

На правах рукописи

Клюшников Георгий Николаевич

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
ТЕХНОГЕННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ
В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Колесников Евгений Константинович

Официальные оппоненты: **Ивлев Лев Семёнович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУ «Главная геофизическая обсерватория им.
А. И. Воейкова»,
главный научный сотрудник отдела
геофизического мониторинга и исследований;
Мингалёв Виктор Степанович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБНУ «Полярный геофизический институт»,
заведующий сектором вычислительного экспери-
мента

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учре-
ждение науки **Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
им. Н. В. Пушкова РАН**

Защита состоится «____» _____ 2017 г. в ____ часов на заседании дис-
сертационного совета Д 212.232.30 на базе Санкт-Петербургского государ-
ственного университета по адресу: 198504, г. Санкт-Петербург, Старый Пе-
тергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауди-
тория 405. С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им.
М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адре-
су: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, а также на сайте
<https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/r5B567zNLm.pdf>.

Автореферат разослан «____» _____ 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.232.30,
доктор физико-математических наук, доцент

Е. В. Кустова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи динамики заряженных частиц высокой энергии в геомагнитном поле давно привлекают внимание исследователей. До настоящего времени интерес к указанным задачам был связан с необходимостью объяснения особенностей планетарного распределения интенсивности космических лучей, а также исследованием возможных механизмов образования естественных радиационных поясов Земли.

В последние годы, однако, значительную актуальность приобрели рассматриваемые в настоящей работе задачи динамики в геомагнитном поле заряженных частиц высокой энергии техногенного происхождения. Источниками указанных частиц могут являться, в частности, вторичные частицы высоких энергий, генерируемые в материале массивных орбитальных объектов частицами первичного космического излучения. К указанным объектам, появления которых в околоземном космическом пространстве (ОКП) можно ожидать в обозримом будущем, относятся транспортные хабы, орбитальные солнечные электростанции, космические производственные комплексы. Возможными источниками частиц высокой энергии являются и космические ускорители высоких энергий, концепции которых разрабатываются в нашей стране и за рубежом.

Особую опасность для экологии космоса представляет захват техногенных заряженных частиц высокой энергии магнитным полем Земли, который может приводить к возникновению в ОКП радиационных поясов антропогенной природы. Наконец, ливни вторичных частиц, инициируемые при входе в плотные слои атмосферы техногенными заряженными частицами высокой энергии, могут достигать поверхности Земли, оказывая негативное воздействие на среду обитания.

Общей **целью работы** является исследование особенностей динамики заряженных частиц техногенного происхождения в различных модельных представлениях геомагнитного поля: а) суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей с магнитным моментом диполя, параллельным или антипараллельным однородному полю, б) суперпозиции первых четырёх сферических гармоник ряда Гаусса; а также сравнение полученных результатов с соответствующими результатами для дипольного поля.

В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие **задачи**:

1. Исследовать разрешённые области движения заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей в случае, когда

магнитный момент диполя сонаправлен индукции однородного магнитного поля и значения постоянной Штермера γ положительны.

2. С использованием метода Штермера определить области разрешённых начальных импульсов в задаче о точечной инжекции заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей для различных положений инжектора и исследуемой точки, разработать численный алгоритм построения сечений указанных областей.
3. Решить в квадратурах задачу о дрейфе ведущего центра заряженной частицы по силовой поверхности суперпозиционного поля.
4. Исследовать области применимости дрейфовых уравнений при движении заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей. Провести их сравнение с соответствующими областями для дипольного поля.
5. Изучить структуру областей высыпания заряженных частиц в дипольном магнитном поле для различных значений безразмерных координат источника и импульсов инжектируемых частиц.
6. Построить области высыпания электронов высокой энергии в геомагнитном поле, представленном первыми четырьмя гармониками ряда Гаусса. Рассмотреть различные положения инжектора: на геостационарной орбите на магнитном экваторе, на поверхности Земли в точке с магнитной широтой 25° и магнитной долготой 0° , на поверхности Земли на магнитном экваторе. Сравнить построенные области с областями высыпания электронов высокой энергии в дипольном поле.

