Рандомизированные алгоритмы в задачах обработки данных и принятия решений

О. Н. Граничин
oleg_granichin@mail.ru

Во многих практических задачах механический перенос на сложные системы обычных детерминированных алгоритмов, работоспособных для простых систем, приводит к неразрешимым противоречиям. В частности, возникает огромное количество так называемых *неразрешимых за реальное время* задач. В последнее время все чаще используются «рандомизированные» подходы к решению таких сложных задач.

Рандомизированный алгоритм — это не что иное, как процедура, в которой один или несколько шагов основаны на случайном выборе правила, т. е. при использовании рандомизированных алгоритмов на каком-то этапе вместо того, чтобы самим принять решение, мы призываем судьбу (случай) выбирать за нас. Но тогда естественно возникает вопрос: зачем мудрому человеку прибегать к судьбе? Судьба не является специалистом ни в чем, выбор делается случайно. Итак, *почему от рандомизированных алгоритмов может быть польза?* Успешное использование рандомизированных методов требует ясного ответа на этот вопрос. Статья дает этот ответ в минимально математизированном виде, а также приводит примеры различных практических задач из разных областей, где рандомизированные методы были успешно применены.

Ключевые слова: рандомизированные алгоритмы, оптимизация, оценивание.

Введение

В последнее время активно развиваются *рандомизированные* методы решения различных практических задач. С одной стороны, в задачах, требующих большого объема «перебора» вариантов, алгоритмы, основанные на случайном выборе, позволяют за ограниченное время добиваться хороших результатов с определенной вероятностью. С другой стороны, возможность рандомизации процессов наблюдений позволяет во многих случаях компенсировать негативное влияние систематических погрешностей (ошибок моделей).

Традиционный подход к процессу конструирования самых разнообразных систем обработки данных и принятия решений основывается на детерминированных алгоритмах. Этот подход, однако, может быть обобщен включением *рандомизации*. В рандомизированных алгоритмах один или несколько шагов основываются на случайном выборе, при котором среди многих детерминированных правил выбирается одно в соответствии с некоторой случайной схемой. Рандомизация позволяет ввести новый термин «вероятностно успешный алгоритм». Во многих случаях, когда невозможно достичь детерминированной успешности, вероятностная успешность предлагается как значимая альтернатива. Рандомизация становится мощным средством для решения целого ряда задач, считающихся неразрешимыми с помощью детерминированных методов.

В этой статье описаны общие идеи перспективности использования рандомизированных алгоритмов. Ее цель — не всеобъемлющий обзор, а дать ответ на вопрос: *почему от рандомизированных алгоритмов может быть польза?* Статья дает ответ на этот вопрос в минимально математизированном виде, а также содержит примеры различных практических задач из разных областей, где рандомизированные методы были успешно применены.

1. Обработка данных «на лету»

Развитие средств контроля и вычислительной техники в настоящее время позволяет перейти к решению многих практических задач «на лету», встраивая «умные» блоки в контуры управления простых и сложных систем, в технологические процессы, в разнообразные системы поддержки принятия решений и т. д.

Обычно в условиях реального времени для «извлечения» нужной информации мы имеем:

- существенные ограничения в ресурсах;
- недостаточное количество данных с необходимым разнообразием.

Какие в связи с этим возникают новые трудности при обработке данных и в какой степени возможно их преодолеть?

Точное решение любой задачи возможно при ее точной постановке. Но связи и отношения в реально существующем мире настолько сложны и многообразны, что практически невозможно математически строго описать многие явления. Типичным теоретическим подходом является выбор близкой к реальным процессам математической модели и включение в нее различных *помех*, частично компенсирующих «грубость» математической модели и характеризующих неконтролируемые внешние возмущения. Трудности в использовании детерминированных подходов приводят к необходимости поиска алгоритмов, обеспечивающих высокое качество оценки при минимальных предположениях о статистических свойствах помех.

2. Возможно ли осмысленное оценивание при произвольных внешних помехах?

Уже в школьной программе каждый из нас сталкивается с физическими экспериментами, в которых измеряется результат того или иного воздействия на систему. Например, прикладывая к пружине разные усилия, мы получаем разные длины растяжения или сжатия. Но полученные результаты — это не произвольные числа, они определяются характеристиками (параметрами) самой пружины (коэффициентом упругости). Кроме того, на результат влияют и конкретные условия проведения эксперимента, определяемые внешними силами, помехами и т. п. (в частности, трение).

Этот пример, как и многие другие, «укладывается» в простейшую схему типичной задачи оценивания по наблюдениям неизвестного параметра θ^*:

$$y_t = \theta^* \cdot u_t + v_t, \tag{1}$$

в которой:

- можно выбирать входы (управления) $u_t,\ t = 1, 2, ..., N,$;
- измерять выходы y_t.

