

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Холодова Светлана Евгеньевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ И ВОЛН
ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ
ЖИДКИХ СРЕДАХ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Санкт-Петербург

2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском национальном
исследовательском университете информационных технологий,
механики и оптики

Официальные оппоненты: **Тишкин Владимир Федорович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН, заведующий отделом
численных методов в механике сплошной среды
Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Андреев Виктор Константинович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий отделом дифференциальных уравнений
механики Института вычислительного моделирования
СО РАН, заведующий кафедрой математического
моделирования в механике Института математики
и фундаментальной информатики Сибирского
федерального университета

Захаров Юрий Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой ЮНЕСКО по информационным
вычислительным технологиям Института фундаментальных
наук ФГБОУ ВО Кемеровского государственного
университета.

Ведущая организация: Федеральный исследовательский центр "Информатика
и управление" Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 21 июня 2018 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д.212.232.30 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького СПбГУ по адресу: 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/1632.html>

Автореферат разослан " ____ " _____ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, доцент



Е.В. Кустова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследований

Издавна человек тесно связан с морем, о чем свидетельствует постоянная потребность в морепродуктах и полезных ископаемых, необходимость в морских путях. Океан находится в постоянном движении, и это влияет на многие стороны жизнедеятельности человека. Мореплавание, рыболовство, погода, стихийные бедствия — все это в той или иной степени зависит от движений в океане и от его изменчивых параметров. Океан представляет сложную гидрофизическую систему. Наряду с быстрыми волнами в океане существуют и медленные длиннопериодные волны. На движения длинных волн большое влияние оказывают топографические особенности дна бассейна и вращения Земли. Это приводит к появлению весьма своеобразных эффектов, в частности, возникновению волн, названных топографическими волнами Россби-Блиновой. Морские волны деформируют берега, оказывают силовое воздействие на прибрежные и морские гидротехнические сооружения, влияют на мореходность и условия базирования морского транспорта, при этом чувствуя вращение Земли и действие изменяющейся с широтой силы Кориолиса. В связи с этим представляет интерес изучение закономерностей волновых процессов в морской среде, анализ динамики волновых полей.

Продолжительность и дороговизна экспериментального моделирования, условность переноса лабораторных результатов на природу, а иногда и непреодолимые сложности в постановке опытов позволяет особо выделить математические методы гидродинамики. С их помощью можно раскрыть закономерности изучаемого явления, провести всесторонний анализ для прогнозирования, определить теоретическим путем параметры процесса распространения волн и их взаимодействия с преградами.

В диссертационной работе решается ряд задач геофизической гидродинамики. А именно, рассматриваются вопросы, посвященные математическому моделированию пространственных волновых движений с последующей аналитической реализацией динамических процессов в сплошных средах с учетом физических особенностей, а именно, в сжимаемых неоднородных, в несжимаемых однородных и неоднородных средах, с наличием магнитного поля и

силы Кориолиса, в электропроводных средах с различной степенью проводимости. Задача решается в рамках модели идеальной жидкости. Большое место в работе отведено исследованию волновых движений во вращающейся электропроводной жидкости. Особое внимание уделено квазигеострофическим движениям, на природу возникновения и характер распространения которых оказывает решающее влияние вращение жидкого слоя.

Для таких моделей или их упрощённых вариантов можно получить аналитические решения. Может возникнуть вопрос — нужны ли в настоящее время такие идеализированные модели и их аналитические решения? Действительно, сейчас, с бурным развитием компьютерных технологий, можно численно интегрировать полные системы нестационарных уравнений гидродинамики на длительные сроки с хорошим пространственным разрешением для Мирового океана с реальными очертаниями берегов, донной топографией и реальными внешними силами. Однако, численные методы не позволяют качественно оценить волновой процесс во всем пространственно-временном масштабе, но примененные к аналитическим решениям, дают количественную характеристику свойств волнового процесса. Таким образом, задачи, разрешимые в явном виде, выступают в роли эталонов, позволяющих глубже понять изучаемую математическую модель физических явлений, и, кроме того, проводить сравнение и оценку эффективности различных асимптотических и приближенных методов, в частности численных. При рассмотрении моделей, позволяющих строить аналитические решения, удается выявить некоторые эффекты и связи в изучаемой физико-механической проблеме, которые сложно заметить при общем рассмотрении. Нередко знание этих эффектов и связей в частных задачах ориентирует и способствует развитию направлений исследования общих моделей.

В последнее время в космической физике наблюдается возрастающий интерес к электромагнитным процессам. Общеизвестно, что они имеют фундаментальное значение для целого ряда явлений. Например, в недрах Земли происходят электромагнитные процессы, которые приводят к возникновению общего магнитного поля нашей планеты. Альберт Эйнштейн включил проблему происхождения магнитного поля Земли в число важнейших нерешенных проблем физики. Хотя изучаться магнитное поле стало раньше других

полей — со времен Колумба, и разработка теории генерации магнитного поля Земли ведется уже более столетия, однако, многие вопросы еще далеки от своего разрешения. Согласно общепринятым представлениям, а именно, взглядам У. Эльзассера, Э. Булларда и других ученых, магнитное поле Земли возбуждается движениями в жидкой части земного ядра, но детали этого процесса все еще не выяснены.

Интерес к исследованию земного ядра не только не иссякает, но и постоянно растет. Это обусловлено тем, что ядро оказывает существенное влияние на различные геофизические явления и процессы глобального характера, происходящие и происходившие в Земле, которые могут проявляться и на ее поверхности. Кроме того, известно, что в целом ряде случаев существование ядра и его динамика являются определяющими факторами эволюции планеты.

Электромагнитные процессы в ядре Земли связаны с различными процессами в ее мантии, поэтому, как отмечено в работе С.И. Брагинского, изучение геомагнитного поля является существенной частью геофизических исследований внутреннего строения и развития Земли.

Математическая задача, описывающая генерацию магнитных полей движениями электропроводной жидкости, называется задачей *гидромагнитного динамо*. Идея гидромагнитного динамо была впервые высказана в 1919 г. Дж. Лармором при объяснении происхождения магнитных полей на Солнце. С тех пор гидромагнитное динамо изучалось теоретически многими авторами в связи с исследованием магнитных полей в астрофизике и геофизике, но известно, что это явление имеет и более общее значение в магнитной гидродинамике. В дальнейшем основополагающие работы по теории динамо выполнили У. Эльзассер и Э. Буллард, которым вместе с Герценбергом и Бэкусом удалось доказать существование стационарных и нестационарных решений уравнения магнитной индукции при задании некоторого специального вида поля скоростей. Тем самым была доказана принципиальная возможность геодинамо.

Вследствие сложности уравнений, описывающих магнитогидродинамические процессы в земном ядре, усилия исследователей были направлены в основном на поиски решений уравнений Максвелла для заданных распределений скоростей. Модели, в которых

скорость движения жидкости считается заданной, а определяется только магнитное поле, называются *кинематическими* моделями земного динамо. Такой подход является предметом многочисленных исследований.

С развитием вычислительной техники появилась возможность непосредственного численного решения задач кинематического динамо для модельных течений в разных геометриях. Одна из самых известных в этом направлении серия работ Глатцмайера с соавторами. Основная проблема этого подхода состоит в том, что современные суперкомпьютеры позволяют проводить расчеты трехмерных задач кинематического динамо для магнитных чисел Рейнольдса, гораздо меньших практических потребностей астрофизики, для задач которой характерны большие значения магнитного числа Рейнольдса. Кроме того, рассматриваемые задачи характеризуются значением числа Экмана E порядка 10^{-10} – 10^{-15} , тогда как существующие вычислительные технологии позволяют решать задачу только для E порядка 10^{-4} . При малых E у границ жидкого слоя возникают пограничные слои, которые не могут быть достаточно точно разрешены численно, и которые, соответственно, необходимо анализировать с применением аналитических методов. Кроме того, в рассматриваемых задачах число Россби и число Экмана малы, но в численных исследованиях число Россби полагают равным нулю, а число Экмана малым, хотя оно на несколько порядков меньше числа Россби. В случае, когда в построенных моделях число Экмана устремляется к нулю, имеет место численная неустойчивость.