Положения, выносимые на защиту

1. Аналитические выражения для границ разрешённой области движения заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей в случае, когда магнитный момент диполя сонаправлен индукции однородного магнитного поля, а значения постоянной Штермера положительны.
2. Условия, при которых в суперпозиционном магнитном поле а) границами сечения области разрешённых начальных импульсов являются только кривые второго порядка, б) границы указанных сечений не являются кривыми второго порядка. Свойства кривых, составляющих границы сечения области разрешённых начальных импульсов, при различных положениях инжектора и прицельной точки.

3. Численный алгоритм построения сечения области разрешённых начальных импульсов, примеры его применения.
4. Аналитическое выражение для квадратуры, описывающей дрейф ведущего центра заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей.
5. Достаточные условия применимости дрейфовых уравнений движения в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей. Свойства областей применимости дрейфового приближения.
6. Геометрические особенности областей высыпания заряженных частиц, инжектируемых точечным источником, в дипольном магнитном поле для различных значений безразмерных координат источника и импульсов частиц.
7. Геометрические особенности областей высыпания электронов высокой энергии, инжектируемых точечным источником, в случае представления потенциала геомагнитного поля суммой первых четырёх гармоник ряда Гаусса.

Методы исследования. При решении сформулированных задач использовались: предложенный Штермером аналитический метод «разрешённых зон»; метод статистических испытаний; метод Кардано решения кубических уравнений; численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты-Мерсона с автоматическим выбором шага. При численном решении системы уравнений движения для большого количества частиц в ансамбле также проводились параллельные вычисления в среде программирования MatLab.

Достоверность результатов обеспечивается тем, что результаты численного моделирования подтверждают теоретические выводы, а также совпадением результатов с ранее известными в частном случае дипольного магнитного поля.

Научная новизна. Рассмотрены разрешённые и запрещённые области движения в ранее не исследованном случае, когда магнитный момент диполя сонаправлен индукции однородного поля, а значения постоянной γ положительны. Разработан вычислительный алгоритм построения сечения области разрешённых начальных импульсов в координатном пространстве, основанный на использовании энергетического неравенства и условия двухкомпонентности разрешённой области в координатном пространстве. Решена в квадратурах ранее не ставившаяся задача о дрейфе ведущего центра

заряженной частицы по силовой поверхности суперпозиционного магнитного поля. Исследована зависимость областей высыпания заряженных частиц от начальных безразмерных координат и импульсов. Впервые построены и исследованы области высыпания электронов высокой энергии на земную поверхность в случае представления потенциала геомагнитного поля первыми четырьмя гауссовыми гармониками для выбранных положений инжектора.

Теоретическая ценность. Аналитические выражения для границ разрешённых областей и областей разрешённых импульсов, выведенная квадратура для дрейфа ведущего центра, а также построенные для безразмерных координат источника и импульсов частиц области высыпания заряженных частиц на поверхность сферы расширяют теоретические представления об особенностях движения заряженных частиц высоких энергий в магнитном поле Земли.

Практическая ценность. Созданные в диссертации математические модели, описывающие движение заряженных частиц в ОКП, могут быть применены в качестве основы для разработки методов прогноза загрязнения ближнего космоса техногенными частицами высокой энергии, а также методов определения предельно допустимого уровня антропогенного воздействия на ОКП.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на заседаниях кафедры физической механики математикомеханического факультета СПбГУ, а также на следующих конференциях: Международная конференция по механике «Седьмые Поляховские Чтения», февраль 2015 г.; IV Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны», г. Санкт-Петербург, январь 2017 г.; Международная студенческая конференция «Science and Progress», ноябрь 2015 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах [1–7], в том числе 3 работах в журналах, рекомендованных ВАК РФ [1–3].

Творческий вклад автора диссертации и соавторов в разработку включенных в диссертацию материалов совместных публикаций. В работах [1, 7] Е. К. Колесникову принадлежит постановка задачи о дрейфе ведущего центра заряженной частицы в суперпозиционном поле, а также идея о записи достаточных условий применимости дрейфовых уравнений движения в форме системы неравенств, аналогичной приведённой в пособии Е. К. Колесникова и Б. В. Филиппова, Г. Н. Ключникову принадлежит математическое решение поставленной задачи. В работе [2] Е. К. Колесникову принадлежит постановка задачи и идея о возможности получения аналити-

ческих выражений для границ разрешённых областей, Г. Н. Ключникову – математическое решение поставленной задачи и дополнение полученных результатов примерами построения разрешённых областей.