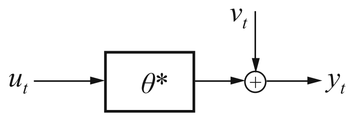

Рис. 1. Модель наблюдений

Поясним схему задачи, используя рис. 1. Система является «черным ящиком» с входом u_t и выходом y_t. Система характеризуется неизвестным нам параметром θ^* (в примере с пружиной θ^* — это коэффициент упругости). Экспериментатор может выбирать воздействия на систему u_t, которые поступают на вход «черного ящика» (в примере с пружиной мы можем растянуть или сжать ее на расстояние u_t). На выходе «черного ящика» к результату добавляется внешняя помеха v_t, которая никак не связана с «внутренними» процессами «черного ящика» (в примере с пружиной выход с помехой — это погрешности измерений, вносимые динамометром).

Формальная постановка задачи выглядит следующим образом. *Требуется* по последовательности входов и выходов $\{u_t, y_t\}$ оценить (определить) неизвестный числовой параметр θ^* при отсутствии какой-либо информации (ограничений) о природе помех $\{v_t\}$.

Алгоритм последовательного оценивания неизвестного параметра θ^* из (1) состоит из следующих двух шагов.

1. Выбор входного воздействия (управления) u_t и подача этого воздействия на вход нашей системе.
2. Получение ответа от системы y_t.
3. Оценивание параметра θ^* на основе имеющихся данных u_t, y_t (например, вычисление оценки $\widehat{\theta}_t$ или множества $\widehat{\Theta}_t$, содержащего θ^*).

Если бы в условиях задачи дополнительно можно было бы предположить случайную (вероятностную) природу помех v_t, то при выполнении условий усиленного закона больших чисел [34] можно было бы говорить об оценивании неизвестного параметра θ^* путем простого усреднения данных наблюдения:

$$\widehat{\theta}_t = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} y_i.$$

При $N = 7$ результаты измерений системы, у которой значение параметра θ^* равно 3, со случайными независимыми и равномерно распределенными на интервале $[-0.5; 0.5]$ помехами v_t, приведены в табл. 1 (строка 5). Они показывают близость оценки $\widehat{\theta}_7 = 2.99$ к истинному параметру $\theta^* = 3$. При имитационном моделировании «черный ящик» был как «оракул», выдающий ответы на задаваемые вопросы (входы). Подчеркнем, что его истинный параметр системы θ^* экспериментатору был неизвестен.

Таблица 1. **Оценивание при центрированной помехе**

t	1	2	3	4	5	6	7
u_t	1	1	1	1	1	1	1
$v_t = rand() - 0.5$							
y_t	2.9	2.8	3.2	3.3	2.6	3.4	2.7
$\widehat{\theta}_t$	2.9	2.85	2.97	3.05	2.96	3.03	2.99

Если наблюдения проводились бы также со случайной помехой, но у которой математическое ожидание $m = E\{v_t\}$ (например, $m = 1$, табл. 2, строка 3) было бы неизвестно, т. е. информация о природе помех у наблюдателя отсутствует, то результаты моделирования (табл 2, строка 5) показывают ошибочность работы алгоритма определения θ путем усреднением данных наблюдений — $\widehat{\theta}_7 = 3.99$ и существенно превосходит истинное значение 3.

Несмотря на кажущуюся абсурдность постановки задачи оценки при произвольных внешних помехах, из практических потребностей ее все-таки часто приходится решать.

В детерминированном алгоритме каждый шаг задается детерминированным правилом с использованием результатов предыдущих шагов, и полученная новая информация о системе (выход) возвращается для использования в последующих шагах алгоритма (см.

Таблица 2. **Оценивание при неизвестном среднем значении помехи**

t	1	2	3	4	5	6	7
u_t	1	1	1	1	1	1	1
$v_t = rand() - 0.5 + m,\ m = 1$							
y_t	3.9	3.8	4.2	4.3	3.6	3.9	4.2
$\widehat{\theta}_t$	3.9	3.85	3.97	4.05	3.96	4.03	3.99

рис. 2). Такая точка зрения, однако, может быть обобщена до следующего определения рандомизированных алгоритмов.

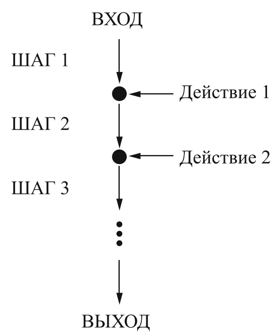

Рис. 2. Модель детерминированного алгоритма

Определение 1. *Рандомизированным называется алгоритм, в котором выполнение одного или несколько шагов основано на случайном правиле, т. е. среди многих детерминированных правил одно выбирается случайно в соответствии с вероятностью P.*

В зависимости от специфики конкретной задачи вероятность или является искусственным элементом, вводимым в алгоритм для улучшения разрешимости проблемы, или в рассматриваемой системе могут присутствовать измеряемые случайные элементы. Выбор этой вероятности P является частью конструирования рандоминизированного алгоритма.

Рассмотрим следующее правило случайного выбора для первого шага рандомизированного алгоритма последовательного оценивания неизвестного параметра θ^* (см. рис. 3 из (1):

$$u_t = \begin{cases} +1, \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ -1, \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

На втором шаге по известным парам значений (u_t, y_t) формируем величины:

$$\bar{y}_t = u_t \cdot y_t.$$

Для «новой» последовательности наблюдений справедлива похожая на (1) модель:

$$\bar{y}_t = \theta^* \cdot \bar{u}_t + \bar{v}_t,$$

в которой $\bar{u}_t = u_t^2$ и $\bar{v}_t = u_t \cdot v_t$.

