

Олимпиада школьников СПбГУ по математике (2009 год)

Вариант 1

1. Арифметическая прогрессия, одним из членов которой является число 1, имеет два соседних члена, сумма которых равна 10. Найти сумму всех членов прогрессии, лежащих в промежутке $(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}]$, если известно, что их ровно семь.
2. Решить уравнение $\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x - |\cos 2x|$.
3. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^2 + 4x^3} = ax - x^2$ имеет единственное решение.
4. Решить неравенство $\log_2(x-1)^6 \cdot \log_3 x - \log_3(x-1)^2 \geq 2 - \log_2 x^6$.
5. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине B , $AB = 6$ и $BC = a$. Указать все значения a , при которых треугольник ABC является тупоугольным.

Вариант 2

1. Арифметическая прогрессия, одним из членов которой является число 2, имеет два соседних члена, сумма которых равна 9. Найти сумму всех членов прогрессии, лежащих в промежутке $[\frac{11}{5}, \frac{33}{8})$, если известно, что их ровно семь.
2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x - |\cos 2x|$.
3. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^2 - 6x^3} = ax - 2x^2$ имеет единственное решение.
4. Решить неравенство $\log_3(x-2)^4 \cdot \log_2 x - \log_2(x-2)^2 \leq 2 - \log_3 x^4$.
5. В треугольнике ABC угол при вершине C в два раза больше угла при вершине B , $AB = 2$ и $BC = a$. Указать все значения a , при которых треугольник ABC является тупоугольным.