Структура и объём работы. Представленная диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 111 наименований. Работа общим объёмом в 103 страницы содержит 28 рисунков и 9 таблиц.

Поддержка. Результаты исследований, приведённые в третьей главе диссертации, были получены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ», исследование № 110-7022-563.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, дана характеристика состояния вопроса, сформулированы цели и задачи работы, обозначена теоретическая и практическая ценность полученных в диссертации результатов, перечислены положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена методу Штермера в задаче о точечной инжекции заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей. Предполагается, что магнитный момент диполя параллелен либо антипараллелен индукции однородного поля.

В первой части главы исследованы разрешённые области движения в координатном пространстве для случая, когда дипольный момент сонаправлен индукции однородного поля, а значения постоянной Штермера γ положительны. Показано, что качественный вид разрешённой области зависит от значения параметра u_2 , определённого по формуле

$$u_2 = \left(\sqrt{B^2 - 4AC} - B \right) / 2C,$$

где

$$A = \frac{16}{9} \left(\frac{4}{3\mu^3} \left(\gamma - \frac{1}{3\mu} \right)^3 + \frac{1}{\mu^4} \left(\gamma - \frac{2}{9\mu} \right)^2 \right),$$

$$B = \frac{8}{3\mu^3} \left(\gamma - \frac{2}{9\mu} \right),$$

$$C = \frac{1}{\mu^2},$$

$\mu = -\alpha/2 = B_0 C_{st}^3 / M$, B_0 – проекция однородного магнитного поля на направление дипольного магнитного момента \mathbf{M} , C_{st} – штермеровская единица длины.

При $u_2 < 1$ граница разрешённой области $\Delta(\alpha, \gamma)$ существует для значений магнитной широты $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos \sqrt[3]{u_2}\right] \cup \left[\arccos \sqrt[3]{u_2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В этом случае область $\Delta(\alpha, \gamma)$ состоит из двух компонент, границы каждой из которых не пересекают плоскость магнитного экватора (Рис. 1 а). При $u_2 > 1$ граница разрешённой области существует для любых значений магнитной широты ψ , соответствующая область $\Delta(\alpha, \gamma)$ является однокомпонентной (Рис. 1 б).

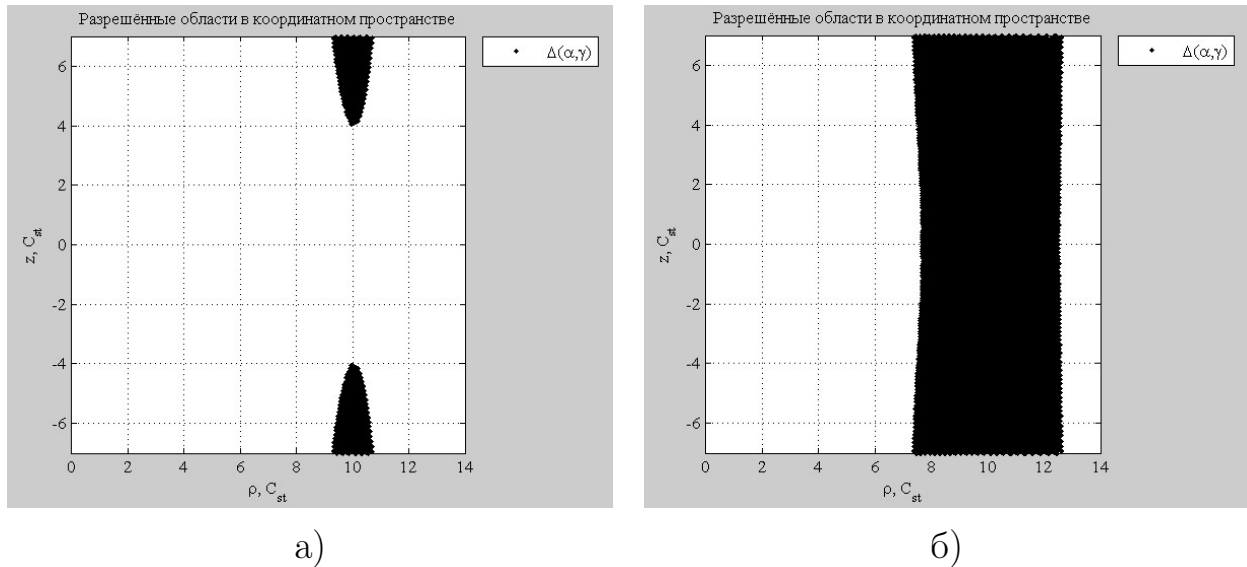


Рис. 1. Разрешённая область движения в координатном пространстве при $\mu > 0, \gamma > 0$: а) $u_2 < 1$, б) $u_2 > 1$.