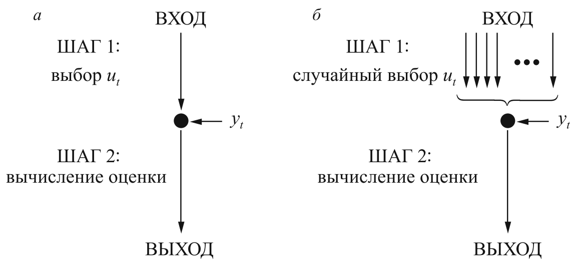

Рис. 2. Детерминированный (*а*) и рандомизированный (*б*) алгоритмы

Пусть, как и ранее при моделировании, v_t — случайные помехи с неизвестным математическим ожиданием. Если v_t — внешние помехи, то естественно считать, что они независимы с нашим рандомизированным правилом выбора входов (управлений) на шаге 1. Следовательно:

$$E\{\bar{v}_t\} = E\{u_t \cdot v_t\} = E\{u_t\} \cdot E\{v_t\} = 0 \cdot m = 0,$$

т. е. в новой модели наблюдений задача об оценивании неизвестного параметра θ^* из (1), не имевшая решения, превращается при использовании случайного правила выбора входов (управлений) на шаге 1 рандомизированного алгоритма в стандартную задачу об оценивании неизвестного параметра θ^*, наблюдаемого на фоне независимых центрированных помех, как в примере, показанном в табл. 1.

В табл. 3 сведены соответствующие результаты имитационного моделирования.

Таблица 3. **Оценивание по рандомизированному алгоритму при неизвестном среднем значении помехи**

t	1	2	3	4	5	6	7
u_t	-1	1	-1	1	1	1	-1
$v_t = rand() - 0.5 + m,\ m = 1$							
y_t	-2.1	3.8	-1.8	4.3	3.6	4.4	-2.3
$\bar{u}_t$	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{y}_t$	2.1	3.8	1.8	4.3	3.6	4.4	2.3
$\widehat{\theta}_t$	2.1	2.95	2.57	3.00	3.12	3.33	3.19

Как видно, полученные в строке 7 табл. 3, результаты существенно лучше, чем в строке 5 табл. 2, но в отличие от результатов строки 5 табл. 1 качество оценок получилось ниже, т. к. «новые ошибки» $\bar{v}_t$ имеют большую дисперсию по сравнению с v_t.

Более строгий математический результат о гарантированном множестве (доверительном интервале) возможных значений неизвестного параметра θ^* можно получить для произвольных внешних помех v_t, следуя методу, детально описанному и обоснованному Марко Кампи в [39] (см. [2, 8] на русском языке). Опуская технические детали, опишем метод построения доверительного интервала.

1. Пусть $M = 8$, выберем случайно 7 ($= M - 1$) разных групп по четыре индекса $T_1, \ldots, T_7$.
2. Вычислим семь частичных сумм $\bar{s}_i = \sum_{j \in T_i} \bar{y}_j,\ i = 1, \ldots, 7$.
3. формируем доверительный интервал

$$\widehat{\Theta} = [\min_{i \in 1:7} \bar{s}_i; \max_{i \in 1:7} \bar{s}_i],$$

содержащий θ^* с вероятностью $p = 75\%$ ($= 1 - 2 \cdot 1/M$, см. [39]).

Доверительный интервал является стохастическим, поскольку зависит от случайного выбора входного сигнала. Доверительная вероятность $p = 75\%$ означает, что при 75 наборах входов из 100 получающийся доверительный интервал будет содержать θ^*, причем эта вероятность точная, а не нижняя граница, и этот результат справедлив для любой последовательности шумов $\{v_t\}$.

По описанному методу для данных $\{(u_t, y_t)\}$ из табл. 3 получаем результаты табл. 4.

Таблица 4. **Усреднения по «четверкам» наблюдений**

i	T_i	$\bar{s}_i$
1	$\{2, 3, 4, 5\}$	3.375
2	$\{1, 3, 4, 6\}$	3.15
3	$\{2, 3, 5, 6\}$	3.4
4	$\{1, 2, 6, 7\}$	3.15
5	$\{1, 4, 5, 7\}$	3.075
6	$\{2, 3, 5, 7\}$	2.875
7	$\{1, 4, 6, 7\}$	3.275

Следовательно, интервал $\widehat{\Theta} = [2.875; 3.4]$ содержит неизвестный параметр θ^* с вероятностью $p = 75\%$, что вполне соотносится с условиями задачи, т. к. при моделировании использовалось фактическое значение $\theta^* = 3$. Взяв вместо семи пятнадцать ($M = 16$) частичных сумм $\bar{s}_i$, можно вдвое сократить вероятность ошибки, получив $p = 87.5\%$, но при этом, вообще говоря, получится больший доверительный интервал $\widehat{\Theta}$.