Даже если рассматривается задача с целью исследования магнитного поля конкретного астрофизического объекта, ее необходимо решать в целой области в пространстве параметров, которые, к сожалению, известны только приближенно. При этом желательно выявить характерные режимы поведения магнитогидродинамической системы, что невозможно сделать численно из-за огромного объема требуемых вычислений, следовательно, немалую ценность имеют аналитические подходы.

Среди кинематических моделей особый интерес представляет динамо С.И. Брагинского, так как оно построено для предельно больших магнитных чисел Рейнольдса. Вследствие того, что генерация магнитного поля может быть обусловлена множеством раз-

личных движений, для выяснения действительной картины движения недостаточно кинематической теории, а необходимо развитие различных вариантов полной гидромагнитной теории. На настоящий момент изучены два основных вида магнитогидродинамического динамо: двухмасштабное и почти симметричное большой проводимости. Развитие второго вида динамо в большей степени определяется работами С.И. Брагинского. Большое распространение получило α -динамо, где самовозбуждение магнитного поля происходит с преобладающим правовинтовым или левовинтовым движением. В институте физики Академии Наук Латвии проводилось экспериментальное исследование, доказавшее зависимость α -эффекта от магнитного числа Рейнольдса, при устремлении которого к бесконечности ЭДС α -эффекта стремится к нулю. Данное положение приводит к важному выводу: сильное влияние на величину α -эффекта магнитного числа Рейнольдса не позволяет надеяться на его использование для генерации сильных магнитных полей. Полученные результаты позволяют сделать предположение о значениях магнитного числа Рейнольдса, при которых α -эффект имеет место. В неспиральных полях скорости для действия динамо необходимы большие значения магнитного числа Рейнольдса.

В представленном исследовании, в отличие от известных на настоящий момент исследований, краевые задачи рассматриваются с усложненной топографией, при этом используется полная система МГД уравнений, в уравнениях движения которой учитываются инерционные силы, а также производится учет диссипативных эффектов. Исследуемая задача решена в линейном и нелинейном вариантах.

Возможность роста магнитного поля, поддерживаемого движением расплавленного металла, подтверждена экспериментально в исследованиях, проводимых в Институте механики сплошных сред РАН в Перми, в Карлсруэ, в Кадараше (Коммиссариат атомной энергии Франции). Вопрос о возможности такой генерации имеет не только теоретико-астрофизическую значимость, но и практическую важность в приложениях к течениям жидкометаллических расплавов в охлаждающих системах ядерных реакторов атомных электростанций.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена ее научной и практической значимостью, так как проблемы астро-

физики и геофизики, технические проблемы металлургии цветных металлов и стали, термоядерного синтеза, проблемы управления потоками жидкого металла в реакторах атомных электростанций ставят новые задачи, часть из которых может быть решена методами магнитной гидродинамики, позволяющими определить характеристики движения жидкой среды, что является одной из основных комплексных задач в современных гидрофизических исследованиях.

Цель работы

Целью исследования является:

1. Математическое моделирование динамических процессов распространения волн во вращающихся неэлектропроводных и вращающихся электропроводных жидких средах в областях с различной топологией рельефа при учете и без учета магнитных полей.

2. Анализ гидродинамических уравнений идеальной сжимаемой и магнитогидродинамических уравнений несжимаемой электропроводной жидкости с целью проведения редукции и построения аналитических решений возникающих краевых задач.

3. Доказательство существования устойчивых и неустойчивых режимов в магнитогидродинамических системах.

4. Исследование влияния диссипативных факторов в линейных и нелинейных задачах о волновых движениях электропроводных жидких сред.

Методология и методы исследования

В основу исследования названных задач положены законы сохранения механики сплошных сред, гидромеханики, магнитной гидродинамики и теории волн. При анализе полученных математических моделей используются методы математической физики, в частности, метод редукции, метод возмущений, метод малого параметра, аппарат функций Грина, аналитические и приближённые методы решения краевых задач.

Качественный анализ изучаемой проблемы осуществляется по аналитическим выражениям решения без использования ЭВМ.

Научная новизна работы

1. Изучен процесс распространения пространственных длинных волн малой амплитуды во вращающемся прямолинейном канале и цилиндрическом кольцевом бассейне переменной глубины. Указана топография дна бассейна, при которой имеет место точное решение.

2. Исследованы закономерности волнового движения при воздействии длинных нелинейных волн на сооружения с вертикальной гранью. Получено точное решение нелинейного уравнения при переменной топографии дна. Представлено сравнение полей гидродинамических величин в падающей и отраженной волнах.

3. Получено точное решение краевой задачи для нелинейного уравнения в сферической геометрии.

4. Проведена редукция векторной трехмерной системы уравнений динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости с произвольным распределением стратификации. Благодаря введению двух вспомогательных функций основные уравнения гидродинамики приведены к скалярному уравнению, исследование которого позволяет установить разрешимость всех возникающих начально-краевых задач теории волн в стратифицированных вращающихся жидкостях. Решена задача об излучении волн во вращающуюся сжимаемую жидкость плоской горизонтальной и вертикальной стенками, совершающими, начиная с некоторого момента времени, гармонические колебания.

5. Показано, что нелинейная задача о течении электропроводной вращающейся жидкости сводится к соответствующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца.

6. В нелинейной постановке рассмотрена задача о течениях и волнах во вращающемся сферическом слое идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. Поставленные краевые задачи приведены к задаче для одного нелинейного уравнения, допускающего в частных случаях аналитические решения.

7. Построена математическая модель динамики пространственных крупномасштабных движений во вращающемся слое идеальной электропроводной несжимаемой жидкости переменной глубины с учетом диссипативных эффектов, сферической геометрии, особенностей экваториальной зоны сферического слоя. Представлено решение как для волн малой, так и конечной амплитуды. Для каждой возникающей краевой задачи проведена редукция векторной системы уравнений в частных производных к одному скалярному уравнению. Сформулированы и доказаны утверждения об аналитическом представлении решения. Полученные дисперсионные соотношения и аналитические решения позволяют определить влияние рельефа границ на МГД характеристики волнового процесса

в жидкой среде.

8. Теоретический анализ полученных аналитических решений позволил установить:

1). факт существования установившегося режима колебаний при больших значениях времени в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости;

2). факт существования существенных изменений МГД величин, возникающих в сферическом жидком слое в результате термодинамических изменений у границы;

3). факт существования волновых возмущений жидкой среды в зоне экватора, а именно, волн, распространяющихся к востоку и к западу, причем, зональная скорость не удовлетворяет геострофическому соотношению, как это обычно бывает в неэлектропроводной жидкости. Вклад в отклонение от геострофичности скорости вносит наличие магнитного поля, а именно, его меридиональная компонента;

4). влияние диффузии магнитного поля на его генерацию;

5). факт существования индуцированного магнитного поля сколь угодно длительное время, а также его существование при отключении фонового внешнего магнитного поля;

6). факт существования волновых колебаний, обусловленных совместным действием магнитной силы, гравитационной силы, силы Кориолиса и граничными эффектами;

7). факт существования неустойчивых режимов жидкой среды.

Теоретическая и практическая значимость работы

Проведенные исследования углубляют теоретическое представление о распространении внутренних и поверхностных волн в океане и взаимодействии их с сооружениями, имеющими вертикальную грань. Представленные математические модели позволяют проводить практическое комплексное исследование прикладных проблем как аналитически, так и с применением современных компьютерных технологий.