Во второй части первой главы решена задача об определении области разрешённых начальных импульсов. Установлено, что модуль разрешённого импульса p и угол θ между вектором начальной скорости \mathbf{v}_0 и ортом \mathbf{e}_φ местной системы координат удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{1}{pR_E^2} (a - b\beta) + c \cos \theta \right| \leq 1, \quad (1)$$

где $a = \frac{k^2}{R_c} \left(\frac{\cos \psi_c}{R_c} - \frac{\cos^2 \psi_0}{R_0 \cos \psi_c} \right)$, $b = k^2 \left(R_c \cos \psi_c - \frac{R_0^2 \cos^2 \psi_0}{R_c \cos \psi_c} \right)$, $c = \frac{R_0 \cos \psi_0}{R_c \cos \psi_c}$, $k = \sqrt{eM/c}$, R_0, R_c, ψ_0, ψ_c – сферические координаты начальной и исследуемой точек, e – заряд частицы, c – скорость света, R_E – радиус Земли, $\beta = \alpha(R_E/C_{st})^3$.

Как следует из (1), область разрешённых начальных импульсов является осесимметричной, поэтому для изучения её свойств достаточно рассмотреть сечение $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ плоскостью, содержащей орт \mathbf{e}_φ .

На основе известных условий двухкомпонентности разрешённой области в частных случаях, разобранных в работах В. П. Шалимова и И. П. Швачунова, Г. А. Псиллакиса и З. М. Катсиариса, а также в [2], сформулировано общее условие двухкомпонентности разрешённой области в координатном

пространстве. Приведена система неравенств, при выполнении которой начальная и исследуемая точки находятся в одной компоненте области $\Delta(\alpha, \gamma)$. Доказано, что при движении заряженной частицы в суперпозиционном магнитном поле не существует таких положений начальной точки, при которых соответствующая разрешённая область в координатном пространстве является однокомпонентной для любых значений p и θ . Сформулированы четыре утверждения о структуре сечения области разрешённых импульсов. Приведены примеры построения сечений областей разрешённых импульсов, поясняющие сформулированные утверждения.

В структуре импульсного пространства выявлены следующие 4 области: область 1 — множество импульсов \mathbf{p} , для которых исследуемая точка \mathbf{R}_c принадлежит запрещённой области движения в координатном пространстве $C\Delta(\alpha, \gamma)$; область 2 — множество импульсов \mathbf{p} , для которых разрешённая область $\Delta(\alpha, \gamma)$ является двухкомпонентной и начальная и исследуемая точки находятся в разных её компонентах; область 3 — множество импульсов \mathbf{p} , для которых разрешённая область $\Delta(\alpha, \gamma)$ является однокомпонентной и исследуемая точка \mathbf{R}_c лежит в разрешённой области $\Delta(\alpha, \gamma)$; область 4 — множество импульсов \mathbf{p} , для которых разрешённая область $\Delta(\alpha, \gamma)$ является двухкомпонентной и начальная и исследуемая точки находятся в одной её компоненте. Таким образом, область $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ представляется в виде объединения областей 3 и 4, а её дополнение $C\Sigma(R_0, R_c, \beta)$ — в виде объединения областей 1 и 2. Границами области 1 являются только кривые второго порядка, поэтому отличие границ $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ от указанных кривых определяется существованием в импульсном пространстве точек области 2.