Итак, можно дать утвердительный ответ на вопрос, вынесенный в заголовок этого раздела. Для казалось бы абсурдной задачи об оценивании параметра при произвольных внешних помехах, с которой принципиально не может справиться ни один детерминированный алгоритм, внесение рандомизации в процесс выбора входных данных позволяет получить вполне осмысленные результаты.

Введя искусственно вероятность в рассматриваемую задачу, можно при характеристике качества работы алгоритма говорить о его вероятностной успешности.

Определение 2. *Рандомизированный алгоритм называется вероятностно-успешным с вероятностью p, если вероятность его правильного результата не меньше p.*

Достижение успешных результатов с высокой степенью вероятности в отличие от детерминированного случая соответствует осмысленному выбору компромисса: если полностью гарантированного результата получить невозможно, то лучше иметь 75%-ю гарантию вместо никакой.

Конечно, не во всех задачах компромисс возможен. Во многих случаях нужен гарантированный ответ на 100%. Но «защищая» рандомизированные алгоритмы, надо отметить, что уровень достоверности p обычно является параметром алгоритма, который может быть настроен пользователем. Параметр p в определении 2 ослабляет понятие детерминированной разрешимости, для которой вероятность успеха может быть только 0 или 1, образно выражаясь, результат «черный» или «белый». Переходя к рандомизированным алгоритмам, p становится непрерывным параметром, пробегающим интервал $[0; 1]$, задавая тот или иной оттенок «серого».

Замечание. Альтернативный вероятностный подход к решению задачи оценивания — байесовский [32], при котором присутствующим в системе помехам v_t априори приписывается вероятностная природа Q, но его невозможно применить при произвольных внешних помехах (в худшем случае), т. к. все выводы имеют вероятностную основу предположений о системе. Байесовский и рандомизированний подходы совершенно различны с практической точки зрения. В байесовском подходе Q описывает вероятность того или иного значения помехи v_t по сравнению с другими, т. е. выбор Q является частью модели задачи. В отличие от этого, вероятность P в рандомизированном подходе является тем, что мы искусственно выбрали и используем. P существует только в нашем алгоритме, и, следовательно, нет традиционной проблемы плохой модели, как это может случиться с Q при байесовском подходе.

3. Рандомизированные алгоритмы как способ снижения вычислительной сложности

Многие авторы выступают за использование рандомизированных алгоритмов для уменьшения сложности вычислений по сравнению с более традиционными детерминированными подходами. Идея состоит в следующем. Если детерминированный алгоритм требует чрезмерных вычислений для обработки всей доступной информации, то можно сознательно отказаться от части информации и перейти к решению упрощенной задачи с частичной информацией.

При этом можно применить рандомизированный подход к определению решения с высокой вероятностью успеха. Конечный результат — компромисс между гарантией полного успеха и вычислительной реализуемостью (возможностью получить ответ за реальное ограниченное время).

Заметим, что причина обращения к рандомизированным методам осталась та же — это недостаток информации. Однако здесь другая подоплека: информацию вполне возможно собрать и всю, но ее часть сознательно отбрасывается для увеличения вычислительной реализуемости.

Успеху рандомизированных алгоритмов способствует еще и тот факт, что производительность и вероятность успеха рандомизированных алгоритмов может быть достаточно точно оценена аналитическими методами.

4. Примеры применения рандомизированных подходов

4.1. Метод Монте-Карло

Истоки рандомизированных алгоритмов лежат в идеях метода статистического моделирования Монте-Карло (МК), предложенного в Лос-Аламосе Джоном фон Нейманом, Николасом Метрополисом и Станиславом Уламом в ходе работ над Манхэттенским проектом [51]. Метод МК задает простую схему для оценки среднего значения (математического ожидания) $E\{F(X)\}$ на основе случайной выборки образцов x_k случайной величины X (рандомизации X). Первоначально стохастический подход использовали для аппроксимации многомерных интегралов в уравнениях переноса, возникших в связи с задачей о движении нейтрона в изотропной среде. В университетских курсах математики обычно приводят следующий пример способа вычисления интеграла:

$$f(\theta) = \int_{x \in X} F(\theta, x) dx,$$

которым удобно пользоваться при невозможности аналитического интегрирования. Пусть множество X является параллелепипедом с объемом $V(X)$ и предположим, что значения функции F ограничены: $0 \le F(\theta, x) \le F_{\max}$. Геометрический смысл интеграла — объем под графиком функции F. Зафиксируем натуральное число N, выберем в параллелепипеде $\Pi \times [0, F_{\max}] \subset R^{d+1}$ случайно N точек $z_1, z_2, \dots, z_N$ и подсчитаем среди них число K тех, у которых последняя координата не превосходит значения функции F в соответствующей точке, определяемой первыми d координатами. Хорошей оценкой для значения интеграла будет:

$$f(\theta) \approx V(X) F_{\max} \frac{K}{N}.$$

Причем, в силу закона больших чисел и неравенства Чебышева [34], необходимую точность приближения можно гарантировать *априори* при выборе количества точек N. Более точно, для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ справедлива следующая оценка для вероятности ошибки:

$$\mathsf{P}\left\{ \left| \frac{f(\theta)}{V(X)F_{\max}} - \frac{K}{N} \right| \ge \epsilon \right\} \le \frac{f(\theta)(V(X)F_{\max} - f(\theta))}{N\epsilon^2 (V(X)F_{\max})^2}.$$