Полученные результаты и методы могут быть использованы для расчета силового воздействия волн, для определения волнового режима акваторий, в исследованиях специалистов по гидродинамике, морской гидротехнике и при строительстве морских гидротехнических сооружений на стадии проектирования, а также при решении задач прикладной математики и математической физики. Полу-

ченные аналитические решения позволяют проводить сравнение и оценку эффективности различных асимптотических и приближенных методов, в частности, численных. Использование современных интегрированных сред разработки программных продуктов может позволить получить графическую визуализацию представленных решений.

Результаты исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд, а также могут быть применены при определении гидродинамических характеристик морской среды, а также для оценки параметров источника волновых возмущений по электромагнитному полю, индуцированному соответствующим гидродинамическим волнением. Индуцированное магнитное поле содержит информацию о физических характеристиках шельфовой зоны, что, несомненно, является важным аспектом знаний для морских геологоразведочных изысканий и исследований. Представленные исследования могут позволить решать многие технические проблемы гидрофизики, связанные, например, с навигацией подводных аппаратов, поиском полезных ископаемых на морском дне, исследованием электромагнитных явлений в морской среде с целью определения их взаимосвязи с физическими процессами, протекающими в геофизических системах.

Полученные результаты не ограничиваются только применением к геофизике, они могут быть полезны при рассмотрении процесса самовозбуждения магнитогидродинамического динамо в относительно больших массах жидкого металла и технических устройствах, например, в технологических процессах, использующих напорные камеры реактора на быстрых нейтронах, домы, реакторы для производства титана и другие. Особую важность представляет использование сильных магнитных полей в решении проблем термоядерного синтеза и физики плазмы, физики твердого тела и ядерной физики, где сильные поля являются важными, а порой, и единственными инструментами исследований. Магнитные измерения позволяют однозначно диагностировать различные ситуации в работе реактора, в том числе, нарушения в работе насосов. Полученные в диссертационной работе результаты могут позволить в дальнейшем развивать исследования приоритетных энергоносителей.

Положения, выносимые на защиту

1. Ряд краевых задач для систем уравнений в частных производных гидродинамики и магнитной гидродинамики приведен к одному скалярному уравнению. Построены точные решения редуцированных уравнений.

2. Представлены распределения магнитогидродинамических характеристик.

3. Построены аналитические решения задачи о генерации магнитного поля при наличии внешнего фонового магнитного поля в областях с различной граничной топологией.

4. Построены и аналитически реализованы ряд математических моделей, описывающих физические процессы в электропроводной и неэлектропроводной сплошной среде.

5. Построенные аналитические решения позволяют судить о влиянии диффузии магнитного поля на его генерацию.

6. Доказано существование волновых колебаний, обусловленных совместным действием магнитной силы, гравитационной силы, силы Кориолиса и граничными эффектами и существование неустойчивых волновых режимов электропроводной жидкой среды.

7. Доказано существование индуцированного магнитного поля на сколь угодно длительном временном промежутке, а также его существование при отключении фонового внешнего магнитного поля.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность основных научных положений диссертации и полученных результатов обеспечивается строгостью постановки задач, используемого математического аппарата и сопоставлением некоторых положений и следствий с результатами, известными в литературе.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

– восьмой международной сессии Рабочей Группы "Лабораторное моделирование динамических процессов в океане" на тему "Пограничные эффекты в стратифицированной и/или вращающейся жидкости", (Санкт-Петербург, июнь 1995);

– международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения", (Саранск, декабрь 1994, май 1998, май 2001, май 2002, май 2003, май 2004);

– международной конференции "Моделирование и исследование устойчивости систем", (Прикладная механика) (Киев, май 1995, май 1996, май 1997);

– 7 и 9 Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением", (Казань, июнь 1997; Иркутск – оз. Байкал, июнь 2007);

– международной конференции "Physics at the Turn of the 21 Century", (St. Petersburg, September 28 - October 2, 1998);

– межрегиональном симпозиуме "Методы обнаружения краткосрочных предвестников землетрясений и спорадических и антропогенных выбросов в атмосферу (АЭС)", (Санкт–Петербург, ноябрь 2000);

– межвузовских конференциях "Математическое моделирование и краевые задачи, (Математические модели механики, прочность и надежность конструкций)", (Самара, май 2001–2007);

– научных конференциях Мордовского государственного университета, (Саранск, 1997–2008 гг);

– международных конференциях "Прикладные технологии гидродинамики и гидроакустики", (Санкт–Петербург, май 2002, июнь 2004, май 2006, май 2008, май 2010, май 2012, май 2014, май 2016);

– научных конференциях "Процессы управления и устойчивость", (Санкт–Петербург, апрель 2003 – 2017 гг);

– межрегиональной конференции "Современные математические методы и информационные технологии в образовании", (Тюмень, апрель 2005);

– международной конференции, посвященная 75-летию, 80-летию и 85-летию со дня рождения В.И. Зубова "Устойчивость и процессы управления", (Санкт–Петербург, июль 2005, июль 2010, октябрь 2015);

– международных конференциях "Современные проблемы математики, механики, астрономии (Механика)", (Тула, ноябрь 2005, 2007, 2010);

– международных конференциях "Поляховские чтения", (Санкт–Петербург, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018);

– международных конференциях "Окуневские чтения", (Санкт–Петербург, июнь 2006, 2011);

– IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, (Нижний Новгород, август 2006);

– международном Конгрессе "Нелинейный Динамический Анализ-2007", (Санкт-Петербург, июнь 2007);

– всероссийской конференции "Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф", (Барнаул, сентябрь 2007);

– всероссийском семинаре по аэрогидродинамике, (Санкт-Петербург, февраль 2008);

– всероссийской конференции "Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение", приуроченной к 90-летию академика Л.В. Овсянникова (Новосибирск, апрель 2009), приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова (Новосибирск, май 2014);

– международных конференциях "Математические и информационные технологии", (Сербия, август 2009, 2011, 2013);

– международных конференциях "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании", (Черногория, сентябрь 2009, 2011, 2013);

– XXII юбилейном семинаре с международным участием "Струйные, отрывные и нестационарные течения", (Санкт-Петербург, июнь 2010);

– международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика", посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, май - июнь 2011);

– международной конференции "Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы", посвященная памяти профессора Владимира Федоровича Демьянова (Санкт-Петербург, май 2017);

– семинарах аэродинамической лаборатории НИИММ СПбГУ (рук. д. ф.-м. н., профессор Р.Н. Мирошин), кафедры гидроаэромеханики (рук. д. ф.-м. н., профессор С.К. Матвеев) математико–механического факультета, кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела (рук. д. ф.-м. н., профессор Ю.М. Даль) и кафедры управления медико–биологическими системами (рук. д. ф.-м. н., профессор А.Ю. Александров) факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского университета (2006-2011 гг);

– семинарах кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного горного университета (рук. д. т. н., профессор

А.П. Господариков, 2006-2017 гг);

– семинарах кафедры высшей математики Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (рук. д. ф.-м. н., профессор И.Ю. Попов, 2008-2018 гг);

– семинарах отдела методов нелинейного анализа и проблем безопасности (рук. д. ф.-м. н., профессор Е.А. Гребеников и д. ф.-м. н., профессор Н.А. Северцев) вычислительного центра имени А.А. Дороницына Российской академии наук (Москва, 2006-2018 гг);

– семинарах "Компьютерные методы в механике сплошной среды" (рук. д. ф.-м. н., профессор Е.Ф. Жигалко) кафедры "Прикладная математика" Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения (2008, 2010 гг);

– семинаре лаборатории математических проблем геофизики (рук. д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник В.М. Бабич) Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН 2008 г);

– семинаре академика Н.Ф. Морозова (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 2008 г.);

– семинаре "Прикладная гидродинамика" (рук. чл.-корр. В.В. Пухначев) института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2009 г);

Публикации

Основное содержание диссертации отражено в монографии "Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах" (совместно с Перегудиным С.И.), объемом 454 страницы, и в 135 публикациях, 61 из которых приведена в библиографическом списке диссертационной работы, в том числе 21 публикация содержится в журналах из перечня, рекомендованного ВАК Министерства образования РФ и 9 публикаций в изданиях, рецензируемых Web of Science или Scopus.