Доказано, что в случае, когда $C\Sigma(R_0, R_c, \beta)$ совпадает с областью 1, границами $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ являются эллипс, парабола, ветви гиперболы или пара пересекающихся прямых, проходящих через начало координат. В указанных условиях при $C < 1$ границей $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ является эллипс с фокусами на оси P_φ , причём если $A - B\beta > 0$, то бóльшая по площади часть области $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ лежит в полуплоскости $P_\varphi > 0$, если $A - B\beta < 0$, то бóльшая по площади часть области $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ лежит в полуплоскости $P_\varphi < 0$. При $C > 1$ границами области $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ являются гиперболы с фокусами на оси P_φ такие, что при $A - B\beta > 0$ обе точки пересечения гипербол с осью P_φ находятся на отрицательной полуоси оси P_φ , при $A - B\beta < 0$ — на положительной полуоси оси P_φ . При $C = 1$ граница области $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$ задаётся параболой с вершиной на оси P_φ . Если $A - B\beta < 0$, то для вершины параболы $P_\varphi > 0$. Границами области 1 в случае $A - B\beta = 0$ являются две пересекающиеся прямые, проходящие через начало координат.

Как показывают результаты расчётов, добавление к дипольному полю внешнего однородного магнитного поля приводит к изменению параметров границ областей 1 и 2, но не меняет их качественный вид. В частности, при $C > 1$ происходит изменение координат точек пересечения границ областей 1 и 2 с осями координат и фокусов гипербол, являющихся границами области 1. Увеличение $|\beta|$ может оказать существенное влияние на структуру областей $\Sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_c, \beta)$. В диссертации приведён пример, когда при усилении однородного поля площадь области 2 уменьшается и начиная с некоторого значения β становится равной нулю.

Во **второй главе** аналитически решена задача о движении заряженной частицы в суперпозиционном поле в дрейфовом приближении, а также исследованы области применимости дрейфовых уравнений.

В первой части главы дана общая формулировка дрейфовых уравнений движения. Радиус-вектор текущего положения частицы \mathbf{r} представлен в виде векторной суммы

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad (2)$$

где \mathbf{a} – вектор, проведённый из центра вращения (ведущего центра) в точку, где находится частица; \mathbf{c} – текущее положение ведущего центра. Отмечено, что в отличие от случая однородного поля величины \mathbf{a} и \mathbf{c} медленно меняются со временем: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$, а ведущий центр может двигаться поперёк магнитного поля \mathbf{B} , перемещаясь с одной силовой линии на другую. Скорость частицы \mathbf{v} состоит из двух частей: скорости вращения \mathbf{w} и скорости дрейфа \mathbf{u} :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{w} + \mathbf{u}. \quad (3)$$

Из уравнений продольной и поперечной динамики ведущего центра с использованием сохранения эквивалентного магнитного момента μ получены выражения для продольной и поперечной составляющих скорости ведущего центра.

Рассмотрены уравнения для силовых линий поля. После приведения общей формулировки дрейфовых уравнений движения дан их вид в суперпозиционном поле. Вычислен поперечный градиент магнитного поля, найдены зависимости радиальной координаты и её производной от широты. С помощью полученных выражений получена зависимость долготы φ от широты ψ ведущего центра:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^\psi \left(\frac{R_e}{C_{st}} \right)^2 \frac{\left(1 - \frac{\eta}{2\eta_{max}} \right) (\widetilde{\nabla B})_\perp \widetilde{\Phi}}{F_1 \eta^2 \cos \psi \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_{max}}}} d\psi, \quad (4)$$

где η – текущее значение модуля безразмерной индукции, η_{max} – значение модуля безразмерной индукции в точке пересечения силовой линии с плоскостью магнитного экватора, $(\widetilde{\nabla B})_{\perp}$ – безразмерная проекция ∇B на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} , $\widetilde{\Phi} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$, F_1 и F_2 – радиальная координата и её производная в безразмерном виде, R_e – экваториальный параметр местной силовой линии, φ_0 – начальное значение координаты φ .

Приведены примеры графиков зависимостей интеграла, пропорционального широте, от долготы при значениях угла между начальной скоростью и индукцией магнитного поля на экваторе, равных 15° , 30° , 45° , 60° и 75° , и различных значений параметра β , пропорционального модулю индукции однородного магнитного поля.