При небольшой размерности d множества X во многих случаях можно при вычислении интегралов пользоваться и традиционными детерминированными приближенными методами, но при $d \gg 1$ на практике фактически ничем нельзя воспользоваться, кроме метода Монте-Карло, сложность которого (как видно из последней формулы) не зависит от размерности d. И при небольших d, когда функция задана неявно, а необходимо определить область, заданную в виде сложных неравенств, стохастический метод может оказаться более предпочтительным.

На рис. 4 приведен пример интегрирования одномерной функции методом Монте-Карло. Для этого 30 случайно выбранных в прямоугольнике $[0; 25] \times [0; 100]$ точек были сравнены с 30-ю соответствующими значениями функции и было подсчитано количество точек $K = 14$, попавших под график. В результате получаем $f \approx 25 \cdot 100 \cdot 14/30 = 1166\frac{2}{3}$. При этом вероятность того, что относительная ошибка превысит 5% равна примерно $0,11$. Конечно в одномерном случае ($d = 1$) по 30 измерениям можно было бы

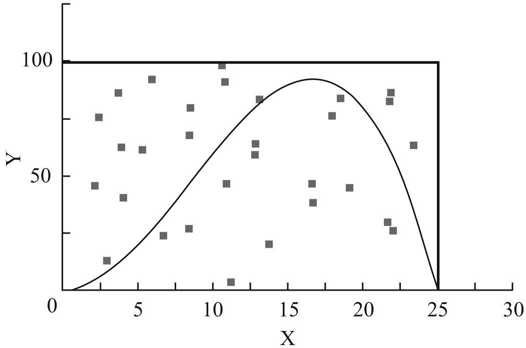

Рис. 4. Интегрирование методом Монте-Карло

хорошо аппроксимировать интеграл и методом разбиения X на 30 отрезков, но при $d \gg 1$, разбивая X на отрезки, ту же точность можно обеспечить при 30^d измерений, что несоизмеримо велико по сравнению всего с $N = 30$ вычислений для метода Монте-Карло.

Появление и развитие метода Монте-Карло неслучайно совпало по времени с созданием первых вычислительных машин. Первые ЭВМ уже могли с большой скоростью генерировать псевдослучайные числа, что резко расширило круг задач, для решения которых стохастический подход оказался более эффективным, чем другие математические методы. В 1950-х годах метод активно использовался для расчетов при разработке водородной бомбы.

Более подробное описание метода Монте-Карло можно найти, например, в книге С. М. Ермакова [21].

Основанный на методе Монте-Карло сценарный подход может быть использован при обнаружении неисправностей или нетрадиционного поведения в самых разнообразных системах. В [9] описана идея рандомизированного подхода к обнаружению разрывов функции, инспирированная сценарным подходом. В дальнейшем ее развитие привело к новому рандомизированному алгоритму устойчивой кластеризации, который состоит в построении по небольшому случайно выбранному количеству точек нескольких равномерных аппроксимаций индексной функции специального вида, имеющей «скачок» в точке, соответствующей истинному количеству кластеров [10, 26, 36, 47]. Имитационные эксперименты показывают работоспособность нового алгоритма при определении нескольких тысяч кластеров в условиях неопределенности, на порядок превышающей их действительное количество. При этом использование нового алгоритма позволяет существенно сократить общую вычислительную сложность процесса поиска кластеров.

4.2. Случайный поиск

Многие практические задачи в математической форме представляются в виде задач о поиске корня некоторой функции или о поиске точки минимума. При этом часто аналитическое решение найти очень трудно. Один из альтернативных подходов — случайный поиск, при котором последовательность оценок решения строится итеративно, выбирая на каждой итерации новую оценку на основе сдвига старой в случайно выбираемом направлении. Методы случайного поиска в русскоязычной литературе исследовались, например, в работах Л. А. Растригина [28], Ю. А. Сушкова [29], А. Жилинскаса и А. А. Жиглявского [22]. При решении задач глобальной оптимизации в настоящее время активно используются алгоритмы имитации отжига [20, 30, 50, 52] и генетические алгоритмы [49], в основе которых также лежат рандомизированные правила.

При разработке новых архитектур процессоров в компании Intel активно используется метод случайного поиска в рандомизированном алгоритме расчета пиксельной фазовой маски для иммерсионной литографии [37] — одного из основных этапов технологического процесса производства микросхем.

С. Якушкин успешно использовал рандомизированные алгоритмы случайного поиска при генерации аппаратной и программной частей вычислительных устройств [35].

В [7, 11] для адаптивной подстройки изменяемого параметра сервера, использующегося для обработки очереди заданий, было предложено использовать рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации.