В работах [2, 6, 7, 10, 12, 15, 19–28], опубликованных в соавторстве с С.И. Перегудиным, Сергей Иванович Перегудин принимал участие в анализе полученных результатов, Светлана Евгеньевна Холодова формулировала постановки задач, разрабатывала и представляла методы их решения, анализировала полученные результаты. В работах [29, 30], опубликованных в соавторстве с С.И. Перегудиным и Э.С. Перегудиной, Сергей Иванович Перегудин принимал

участие в анализе полученных результатов, Элина Сергеевна Перегудина принимала участие в проверке расчетов с использованием современных средств компьютерной алгебры, Светлана Евгеньевна Холодова формулировала постановки задач, разрабатывала и представляла методы их решения, анализировала полученные результаты. В работе [11], опубликованной в соавторстве с В.А. Бариновым, Василий Александрович Барinov принимал участие в анализе полученных результатов, Светлана Евгеньевна Холодова формулировала постановки задач, разрабатывала и представляла методы их решения, анализировала полученные результаты. В работе [9], опубликованной в соавторстве с И.И. Чучаевым, В.А. Маргулисом и В.А. Шороховым, Ивану Ивановичу Чучаеву и Виктору Александровичу Маргулису принадлежит постановка задачи и разработка метода решения, Алексей Владимирович Шорохов и Светлана Евгеньевна Холодова проводили реализацию метода решения. В монографии, содержащей 12 глав, главы 1–4, 7–9, написаны Светланой Евгеньевной Холодовой, главы 5, 10–12 написаны Сергеем Ивановичем Перегудиным, глава 6 написана совместно.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из Введения, девяти глав, Заключения, и списка литературы. Работа изложена на 451 странице машинописного текста, из них 33 страницы — список литературы, содержащий 286 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение

Во введении обосновывается актуальность и практическая значимость темы диссертационного исследования. Изложено краткое содержание диссертации с описанием основных ее результатов. Произведен обзор современного состояния вопроса, сформулированы цели и задачи представленного научного исследования.

Глава 1. Описание волновых движений жидкости

Первая глава посвящена постановке задачи о волновых движениях жидкости.

В первом параграфе изложено описание законов движения идеальной жидкости в инерциальной системе координат. Сформулированы основные граничные и начальные условия, присущие вол-

новым движениям жидкости. Во втором параграфе представлена общая постановка задачи о волновом движении неоднородной идеальной жидкости с учетом вращения Земли. В третьем параграфе сформулирована задача о волновых движениях вращающейся жидкости с учетом сферичности рассматриваемой области. В случае стационарного движения неоднородной жидкости представлено частное решение соответствующей задачи. В последнем, четвертом, параграфе первой главы представлено описание процесса распространения волн во вращающемся плоском слое.

Глава 2. Волны на мелкой воде

Во второй главе на основе модели теории распространения длинных волн выполнен анализ процессов распространения волн в безграничном по горизонтали однородном вращающемся океане постоянной глубины, в прямолинейном канале переменной глубины, а также в замкнутых бассейнах переменной глубины. Уделено внимание исследованию возможных типов волновых движений, кинематических характеристик пространственных волн. Предположение об однородности океана исключает из рассмотрения внутренние волны. В то же время, учет вращения Земли и переменности глубины бассейна позволяет исследовать волны Россби, являющиеся низкочастотными колебаниями среды.

Первый параграф второй главы посвящен рассмотрению основных уравнений, описывающих динамику длинноволновых движений жидкости, находящейся в состоянии равномерного вращения. Приведен вывод уравнений, описывающих динамику рассматриваемых процессов в пространственном случае переменной глубины жидкости. Поставлены краевые задачи для этих уравнений. Исследование этих краевых задач составит предмет рассмотрений последующих параграфов. Для поставленной пространственной задачи в случае мелкой воды допустимо предположение о линейном распределении давления с глубиной. Соответствующая краевая задача для горизонтальной скорости и ординаты свободной поверхности является нелинейной.

Второй и все последующие параграфы второй главы посвящены исследованию линейных задач нестационарной теории волн, распространяющихся во вращающейся жидкости. Здесь сформулирована математическая постановка задачи о волновых движениях жидкости с малой амплитудой. В случае малого конвективного ускоре-

ния гидродинамическая задача сводится к краевой задаче для линейного дифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами с краевым условием в виде линейной комбинации нормальной и касательной производной на границе. Представлены уравнения для определения компонент скорости.

Третий параграф второй главы посвящен исследованию распространения волн малой амплитуды в прямолинейном канале переменной глубины. Получено, что в случае глубины жидкости, не изменяющейся вдоль стенок канала и изменяющейся от стенки к стенке, изменение которой от стенки к стенке удовлетворяет уравнению Абеля второго рода, математически задача сводится к смешанной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. В частности, это имеет место для постоянной глубины жидкости или горизонтального дна, а также в том случае, если глубина распределена по экспоненциальному закону.

В последних трех параграфах второй главы рассматривается задача о волнах в замкнутом бассейне, в частности, в цилиндрическом кольцевом бассейне переменной глубины. Для периодического волнового решения исследуемая задача эквивалентна задаче на собственные значения.

В четвертом параграфе второй главы решается задача о распространении волн в цилиндрическом кольцевом бассейне постоянной глубины. Для периодического волнового решения задача сводится к смешанной краевой задаче Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя. Общее решение которого имеет вид линейной комбинации функции Бесселя и функции Неймана. Получено дисперсионное уравнение. Представлены выражения для скорости и возмущения свободной поверхности жидкости. Пятый параграф второй главы посвящен исследованию процесса распространения волн в цилиндрическом кольцевом бассейне с плавным (параболическим) изменением глубины жидкости. Основное внимание уделено изучению совместного влияния на волновые движения наклона дна океана и вращения Земли. Математически задача сводится к решению краевой задачи для линейного уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. В случае малого наклона дна решение имеет вид линейной комбинации функции Бесселя и функции Неймана. Получено дисперсионное уравнение

для собственных значений, а также представлены выражения для возвышения и скорости волны.

В шестом параграфе второй главы решается задача о волнах в цилиндрическом кольцевом бассейне переменной глубины. При удовлетворении функции изменения глубины жидкости уравнению Абеля второго рода исследуемая задача эквивалентна смешанной краевой задаче для уравнения Бесселя, решение которой представляется в виде линейной комбинации функции Бесселя и функции Неймана.

В случае ступенчатого изменения глубины получено дисперсионное соотношение. При произвольном изменении глубины бассейна от стенки к стенке задача приводится к интегральному уравнению, для решения которого привлекается аппарат функций Грина.

Глава 3. Нелинейные задачи теории вращающейся жидкости

Третья глава посвящена решению нелинейных задач теории вращающейся жидкости. А именно, изучению течений и волн конечной амплитуды во вращающемся сферическом слое, а также квазигеострофических движений во вращающемся океане.

В первом параграфе третьей главы изучаются квазигеострофические волновые движения в тонком вращающемся слое идеальной несжимаемой однородной жидкости переменной глубины. Используя анализ масштабов квазигеострофических движений в теории мелкой воды, приводится вывод основных уравнений. Решение задачи представляется в виде степенных рядов по малому параметру, представляющему собой число Россби. Задача определения квазигеострофического движения сводится к нелинейному уравнению для возвышения свободной поверхности, после нахождения которого, горизонтальные компоненты скорости определяются из геострофических соотношений. На границе области должно выполняться условие непротекания через вертикальные поверхности — границы бассейна.

