 4.07.2000