В [5] описаны детали использования рандомизированных алгоритмов стохастической оптимизации в системе управления загрузкой узлов распределенной вычислительной сети.

Рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации в задаче самообучения описан и обоснован в [12].

В последних четырех примерах традиционные предположения о независимости и центрированности внешних помех не соблюдаются в силу специфики рассматриваемых задач. При этом рандомизация способствовала не только ускорению процесса обработки данных, но и снижению негативного влияния «почти произвольных» внешних помех наблюдений.

Идея использования случайных входных сигналов для устранения эффекта смещения была выдвинута Р. Фишером [40] в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Рекуррентные алгоритмы оценивания параметров регрессии при случайных входных сигналах рассматривались также в книгах А. Алберта, Л. Льюнга, Т. Сёдерстрёма, П. Юнга [1, 25, 33, 55], но при стандартных предположениях о помехах, а именно, считалось, что они представляют собой последовательности случайных величин с нулевым средним, независимых или слабозависимых. О. Н. Граничиным, А. В. Гольденшлюгером и Б. Т. Поляком в [13, 46] были предложены рандомизированные алгоритмы оценки параметров линейной регрессии, состоятельные при почти произвольных помехах.

Детальному анализу возможностей рандомизированных алгоритмов в задачах оценивания и оптимизации при произвольных помехах посвящена книга О. Н. Граничина и Б. Т. Поляка [14]. Рассматриваемый в ней новый тип рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, называемых в англоязычной литературе Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA), был предложен в работах О. Н. Граничина [15], Дж. Спалла [53], Б. Т. Поляка и А. Б. Цыбакова [27], Х.-Ф. Чена, Т. Дункан и Б. Пасик-Дункан [43]. Эти работы основаны на аппроксимации градиента вдоль случайно выбранного направления — рандомизации, которая опирается на некоторые контролируемые случайные величины, влияющие на результаты наблюдений, существующие в системе или добавляемые экспериментатором. Для этих алгоритмов установлены на практике и обоснованы теоретически следующие свойства:

- асимптотически оптимальная скорость сходимости;
- минимальность числа измерений в пределах данной итерации;

- состоятельность при почти произвольных помехах;
- работоспособность в нестационарных задачах;
- «естественность» реализации на квантовом компьютере.

4.3. Рандомизация в управлении

Одна из существенных проблем, с которой сталкиваются при синтезе схем управления, — это недостаточная *вариативность* последовательности наблюдений: *«управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими»* (А. А. Фельдбаум, [31]). Например, если цель адаптивного управления состоит в минимизации отклонения вектора состояния системы от заданной траектории, то это часто приводит к вырожденной последовательности наблюдений, когда получаемых данных не хватает для определения важных характеристик системы (ее идентификации). В то время как для успешного проведения идентификации неизвестных параметров системы должно быть обеспечено «разнообразие» наблюдений. Учитывая возможности прямого влияния на управляемые процессы через входные переменные системы, в 1986 г. О. Н. Граничиным совместно с В. Н. Фоминым [16] и Х.-Ф. Ченом с Л. Гао [44] было предложено включать в канал управления пробное рандомизированное возмущение дополнительно к основному управлению при синтезе адаптивного асимптотически-оптимального управления (минимаксного и среднеквадратического соответственно). В современных работах М. Кампи, Э. Вейера [41] и Дж. Калафиори, Л. Фаджиано [38] рассматриваются перспективы использования такого же типа рандомизированных стратегий управления для идентификации и синтеза робастного оптимального управления на конечном интервале времени.

В близких по постановкам задачах фильтрации при произвольных ограниченных помехах в наблюдениях рандомизированные модификации стандартных алгоритмов рассматривались в работах [3, 4, 6, 17, 23, 48, 54].

4.4. Рандомизация измерений

В связи с массовым переходом к обработке потоков двумерных (2-D) и трехмерных (3-D) данных резко увеличились объемы обрабатываемой информации. Сложность традиционных методов квантования сигналов возрастает по экспоненциальному закону с ростом размерности сигналов (звуки, картинки, объемные тела). Квантование 1-D сигналов при $N = 10^3$ отсчетах соответствует объему данных, пропорциональному 10^6 в случае 2-D, а в случае 3-D — 10^9. В современных приложениях для цифровых фото- и видеокамер требования о необходимой частоте (скорости, Nyquist Rate) измерений настолько высоки, что слишком большое количество получающихся данных надо сильно сжимать перед хранением или пересылкой. В других приложениях, включая системы отображения (медицинские сканеры, радары) и быстродействующие аналого-цифровые конвертеры, увеличение частоты измерений оказывается очень дорогостоящим. С практической точки зрения очень полезно исследовать возможности восстановления многомерных сигналов $\theta \in R^d$ по сравнительно небольшому набору наблюдений $y \in R^m$ при $m << d$, что, конечно же, нереализуемо в общем случае. Но в последнее время на помощь традиционной теории обработки сигналов приходит новая парадигма *compressive sensing* («опознание со сжатием»), позволяющая достаточно точно восстанавливать «разреженные» (sparse) многомерные сигналы []42, 45. При этом используются рандомизированные измерения по схеме

$$y = A\theta + v,$$

где θ является восстанавливаемым сигналом, а A — случайная матрица оператора измерений, преобразующFя сигналы в наборы данных размерности $m \times d$. По результатам этих измерений исходная информация восстанавливается почти полностью за счет применения методов ℓ_1-оптимизации: θ находится как решение некоторой задачи вида:

$$||\theta||_1 = \sum_j |\theta[j]| \to \min \; : \quad y = \sum_{j=1}^{N} \theta[j]u[j].$$

Более детальное описание новой парадигмы и много примеров можно найти в [18, 19, 20].