Во втором и третьем параграфах третьей главы рассматривается задача о взаимодействии длинных волн конечной амплитуды с сооружениями, имеющими вертикальные грани большой протяженности. Для случая примерного постоянства наклона дна на расстоянии порядка длины волны, получено точное решение соответствующего нелинейного уравнения для возвышения свободной поверх-

ности, представимое в виде суперпозиции падающей и отраженной волн. В третьем параграфе рассматриваются планетарные волновые движения, представляющие возмущения, распространяющиеся параллельно поверхности океана, в приближении β -плоскости. Сформулированная математическая задача является нелинейной. Для бесконечно протяженной по горизонтали жидкости получено точное решение и представлено дисперсионное соотношение. Здесь же рассматривается задача об отражении нестационарных планетарных волн с конечной амплитудой от ориентированной в широтном направлении твердой стенки. Представлено точное решение соответствующего нелинейного уравнения в виде линейной суперпозиции падающей и отраженной волн.

Четвертый параграф третьей главы посвящен изучению нелинейных течений и волн в тонком вращающемся сферическом слое идеальной несжимаемой однородной жидкости переменной глубины. В случае установившегося движения представлено аналитическое выражение для невозмущенной глубины жидкости, при которой имеет место точное решение нелинейной задачи в виде сферической функции. Для неустановившегося движения жидкости между концентрическими сферами решение в виде волн, наложенных на западно-восточное течение, представляет собой точное решение нелинейной задачи. Приведено соответствующее дисперсионное соотношение.

Анализ выражения для линейной скорости движения волны на произвольной широте показывает, что волны, соответствующие малым значениям меридионального волнового числа, распространяются с востока на запад, а волны, соответствующие большим значениям меридионального волнового числа, распространяются с запада на восток. В случае установившегося течения между концентрическими сферами указано условие при котором выражение в виде ряда по сферическим гармоникам является точным решением нелинейной задачи.

Глава 4. Влияние рельефа земной поверхности на воздушные течения и волны

Четвертая глава работы посвящена моделированию волновых движений сжимаемой бароклинной жидкости, образующихся под действием силы тяжести. А именно, рассматриваются вопросы, связанные с влиянием рельефа земной поверхности на воздушные те-

чения и волны. В частности, исследуются волны, возникающие при адиабатическом движении около неровности поверхности Земли. При этом, в отличие от модели мелкой воды используется теоретическая модель, учитывающая поле вертикальных скоростей.

В первом параграфе четвертой главы рассматривается обтекание земной поверхности установившимся воздушным потоком, который далеко перед горой, является горизонтальным. Скорость этого невозмущенного потока считается известной. Предполагается, что движение происходит в некоторой полосе, ширина которой в невозмущенном положении является заданной. Над этой полосой жидкость покоится. Для волн малой амплитуды с учетом малости отклонения неровности поверхности Земли от горизонтального положения при экспоненциальном распределении плотности и линейной зависимости температуры в невозмущенном движении математически задача сводится к смешанной краевой задаче для неоднородного уравнения Гельмгольца с постоянными коэффициентами. В этом случае представлены аналитические выражения для возмущенной поверхности жидкости, а также для скорости.

Второй параграф четвертой главы посвящен волновым движениям над возвышением поверхности Земли. Рассматривается как случай свободных волн над ровным дном, так и случай прохождения вынужденной волны над неровным дном. Решение ищется в виде малого возмущения, воздействующего на невозмущенный поток при отсутствии препятствия. Для периодических по времени и горизонтальной координате волн малой амплитуды над горизонтальным дном получены аналитические решения и представлены дисперсионные соотношения в следующих случаях: если в невозмущенном потоке — скорость постоянна, а температура линейно убывает с высотой; скорость кусочно-постоянна, а температура есть кусочно-линейная функция высоты. В случае произвольной зависимости скорости и температуры невозмущенного потока от высоты над поверхностью Земли, краевая задача сводится к интегральному уравнению.

Получено периодическое по времени решение и представлено дисперсионное соотношение при прохождении волны над неровным дном в случае линейного распределения температуры в невозмущенном потоке. При произвольном изменении температуры с высотой далеко перед возвышенностью земной поверхности реше-

ние задачи предлагается методом Галеркина. Приближенное решение задачи ищется в виде ряда по некоторой системе линейно-независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям. Получены первые два приближения.

Глава 5. Волновые движения в непрерывно стратифицированной жидкости

В главе 5 исследуются пространственные волны малой амплитуды в жидкости с непрерывной стратификацией. Сформулированы и исследованы задачи распространения свободных, вынужденных внутренних волн, а также свободных внутренних волн при наличии горизонтальной диффузии плотности. Получены условия для аналитической структуры стационарного распределения плотности, при которых допустимо точное аналитическое решение соответствующих задач для пространственной конфигурации волновой динамики.

Глава 6. Некоторые вопросы теории волн в сжимаемых стратифицированных вращающихся жидкостях

В монографиях Сергея Александровича Габова подробно изучены вопросы динамики внутренних волн во вращающихся и стратифицированных жидкостях. В частности, рассмотрены задачи о редукции уравнений динамики однородной вращающейся жидкости, сжимаемой стратифицированной жидкости без учета вращения и экспоненциально стратифицированной вращающейся жидкости.

В первом и втором параграфах шестой главы производится попытка редукции уравнений динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости с произвольным распределением стратификации. На основе введения двух вспомогательных функций основные уравнения гидродинамики приводятся к скалярному уравнению, исследование которого позволяет установить разрешимость всех возникающих начально-краевых задач теории волн в стратифицированных вращающихся жидкостях. В § 6.3 рассматривается задача об излучении волн во вращающуюся сжимаемую жидкость плоской горизонтальной стенкой, совершающей, начиная с начального момента времени, гармонические колебания частоты ω , в § 6.4 — задача об излучении волн во вращающуюся сжимаемую жидкость вертикальной стенкой, совершающей, начиная с начального момента времени, гармонические колебания частоты ω .

Глава 7. Магнитогидродинамические волны в однород-

ной вращающейся жидкости

Седьмая и восьмая главы посвящены исследованию волновых движений во вращающейся электропроводной жидкости.

В § 7.1 представлены уравнения магнитной гидродинамики. Параграфы 7.2, 7.4 и 7.5 посвящены решению нелинейных задач магнитной гидродинамики. А именно, в параграфах 7.2 и 7.4 изучаются стационарные движения идеальной несжимаемой электропроводной вращающейся жидкости. Сформулированная задача сводится к соответствующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца. В § 7.5 представляется точное решение уравнений магнитной гидродинамики вращающейся жидкости в виде плоской волны произвольной амплитуды. В § 7.3 изучается линейная задача нестационарной теории волн, распространяющихся в электропроводной вращающейся жидкости. Здесь сформулирована математическая постановка задачи о волновых движениях жидкости с малой амплитудой. Соответствующая гидродинамическая задача для случая одномерного движения и внешнего магнитного поля, параллельного одной из координатных осей, сводится к начально-краевой задаче для волнового уравнения, описывающего изменение x -компоненты скорости v_x вдоль направления оси Oy . Представлены выражения для определения всех магнитогидродинамических параметров. Здесь же строится решение трехмерной задачи в виде гармонической волны. Получены дисперсионные соотношения, устанавливающие связь между частотой, волновым вектором, параметром Кориолиса и невозмущенным полем магнитной индукции, на которое накладывается индуцированное поле, обусловленное волновым движением. Получены выражения для фазовой и групповой скорости распространения фазы и возмущения, соответственно. Показано, что вектор возмущений распространяется параллельно вектору внешнего магнитного поля со скоростью, равной скорости Альфвена; при учете вращения под действием силы Кориолиса вектор возмущения распространяется непараллельно вектору внешнего магнитного поля, т. е. сила Кориолиса отклоняет направление вектора возмущения в процессе его перемещения от направления вектора внешнего магнитного поля. Колебания среды определяются как решение линейной системы дифференциальных уравнений для вектора амплитуд. Представлены все искомые параметры.

