Решение задач

Вариант 1

1. а) *Ответ*: $\{(1,\forall,1),(\forall,2,1)\}$. Т. к. $y\,(xz-1)=2(x-z)$ и $y\geqslant 1$, то $z=1$, откуда $(x-1)(y-2)=0$.
   б) *Ответ*: 41.
   в) Площадь $ABCD$ равна $26+t+\frac{25}{t}$, где $t=CO:OA$. Ее минимум достигается при $t=5$ и равен 36.
   г) *Ответ*: $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Минимум $d(M)$ реализуется в центре окружности, описанной около основания пирамиды, т.к. ее радиус больше высоты пирамиды.
2. а) *Ответ*: $\{-1,1,\sqrt{17}\}$. Уравнение приводится к виду $|x-3|\cdot(x+3)=8$.
   б) *Ответ*: $(0,14)\cup(14,+\infty)$. Возведение в квадрат дает $(x-14)^2>0$ в случае $x>0$ и $(x-14)^2<0$ при $x<0$.
   в) *Ответ*: $a<-128$ — *четыре решения*; $a=-128$ — *три решения*; $a\in(-128,16)$ — *два решения*; $a=16$ — *одно решение*; $a>16$ — *нет решений*. Достаточно дважды применить теорему Виета.
   г) *Ответ*: $(1,2]$. Условие приводится к виду $|u+1|+2\max\{|u|,|v|\}=a$, где $u=x-1$, $v=x+y-1$. При $a=1$ получается точка, при $a>2$ — шестиугольник (см. рис.). При $a<1$ множество пусто.
3. *Ответ*: $\frac{3}{2}$. Наибольшее значение реализуется на правильном треугольнике.

Вариант 2

1. а) *Ответ*: $\{(1,2,\forall),(1,\forall,2)\}$. Т. к. $z\,(xy-2)=2y-4x$ и $z\geqslant 1$, то $x=1$, откуда $(y-2)(z-2)=0$.
   б) *Ответ*: 36.
   в) Площадь $ABCD$ равна $13+4t+\frac{9}{t}$, где $t=CO:OA$. Ее минимум достигается при $t=\frac{3}{2}$ и равен 25.
   г) *Ответ*: 1. Минимум $d(M)$ реализуется в центре окружности, описанной около основания пирамиды, т.к. ее радиус больше высоты пирамиды.
2. а) *Ответ*: $\{-3,3,\sqrt{23}\}$. Уравнение приводится к виду $|x-4|\cdot(x+4)=7$.
   б) *Ответ*: $(-\infty,-6)\cup(-6,0)$. Возведение в квадрат дает $(x+6)^2>0$ в случае $x<0$ и $(x+6)^2<0$ при $x>0$.
   в) *Ответ*: $b<-8$ — *четыре решения*; $b=-8$ или $b>8$ — *два решения*; $b=8$ — *одно решение*; $b\in(-8,8)$ — *решений нет*. Достаточно дважды применить теорему Виета.
   г) *Ответ*: $(1,3]$. Условие приводится к виду $|\frac{v}{3}+1|+\max\{|u|,|v|\}=a$, где $u=2x-3y+3$, $v=3y-3$. При $a=1$ получается точка, при $a>3$ — шестиугольник (см. рис.). При $a<1$ множество пусто.
3. *Ответ*: $\frac{1}{8}$. Наибольшее значение реализуется на правильном треугольнике.