Заключение

В статье представлено несколько примеров практических задач, которые могут быть успешно решены с помощью рандомизированных методов. Авторы надеются, что эти примеры могут простимулировать дальнейшие размышления у читателей и получить более глубокое понимание потенциала и ограничений рандомизации.

Одним из важных наблюдений является то, что в рандомизированном алгоритме выбор некоторых действий делается наугад, т. е. для выбора призываем судьбу. Так как «судьба» не является специалистом ни в чем, то преимущество использования рандомизированного алгоритма не всегда может быть выражено «хорошим» выбором судьбы. Преимущество в новом восприятии проблемы разрешимости состоит в том, что в дополнение к двум крайним значениям «белое»–«черное» («разрешимо»–«неразрешимо») вводится множество оттенков «серого». С точки зрения перспектив решений для «худшего» случая (worst-case) «серый» результат может быть более приемлемым, чем несколько «черных» среди многих «белых».

Важно отметить, что в процессе оценки уровня «серого» можно прибегать к результатам теории вероятности, чья эффективность порой действительно удивляет. Это добавляет уверенности в перспективах использования рандомизированных методов.

Список литературы

[1] *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 223 с.

[2] *Амелин К. С., Граничин О. Н.* Новые рандомизированные алгоритмы в управлении и обработке данных // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 7. 2010. С. 3–68.

[3] *Амелин К. С., Граничин О. Н.* Возможности рандомизации в алгоритмах предсказания калмановского типа при произвольных внешних помехах в наблюдении // Гироскопия и навигация. № 2 (73). 2011. С. 38–50.

[4] *Амелин К. С.* Возможности рандомизации в алгоритме предсказания отклонения от курса легкого беспилотного летательного аппарата при произвольных внешних помехах в наблюдении // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 7. 2011. С. 93–116.

[5] *Вахитов А. Т., Граничин О. Н., Паньшенсков М. А.* Методы оценивания пропускной способности в распределенных системах // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2009. № 11. С. 45–53.

[6] *Вахитов А. Т., Граничин О. Н., Гуревич Л. С.* Алгоритм стохастической аппроксимации с пробным возмущением на входе в нестационарной задаче оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2009. № 11. С. 70–79.

[7] *Волкович Я. В., Граничин О. Н.* Адаптивная оптимизация сервера, обрабатывающего очередь заданий // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Т. 1. С. 17–28.

[8] *Граничин О. Н.* Неасимптотическое доверительное множество для параметров линейного объекта управления при почти произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. Готовится к печати в 2011.

[9] *Граничин О.Н., Халидов В.И.* Рандомизированный подход к обнаружению разрывов функции // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 1. 2005. С. 73–80.

[10] *Граничин О. Н., Шалымов Д. С., Аврос Р., Волкович З.* Рандомизированный алгоритм нахождения количества кластеров // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. С. 86–98.

[11] *Граничин О. Н.* Стохастическая оптимизация и системное программирование // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 6. 2010. С. 3–44.

[12] *Граничин О. Н., Измакова О. А.* Рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации в задаче самообучения // Автоматика и телемеханика. 2005. № 8. С. 52–63.

[13] *Граничин О. Н.* Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе для идентификации статического нестационарного дискретного объекта // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Вып. 3. 1988. С. 92–93.

[14] *Граничин О. Н., Поляк Б. Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003. 293 с.

[15] *Граничин О. Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на вхо-

де пробные возмущения // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. 1989. № 1(4). С. 19–21.

[16] *Граничин О. Н., Фомин В. Н.* Адаптивное управление с использованием пробных сигналов // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 100–112.

[17] *Граничин О. Н.* Неминимаксная фильтрация при неизвестных ограниченных помехах в наблюдениях // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 125–133.

[18] *Граничин О. Н.* Рандомизация измерений и ℓ_1-оптимизация // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 5. 2009. С. 3–23.

[19] *Граничин О.Н., Павленко Д.В.* Рандомизация данных и ℓ_1-оптимизация // Компьютерные инструменты в образовании. 2010. № 1. С. 5–13.

[20] *Граничин О. Н., Павленко Д. В.* Рандомизация получения данных и ℓ_1-оптимизация (опознание со сжатием) (Обзор) // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 3–28.

[21] *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Сер. «Теория вероятностей и математическая статистика». М.: Изд–во Наука, 1971. 471 с.

[22] *Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г.* Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991. 248 с.

[23] *Кривоконь Д. С., Вахитов А. Т.* Нестационарная оптимизация с шагом предсказания в задаче отслеживания объекта при помощи двух камер // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 7. 2011. С. 117–128.