Параграфы 7.6–7.8 посвящены изучению нелинейных течений

и волн во вращающемся сферическом слое идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. В рассматриваемых моделях не используется предельный подход быстрого вращения, что позволяет учесть инерционные силы в уравнении движения. На основе введения скалярных функций основные нелинейные магнитогидродинамические уравнения редуцируют к одному нелинейному уравнению, которое удается проинтегрировать, в частности, с использованием аппарата сферических функций. В параграфах 7.9–7.14 изучается динамика крупномасштабных движений во вращающемся слое идеальной электропроводной несжимаемой жидкости переменной глубины. Для поставленной пространственной задачи допустимо предположение о линейном распределении гидромагнитного давления с глубиной. Соответствующая краевая задача для горизонтальных компонент скорости и магнитного поля, и функции, описывающей нижнюю подвижную поверхность слоя, является нелинейной. В первой части параграфа 7.9 приводится вывод уравнений, описывающих динамику рассматриваемых процессов в пространственном случае переменной глубины жидкости. Поставлена соответствующая краевая задача для этих уравнений, исследуемая в последующих параграфах.

Параграфы 7.9.2–7.13 посвящены исследованию линейных задач. Допущение о представлении функции полной глубины электропроводной жидкости в виде суммы двух функций: характеризующей состояние относительного покоя жидкости и функции, относительно которой проводится линеаризация системы уравнений в частных производных, делает возможным интегрирование полученной линейной системы. На основе введения трех скалярных функций в § 7.9.2 проводится редукция исходной системы уравнений к одному скалярному уравнению, решение краевых задач для которого содержится в параграфах 7.10–7.13. А именно, в § 7.10 рассматривается задача об излучении волн во вращающуюся несжимаемую электропроводную жидкость горизонтальной и вертикальной стенками, совершающими, начиная с начального момента времени, гармонические колебания. С помощью преобразования Лапласа удается получить явное решение задачи, что позволяет провести анализ предельного поведения решения, т. е. сделать вывод о существовании режима установившихся колебаний с предельной амплитудой, описывающей установившуюся плоскую волну. В парагра-

фах 7.11–7.13 строятся решения начально-краевых задач для полученного в § 7.9.2 в результате редукции уравнения, описывающие распространение волн малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали прямолинейном слое, в длинном прямоугольном канале и в цилиндрическом кольцевом слое переменной глубины. Для периодической по времени и одной из пространственных координат разности магнитной индукции поля на границах слоя в случае зависимости глубины слоя от одной из пространственных координат рассматриваемая краевая задача сводится к краевой задаче для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка с постоянными коэффициентами. Получено дисперсионное соотношение. В случае периодической по времени разности значений магнитной индукции на границах слоя и произвольной функциональной зависимости глубины слоя показано, что периодическое по времени волновое решение удовлетворяет искомому уравнению, причем амплитуда волны есть решение уравнения Пуассона. Для кольцевой цилиндрической области построено периодическое по времени волновое решение. Зависимость амплитуды волны от радиальной и угловой координат определяется решением краевой задачи для неоднородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Использование функций Бесселя и Неймана позволяет представить решение задачи в явном виде.

В § 7.14 изучаются квазигеострофические движения во вращающемся слое электропроводной жидкости переменной глубины. На основе анализа масштабов квазигеострофических движений приводится вывод основных уравнений. В предположении, что числа Россби, являющиеся мерой отношения локального и адвективного ускорений к ускорению Кориолиса, одного порядка, решение задачи сводится к решению системы трех нелинейных уравнений для гидромагнитного давления и для двух функций, описывающих магнитное поле. Для бесконечно протяженной по горизонтали электропроводной вращающейся жидкости в предположении приблизительного постоянства наклона поверхности, ограничивающей слой сверху, на расстоянии порядка длины волны получено точное решение системы соответствующих нелинейных уравнений и дисперсионное соотношение. Представленные аналитические решения позволяют определять влияние рельефа границ слоя и их динамики на магнитогидродинамические характеристики волнового процесса

внутри слоя. Границы слоя играют важную роль в его эволюции, в динамических процессах, происходящих внутри жидкого слоя, например, в геофизике рельеф мантии регулирует скорость динамики твердого ядра, что, в свою очередь, может влиять на скорость роста внутреннего ядра, и, следовательно, на мощность, необходимую для запуска механизма динамо. Характером и интенсивностью взаимодействия между жидким слоем и его границами определяется квазигеострофическое движение в слое.

Глава 8. Магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся жидкости

Восьмая глава посвящена изучению волновых движений в неоднородной электропроводной вращающейся жидкости. В § 8.1 исследуются уравнения трехмерной динамики идеальной электропроводной стратифицированной вращающейся жидкости. Эти уравнения вследствие представления магнитного поля и поля плотности в виде суперпозиции невозмущенных полей, соответствующих стационарному состоянию среды и индуцированных полей, обусловленных волновым движением, при помощи введения двух вспомогательных функций приводятся к скалярному уравнению для модифицированной функции гидромагнитного давления, исследование которого позволяет установить разрешимость возникающих начально-краевых задач теории волн в электропроводных вращающихся жидкостях с неоднородностями плотности. В § 8.2 исследуются нелинейные волновые движения у границы тонкого сферического слоя устойчиво стратифицированной жидкости. С использованием масштабов движений производится анализ математической модели, пригодной для расчета трехмерных движений с большими временным и пространственным масштабами. Указанный метод анализа позволяет, не ограничиваясь эвристическими рассуждениями, вывести общие нелинейные квазигеострофические уравнения, описывающие движения как однородной, так и стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости. Основная идея анализа состоит в построении схемы последовательных приближений, в которой геострофическое приближение является первым шагом. В § 8.3 изучаются крупномасштабные движения, горизонтальный масштаб которых сравним с радиусом слоя. Проводится определение распределения плотности и всех магнитогидродинамических величин, возникающих в слое в результате термо-

динамических изменений у его границы. В представленном исследовании рассмотрена задача с переменной стратификацией без использования магнитогеострофического приближения и приближения Буссинеска. Показано, что непосредственной причиной конвекции является архимедова сила. В приложении к геофизике это означает, что на границе твердого и жидкого ядра образуется при кристаллизации избыток легкой компоненты, всплывание которой является основной причиной конвекции в жидком слое. Возмущения, связанные с всплыванием легкого вещества, перемешивают вещество и создают эффективный механизм турбулентной диффузии.

Целью исследования § 8.4 является моделирование волновых трехмерных крупномасштабных движений невязкой, несжимаемой стратифицированной идеально проводящей вращающейся жидкости для особого случая геометрии рассматриваемого объема, который учитывает особенность экваториальной зоны сферического слоя.

Исследуются уравнения трехмерной экваториальной динамики идеальной электропроводящей неоднородной вращающейся жидкости. основополагающие уравнения вследствие представления магнитного поля и поля скорости в виде суперпозиции невозмущенных полей, соответствующих стационарному состоянию среды, и индуцированных полей, обусловленных волновым движением, при помощи введения двух вспомогательных функций приводятся к специальному скалярному уравнению. Исследование этого уравнения позволяет решить проблему разрешимости возникающих начально-краевых задач теории волн, распространяющихся в окрестности экваториальной зоны сферического слоя электропроводящей вращающейся жидкости с неоднородной плотностью. Построены точные решения представленного редуцированного уравнения, описывающие распространение волн малой амплитуды.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о существовании нетривиальных волновых возмущений рассматриваемой среды в зоне экватора, а именно, волн Кельвина, распространяющихся к востоку и к западу, причем зональная скорость в волне Кельвина не удовлетворяет геострофическому соотношению, как это обычно бывает в неэлектропроводной жидкости. Вклад в отклонение от геострофичности скорости вносит наличие магнитного поля, а именно, его меридиональная компонента.

Глава 9. Магнитогидродинамические волны во вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля.

Девятая глава посвящена изучению динамики вращающегося слоя электропроводной несжимаемой жидкости с учетом граничных эффектов и диффузии магнитного поля.