Во второй части второй главы рассмотрен вопрос об областях применимости дрейфовых уравнений движения. Показано, что достаточные условия применимости дрейфовых уравнений в суперпозиционном поле могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \tilde{r} \leq \beta_1 \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\perp}(\tilde{r}, \psi, \alpha)|}}, \\ \tilde{r} \leq \beta_2 \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\parallel}(\tilde{r}, \psi, \alpha)|}}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\tilde{B}(\tilde{r}, \psi, \alpha) = \sqrt{4(1 - \alpha\tilde{r}^3)^2 \sin^2 \psi + (1 + 2\alpha\tilde{r}^3)^2 \cos^2 \psi}$,

$$F_{\parallel}(\tilde{r}, \psi, \alpha) = 6\pi \sin \psi (2(4(\alpha\tilde{r}^3 - 1) \sin^2 \psi - (1 + 2\alpha\tilde{r}^3) \cos^2 \psi) (1 - \alpha\tilde{r}^3) + \cos^2 \psi (4\alpha\tilde{r}^3 - 1) (2\alpha\tilde{r}^3 + 1)),$$

$$F_{\perp}(\tilde{r}, \psi, \alpha) = 3 \cos \psi ((4(\alpha\tilde{r}^3 - 1) \sin^2 \psi - (2\alpha\tilde{r}^3 + 1) \cos^2 \psi) (2\alpha\tilde{r}^3 + 1) + 2 \sin^2 \psi (1 - 4\alpha\tilde{r}^3) (1 - \alpha\tilde{r}^3)),$$

$$\tilde{r} = r/C_{st}, \beta_1 = 0.46, \beta_2 = 0.66.$$

Преобразованы выражения для поперечного и продольного градиента поля, сформулированы достаточные условия применимости. Области, задаваемые системой неравенств (5), построены численно для различных индукций однородного поля \mathbf{B}_0 . Исследовано изменение вида областей применимости дрейфового приближения Ω и дополнений к ним $C\Omega$ при изменении проекции \mathbf{B}_0 на направление, противоположное \mathbf{M} . Показано, что при переходе от дипольного поля к суперпозиционному область $C\Omega$ становится ограниченной. Для каждой из двух рассматриваемых ориентаций однородного поля существует критическое значение B_0 такое, что при меньших по модулю значениях

B_0 область Ω является двухкомпонентной, а при бóльших – однокомпонентной. Площадь области $S\Omega$ уменьшается при увеличении $|B_0|$ и в предельном случае $|B_0| \rightarrow \infty$ область Ω превращается во всю полуплоскость.

В **третьей главе** приведено построение и исследование областей высыпания заряженных частиц, инжектированных точечным источником в геомагнитное поле, представленное первыми гармониками ряда Гаусса.

В первой части третьей главы рассмотрены области высыпания заряженных частиц в дипольном магнитном поле. Выведена система безразмерных уравнений движения, описывающая динамику отрицательно заряженной частицы

$$\begin{cases} x'_1 = x_4, & x'_2 = x_5, & x'_3 = x_6, \\ x'_4 = \frac{3x_2x_3x_6 - x_5(2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)}{r^5}, \\ x'_5 = \frac{x_4(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) + 3x_1x_3x_6}{r^5}, \\ x'_6 = \frac{3x_3(x_2x_4 - x_1x_5)}{r^5}, \end{cases} \quad (6)$$

где x_1, x_2 и x_3 – безразмерные декартовы координаты частицы, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, x_4, x_5, x_6 – безразмерные скорости, штрихами обозначены производные по безразмерному времени τ .

Доказано, что в случае положения инжектора на магнитном экваторе начальные данные для системы уравнений (6) определяются двумя характерными отношениями $r_0/R_E = r|_{\tau=0}/R_E$ и R_E/C_{st} , а также направляющими косинусами вектора начальной скорости. Направление инъекции \mathbf{j} задаётся углом i между начальной скоростью \mathbf{v}_0 и местной вертикалью и углом q между направлением проекции \mathbf{v}_0 на плоскость местного горизонта и местным азимутальным направлением.

Поставленная задача решена с помощью вычислительного алгоритма, заключающегося в последовательном расчёте траекторий заряженных частиц в дипольном магнитном поле. Углы i и q предполагались случайными величинами с равномерным законом распределения в предварительно определяемых промежутках $[i_{min}, i_{max}]$, $[q_{min}, q_{max}]$. Для каждого варианта выборки начальных данных производилось численное интегрирование уравнений движения (6) разностным методом Рунге-Кутты-Мерсона 4-го порядка с автоматическим выбором шага. Число испытаний в серии принималось равным 1 000 000.