[24] *Лопатин А. С.* Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Т. 1. С. 133–149.

[25] *Льюнг Л., Сёдерстрём Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 431 с.

[26] *Морозков М. А.* Быстрый рандомизированный алгоритм нахождения точного количества кластеров в большом множестве данных // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 7. 2011. С. 69–82.

[27] *Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. Т. 26. С. 126–133.

[28] *Растригин Л. А.* Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968. 376 с.

[29] *Сушков Ю. А.* Об одном способе организации случайного поиска // Исследование операций и статистическое моделирование. Изд-во Ленингр. гос. ун-та. 1972. Т. 1. С. 180–185.

[30] *Тихомиров А. С.* О быстрых вариантах алгоритма отжига (simulated annealing) // Стохастическая оптимизация в информатике. 2009. Т. 5. С. 65–90.

[31] *Фельдбаум А. А.* О проблемах дуального управления // В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. М.: Наука, 1972. С. 89–108.

[32] *Фомин В. Н* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984. 288 с.

[33] *Цыпкин Я. З.* Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.

[34] *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. 574 с.

[35] *Якушкин С. И.* Программная и аппаратная оптимизация при генерации вычислительных устройств // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Т. 1. С. 281–293.

[36] *Avros R., Granichin O., Shalymov D., Volkovich Z., Weber G.-W.* Randomized Algorithm of Finding the True Number of Clusters Based on Chebychev Polynomial Approximation (Chapter 6) // Data Mining: Found. and Intell. Paradigms, D. E. Holmes, L. C. Jain (Eds.). Berlin Heidelberg; Springer-Verlag, ISRL 23. 2011. Vol. 1. P. 131–155.

[37] *Borodovsky Y., Cheng W., Schenker R., Singh V.* Pixelated Phase Mask as Novel Lithography RET // Proc. SPIE 6924, 69240E. 2008. P. 1–14.

[38] *Calafiore G. C., Fagiano L.* Robust Model Predictive Control: the Random Convex Programming Approach // Proc. of 2011 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Denver, USA, Sept, 2011. P. 222–227.

[39] *Campi M. C.* Why is Resorting to Fate Wise? A Critical Look at Randomized Algorithms in Systems and Control // European Journal of Control, Vol. 5, 2010. P. 419–430.

[40] *Fisher R.A.* The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd. 1935. 335 p.

[41] *Campi M. C., Weyer E.* Non-Asymptotic Confidence Sets for the Parameters of Linear Transfer Functions // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 55, No 12. 2010. Dec. P. 2708–2720.

[42] *Candes E., Romberg J., Tao T.* Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. Vol. 52, No 2. P. 489–509.

[43] *Chen H.-F., Duncan T. E., Pasik-Duncan B. A* Kiefer-Wolfowitz Algorithm with Randomized Differences // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. Vol. 44, No 3. P. 442–453.

[44] *Chen H.-F., Guo L.* Convergence Rate of Least–Squares Stochastic Systems // Int. Journal of Control. 1986. Vol. 44, No 5. P. 1459–1477.

[45] *Donoho D.* Compressed Sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. Vol. 52, No 4. P. 1289–1306.

[46] *Goldenshluger A. V., Polyak B. T.* Estimation of Regression Parameters with Arbitrary Noise // Mathematical Methods of Statistics. 1993. Vol. 2, No 1. P. 18–29.

[47] *Granichin O., Morozkov M., Volkovich Z.* Necessary Conditions for the Confidence Level of the Randomized Algorithm of Finding the True Number of Clusters // Proc. of 2011 IEEE International Symposium on Intelligent Control, Denver, USA, Sept, 2011. P. 1002–1007.

[48] *Granichin O. N.* Linear Regression and Filtering under Nonstandard Assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 49. 2004. Oct. P. 1830–1835.

[49] *Holland J. H.* Adaptation in Natural and Artificial Systems. University of Michigan Press. Ann Arbor, 1975. 183 p.

[50] *Kirkpatrick S., Gelatt Jr. C. D., Vecchi M. P.* Optimization by Simulated Annealing // Science. 1983. Vol. 220. P. 671–680.

[51] *Metropolis N., Ulam S.* The Monte Carlo Method // J. Amer. Statistical Assoc. 1949. Vol. 44, No 247. P. 335–341.

[52] *Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E.* Equation of State Calculations by Fast Computer Machines // J. Chemical Physics. Vol. 21, No 6. June 1953. P. 1087–1092.

[53] *Spall J. C.* Multivariate Stochastic Aproximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Aproximation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. Vol. 37, No 3. P. 332–341.

[54] *Vakhitov A., Granichin O., Vlasov V.* Adaptive Control of SISO Plant with Time-Varying Coefficients Based on Random Test Perturbation // Proc. of the 2010 American Control Conference, June 30-July 02, 2010, Baltimore, MD, USA. P. 4004–4009.

[55] *Young P. C.* Recursive Estimation and Time-Series Analysis. An Introduction. Berlin–Heidelberg: Springer, 1984. 300 p.