Вводя в рассмотрение характерные масштабы изменения переменных в исходных уравнениях и оценивая порядки величин членов, входящих в уравнения, удастся выделить главные и второстепенные члены, упростить уравнения и построить модель исследуемого процесса.

При решении рассматриваемой задачи, как задачи геофизической гидродинамики, возникает необходимость построения приближенных вариантов основных МГД уравнений и строгого дальнейшего математического анализа этих приближенных уравнений. При этом, вводимые приближения необходимы для продвижения в решении поставленных задач. Кроме того, формулируемые приближения, основанные на классических физических и интуитивных соображениях, приводят к изучению модельных задач, целью которого является получение качественных закономерностей, нежели детальное моделирование конкретного геофизического явления и представление численного анализа.

В общем случае магнитные силовые линии частично переносятся потоком жидкости и частично диффундируют через нее. Именно этот общий случай и рассматривается. Таким образом, принимается, что диффузионные члены в уравнении индукции магнитного поля имеют тот же порядок, что и конвективные. Учет диффузионных членов необходим при изучении динамики волн локального характера, т.е., когда горизонтальный масштаб движения много меньше радиуса слоя, а также при очень великих масштабах времени. В представляемом исследовании производится учет диссипативных эффектов, а именно, изучается влияние диффузии магнитного поля на его генерацию. Представляет также интерес ответ на вопрос о возможности существования такого поля сколь угодно длительное время и существование его при отключении фонового внешнего поля. Задача решается как в линейном, так и в нелинейном вариантах.

С помощью введения вспомогательных функций систему уравнений в частных производных удастся редуцировать, что позволяет

сделать вывод об аналитической структуре магнитогидродинамических характеристик.

Представленные аналитические решения позволяют судить о влиянии динамики рельефа области на магнитогидродинамические характеристики волнового процесса внутри жидкого слоя.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что генерация магнитных полей в электропроводной жидкости является следствием неустойчивости, характеризуемой соответствующими соотношениями между силами гравитации, Кориолиса, магнитной силой и особенностями топографии рельефа.

В представленном исследовании с внешним магнитным полем, параллельным оси вращения слоя, диффузия магнитного поля способствует его затуханию. Доказано существование периодического процесса при стремлении магнитного числа Рейнольдса к бесконечности. В случае, когда вектор внешнего магнитного поля параллелен нормальному вектору к поверхности жидкого слоя, доказано существование волн, обусловленных не только магнитными силами, но и силами Кориолиса и силами гравитации. Причем, при отключении внешнего поля, параллельного оси вращения слоя, имеет место установившийся режим, а при отключении внешнего поля, параллельного нормальному вектору к поверхности жидкого слоя существует и установившийся режим и режим с возможной неустойчивостью. Причем, установившийся режим имеет место при быстром вращении, а при медленном вращении может быть и возрастание и затухание поля.

Итак, на генерацию магнитного поля влияет сила Кориолиса, гравитация, диффузия магнитного поля, магнитная сила, топография граничных поверхностей.

Построена математическая модель динамики пространственных крупномасштабных движений во вращающемся слое идеальной электропроводной несжимаемой жидкости переменной глубины с учетом диссипативных эффектов. Проведена редукция соответствующей линейной системы уравнений в частных производных к одному скалярному уравнению.

Сформулировано и доказано утверждение об аналитическом представлении решения задачи о малых возмущениях в слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом эффектов диффузии магнитного поля, что позволило

построить в явном виде решение, описывающее волны малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали прямолинейном слое. В проведенном исследовании произведен учет диссипативных эффектов, а именно, изучено влияние диффузии магнитного поля на его генерацию. Доказана возможность существования индуцированного поля на достаточно длительном временном промежутке, а также его существование при отключении фонового внешнего поля.

В нелинейной постановке рассмотрена задача о квазигеострофических движениях во вращающемся слое электропроводной жидкости переменной глубины с учетом диссипативных эффектов.

Доказано существование волновых колебаний, обусловленных совместным действием магнитных сил, гравитационной силы, силы Кориолиса и граничными эффектами. Их частота, вообще говоря, — комплексна, а, следовательно, эти волны могут обнаруживать неустойчивость. В то же время, управляя значением фонового магнитного поля, можно наблюдать установившийся во времени процесс, то есть, индуцированное магнитное поле может существовать сколь угодно длительное время.

Заключение

В заключении приводятся основные результаты и выводы выполненного исследования.

1. Изучен процесс распространения пространственных длинных волн малой амплитуды во вращающемся прямолинейном канале и цилиндрическом кольцевом бассейне постоянной и переменной глубины. Указана топография дна, при которой имеет место точное решение. Полученные дисперсионные соотношения и аналитические решения позволяют выявить общие закономерности изучаемого процесса.

2. Исследованы закономерности волнового движения при воздействии длинных нелинейных волн на сооружения с вертикальной гранью и планетарных волновых движений в приближении β -плоскости. Получено точное решение нелинейного уравнения при переменной топографии дна. Представлено сравнение полей гидродинамических величин в падающей и отраженной волнах. Выполнен анализ нелинейных течений и волн во вращающемся сферическом слое жидкости.

3. Получено решение плоской задачи о воздушных течениях и

волнах над неровностью земной поверхности.

4. Изучен процесс распространения пространственных свободных, вынужденных внутренних волн, а также свободных внутренних волн при наличии горизонтальной диффузии плотности в непрерывно стратифицированной несжимаемой вращающейся жидкости.

5. Проведена редукция векторной трехмерной системы уравнений динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости с произвольным распределением стратификации к скалярному уравнению, исследование которого позволяет установить разрешимость всех возникающих начально-краевых задач теории волн в стратифицированных вращающихся жидкостях. Решена задача об излучении волн во вращающуюся сжимаемую жидкость плоской горизонтальной и вертикальной стенками, совершающими, начиная с некоторого момента времени, гармонические колебания.

6. Проведен анализ течений и волн во вращающемся слое несжимаемой электропроводной жидкости как в плоской, так и в сферической геометрии. Поставленные краевые задачи приведены к задаче для одного нелинейного уравнения, допускающего для частных случаев аналитические решения. Решение соответствующей линейной задачи представлено в виде гармонической волны, получены дисперсионные соотношения и выражения для фазовой и групповой скоростей, а также для всех магнитогидродинамических параметров.

7. Построена и аналитически реализована модель волновых трехмерных крупномасштабных движений невязкой, несжимаемой стратифицированной идеально проводящей вращающейся жидкости для особого случая геометрии рассматриваемого объема, учитывающего особенность экваториальной зоны сферического слоя. Построены точные решения представленного редуцированного уравнения, описывающие распространение волн малой амплитуды. Проведенный анализ позволяет сделать вывод о существовании нетривиальных волновых возмущений рассматриваемой среды в зоне экватора, а именно, волн, распространяющихся к востоку и к западу, причем зональная скорость в волне не удовлетворяет геострофическому соотношению, как это обычно бывает в неэлектропроводной жидкости. Вклад в отклонение от геострофичности скорости вносит наличие магнитного поля, а именно, его меридиональная компонента.

8. Построена математическая модель динамики пространствен-

ных крупномасштабных движений во вращающемся слое идеальной электропроводной несжимаемой однородной жидкости переменной глубины с учетом диссипативных эффектов и однородной и неоднородной жидкости для больших значений магнитного числа Рейнольдса. Проведена редукция соответствующих линейных систем уравнений в частных производных к одному скалярному уравнению. Сформулировано и доказано утверждение об аналитическом представлении решения задачи о малых возмущениях с учетом и без учета эффектов диффузии магнитного поля, что позволило построить в явном виде решения, описывающие волны малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали прямолинейном слое, в канале и в цилиндрическом кольцевом слое переменной глубины. Анализ полученного решения позволил установить факт существования установившегося режима колебаний при больших значениях времени, что служит подтверждением важной роли стратификации плотности жидкого слоя, определяющей в целом ряде случаев его основную динамику, как важный фактор эволюции исследуемого динамического процесса. Получены аналитические решения систем нелинейных уравнений в частных производных, моделирующих геострофическое и квазигеострофическое движения в плоском и сферическом слое. Полученные дисперсионные соотношения и аналитические решения позволяют определить влияние рельефа верхней границы области и динамики нижней границы на магнитогидродинамические характеристики волнового процесса. Анализ структуры магнитогидродинамических величин, возникающих в сферическом жидком слое в результате термодинамических изменений у внешней границы позволяет сделать вывод о существовании сильных изменений в тонком жидком слое, примыкающем к границе области.