На основе указанного алгоритма области высыпания построены для различных значений отношения r_0/R_E и безразмерного импульса p' . Результаты расчётов показывают, что при фиксированном r_0/R_E при изменении p'

происходит качественное изменение структуры областей высыпания, выражающееся, в частности, в изменении числа компонент и изменении интервалов магнитных широт и долгот точек области высыпания.

Во второй части третьей главы рассмотрены области высыпания электронов высокой энергии в геомагнитном поле. Потенциал геомагнитного поля представлен суммой первых гармоник ряда Гаусса

$$V = R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (7)$$

где g_n^m и h_n^m – коэффициенты, определяемые в результате измерений геомагнитного поля, $P_n^m(\cos \theta)$ – многочлены Шмидта.

Система уравнений движения приводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{v}_r, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\hat{v}_\theta}{\hat{r}}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\hat{v}_\varphi}{\hat{r} \sin \theta}, \\ \frac{d\hat{v}_r}{dt} = K\omega_r + \frac{\hat{v}_\theta^2 + \hat{v}_\varphi^2}{\hat{r}}, \\ \frac{d\hat{v}_\theta}{dt} = K\omega_\theta - \frac{\hat{v}_r \hat{v}_\theta}{\hat{r}} + \frac{\hat{v}_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{\hat{r}}, \\ \frac{d\hat{v}_\varphi}{dt} = K\omega_\varphi - \frac{\hat{v}_r \hat{v}_\varphi}{\hat{r}} - \frac{\hat{v}_\theta \hat{v}_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{\hat{r}}, \end{array} \right. \quad (8)$$

где \hat{r} – безразмерная радиальная координата, θ и φ – дополнение до широты и долгота, \hat{v}_r , \hat{v}_φ и \hat{v}_θ – безразмерные скорости в сферической системе координат, $\hat{\omega}_r = \hat{v}_\theta \hat{B}_\varphi - \hat{v}_\varphi \hat{B}_\theta$, $\hat{\omega}_\theta = \hat{B}_r \hat{v}_\varphi - \hat{v}_r \hat{B}_\varphi$, $\hat{\omega}_\varphi = \hat{v}_r \hat{B}_\theta - \hat{v}_\theta \hat{B}_r$, \hat{B}_r , \hat{B}_φ , \hat{B}_θ – безразмерные компоненты магнитной индукции в сферической системе координат, K – безразмерный коэффициент.

С помощью вычислительного алгоритма, изложенного в первой части третьей главы, были построены области высыпания электронов на поверхность Земли для трёх представляющих практический интерес положений инжектора:

1. на геостационарной орбите в точке пересечения магнитного и географического экваторов (Рис. 2);
2. на поверхности Земли в точке пересечения магнитного и географического экваторов;
3. на поверхности Земли в точке с геомагнитной широтой 25° и магнитной долготой 0° .

Вычисления проводились для кинетических энергий E_k электронов, равных 7, 15, 30 и 45 ГэВ. Число испытаний в серии принималось равным 1 000 000.