9. Доказана возможность существования индуцированного поля на достаточно длительном временном промежутке, а также его существование при отключении фонового внешнего поля. В нелинейной постановке рассмотрена задача о квазигеострофических движениях. Доказано существование неустойчивых динамических режимов, обусловленных совместным действием магнитных сил, гравитационной силы, силы Кориолиса и граничными эффектами. В то же время, управляя значением фонового магнитного поля, можно наблюдать установившийся во времени процесс, то есть, индуциро-

ванное магнитное поля может существовать сколь угодно длительное время.

Полученные в настоящей работе результаты позволяют в дальнейшем: строить классы частных решений краевых задач магнито-гидродинамической волновой динамики, как аналитически, так и численно; проводить комплексные исследования современных проблем геофизики и астрофизики; развивать исследования приоритетных энергоносителей.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендуемых ВАК:

1. *Холодова С.Е.* Квазигеострофические движения во вращающемся слое электропроводной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т.50. №1. С.30-41.
2. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Об особенностях распространения нестационарных волн во вращающемся сферическом слое идеальной несжимаемой стратифицированной электропроводной жидкости в экваториальном широтном поясе // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т.52. №2(306). С.44-51.
3. *Холодова С.Е.* Волновые движения в сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т.47. №12. С.2107-2115.
4. *Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т.48. №5. С.882-898.
5. *Холодова С.Е.* Волновые движения в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т.49. №5. С.916-922.
6. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой неоднородной жидкости в экваториальной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т.50, №11, С.1-15.
7. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Взаимодействие трехмерных волн конечной амплитуды в двухслойной жидкости с вертикальной стенкой при произвольном подходе // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 3. С.38-39.

8. *Холодова С.Е.* Математическое моделирование крупномасштабных движений стратифицированной электропроводной жидкости в сферическом слое // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып.1. С.118-133.
9. *Маргулис В.А., Холодова С.Е., Чучаев И.И., Шорохов А.В.* Магнитный момент квантового цилиндра // Физика твердого тела. 1999. Т.4. Вып.5. С.856-858.
10. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Волновые движения в жидкости с непрерывной стратификацией // Известия Тульского Государственного Университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т.12. Вып.2. С.146-157.
11. *Баринов В.А., Холодова С.Е.* Волны на течении бароклинной жидкости над горизонтальным и неровным дном // Вестник Тюменского государственного университета. 2006. № 5. С.250-256.
12. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Нелинейные планетарные волны в несжимаемой вращающейся жидкости и их взаимодействие с ориентированной в широтном направлении стенкой // Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2006. Т.10(1). С.94-99.
13. *Холодова С.Е.* Волновые движения жидкости во вращающемся кольцевом слое // Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2006. Т.10(1). С.100-106.
14. *Холодова С.Е.* Математическое моделирование волновых движений в бароклинной жидкости над горизонтальным и неровным дном // Труды института системного анализа РАН. Динамика линейных и нелинейных систем. 2006. Т.25(1). С.92-103.
15. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Распространение внутренних и поверхностных волн над горизонтальным и деформируемым дном // Труды института системного анализа РАН. Динамика линейных и нелинейных систем. 2007. Т.25(2). С.83-94.
16. *Холодова С.Е.* Математическое моделирование волновых движений, вызванных колебаниями плоской стенки // Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2007. Т.31(1). С.126-133.
17. *Холодова С.Е.* Влияние рельефа земной поверхности на воздушные течения и волны // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2007. №7(26). С.21-31.

18. *Холодова С.Е.* Редукция уравнений динамики трехмерной стратифицированной сжимаемой вращающейся жидкости // Известия Тульского Государственного Университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2007. Т.14. Вып.2. С.150-159.
19. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Волновые движения, вызванные колебаниями плоской стенки // Записки горного института. Т. 187. Фундаментальные и прикладные исследования в области естественно-научных и гуманитарных дисциплин. 2010. С.113-116.
20. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* К вопросу о существовании волновых режимов в зоне экватора вращающегося сферического слоя электропроводной жидкости // Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2010. Т.49(1). С.80-85.
21. *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Об особенностях динамики МГД волн в экваториальной области // Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2010. Т.50(1). С.115-122.
22. *S.I. Peregudin, S.E. Kholodova.* Waves in a rotating layer of an ideal electrically conducting incompressible fluid with allowance effects of diffusion of magnetic field // 20th International Workshop on BEAM Dynamics and Optimization, June 30–July 4, 2014, Russia, Saint-Petersburg, P. 133-134.
23. *S.I. Peregudin, S.E. Kholodova.* Mathematical and numerical analysis of the waves motion in electrically conducting incompressible fluid // Conference: International conference on numerical analysis and applied mathematics (ICNAAM) location: Rhodes, Greece. Date: Sep 22–28, 2014 Proceedings of the international conference of numerical analysis and applied mathematics 2014 (ICNAAM-2014). Book series: AIP Conference Proceedings Volume: 1648 Article number: Unsp 450011, Published: 2015.
24. *S.I. Peregudin, S.E. Kholodova.* Waves propagation in an infinite horizontal layer and a long narrow channel // 2015 International Conference on Mechanics–Seventh Polyakhov’s Reading; Saint Petersburg State University St. Petersburg; Russian Federation; 2 February 2015 through 6 February 2015; Category number CFP15A24-ART; Code 112290.
25. *S.I. Peregudin, S.E. Kholodova.* Impact of waves to the bottom rheology // 2015 International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov’s Reading; Saint Petersburg State University St. Petersburg;

Russian Federation; 2 February 2015 through 6 February 2015; Category number CFP15A24-ART; Code 112290.

26. *S.I. Peregudin, S.E. Kholodova*. Wave equatorial dynamics in the layer of electrically conducting liquids // 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 – Proceedings 30 November 2015, Article number 7342086, Pages 183–184 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015; St. Petersburg; Russian Federation; 5 October 2015 through 9 October 2015; Category number CFP15ZUV-ART; Code 118393.

27. *S.I. Peregudin, S.E. Kholodova*. Modeling and analysis of the large scale magneto hydrodynamics waves // 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 – Proceedings 30 November 2015, Article number 7342087, Pages 185-186. International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015; St. Petersburg; Russian Federation; 5 October 2015 through 9 October 2015; Category number CFP15ZUV-ART; Code 118393.

28. *S.I. Peregudin, S.E. Kholodova*. Wave dynamics with allowance of the bottom rheology // 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 – Proceedings 30 November 2015, Article number 7342162, Pages 426–427. International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015; St. Petersburg; Russian Federation; 5 October 2015 through 9 October 2015; Category number CFP15ZUV-ART; Code 118393.

29. *S.I. Peregudin, E.S. Peregudina, S.E. Kholodova*. Elements of non-smooth analysis in the theory of waves // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 – Proceeding.

30. *S.I. Peregudin, E.S. Peregudina, S.E. Kholodova*. Methods of non-smooth analysis in problems of fluid dynamic // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 – Proceedings.

Монография

1. *Холодова С.Е., Пeregудин С.И.* Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. Издательство Санкт-Петербургского государственного университета. 2009. 454 с.

Подписано в печать 19.03.2018. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 2,00. Тираж 100 экз. Заказ № 451.

Отпечатано в Издательстве ВВМ .
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.