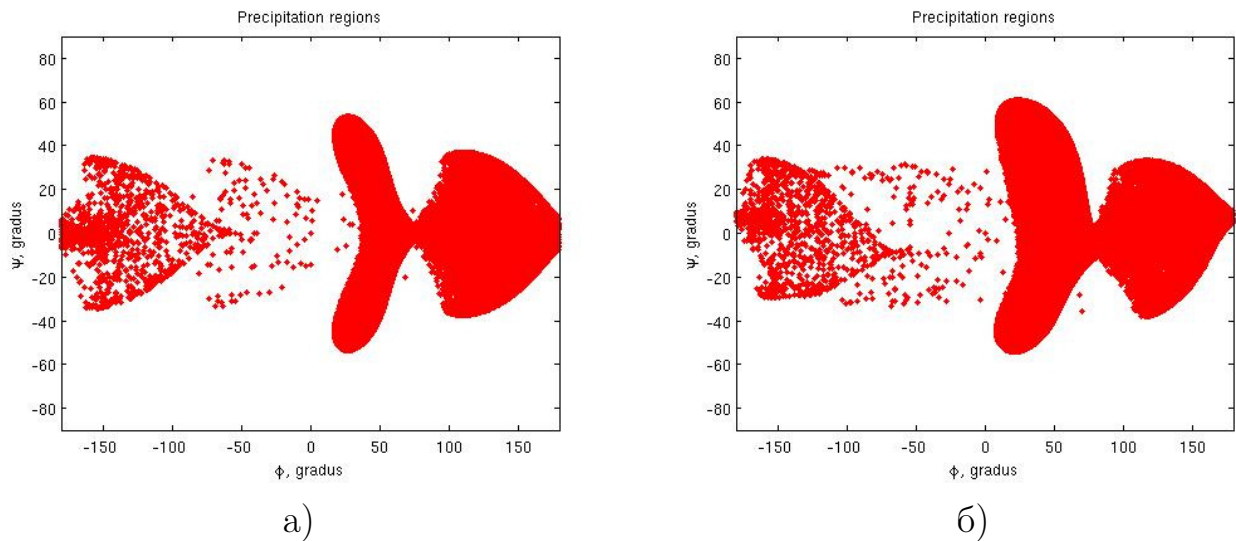


Рис. 2. Области выпадения электронов на земную поверхность для положения инжектора на геостационарной орбите в точке пересечения географического и геомагнитного экваторов при $E_k = 15$ ГэВ: а) $n = 1$, б) $n = 4$.

Установлено, что в общем случае существуют отличия областей выпадения в реальном геомагнитном поле от дипольного, выражающиеся в изменении числа компонент, усилении их асимметрии относительно экватора, изменении формы компонент, а также изменении интервалов допустимых магнитных широт и долгот. Эти отличия становятся наиболее существенными, когда инжектор находится на низкой околоземной орбите.

В **заключении** перечислены основные результаты работы, которые состоят в следующем.

Исследованы разрешённые области движения в случае, когда индукция однородного магнитного поля сонаправлена магнитному моменту диполя, а значения постоянной Штермера положительны. Показано, что структура разрешённой области в координатном пространстве зависит от параметра u_2 , являющегося корнем квадратного уравнения. Для значений $0 < u_2 < 1$ разрешённая область состоит из двух неограниченных компонент, лежащих в верхнем ($z > 0$) и нижнем ($z < 0$) полупространствах. При $u_2 = 1$ компоненты разрешённой области соединяются друг с другом в плоскости магнитного экватора. При $u_2 > 1$ разрешённая область однокомпонентная, причем ближняя и дальняя по отношению к диполю границы существуют для любых значений магнитной широты ψ . Выведена система неравенств, определяющая область разрешённых начальных импульсов. Установлено, что качественно вид областей разрешённых импульсов не меняется при переходе от дипольного к

суперпозиционному полю. Сформулировано условие, при выполнении которого границы сечения области разрешённых импульсов являются кривыми второго порядка, исследованы некоторые свойства этих границ. Разработан вычислительный алгоритм, на основе которого построены сечения области разрешённых импульсов для различных положений начальной и рассматриваемой точек, а также параметра β , пропорционального проекции индукции однородного поля на направление магнитного момента. Полученные результаты дополняют классическую теорию движения заряженных частиц в поле магнитного диполя, развитую К. Штермером.

Аналитически решена задача о движении заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей в дрейфовом приближении. Выведена квадратура, описывающая дрейф ведущего центра по силовой поверхности суперпозиционного поля. С использованием указанной квадратуры построены графики зависимости долготы от широты, соответствующие различным направлениям начальной скорости частицы. Определены области применимости дрейфового приближения для суперпозиционного поля и исследованы их свойства в зависимости от индукции однородного магнитного поля B_0 . Установлено, что при $B_0 \neq 0$ область применимости является неограниченной. При малых значениях модуля индукции B_0 область применимости является двухкомпонентной, при достаточно больших B_0 – однокомпонентной. С увеличением B_0 площадь дополнения к области применимости в ведущей плоскости уменьшается.

Построены и исследованы области высыпания электронов высокой энергии, инжектированных точечным источником в геомагнитное поле, которое моделируется первой дипольной либо первыми четырьмя сферическими гармониками ряда Гаусса. Показано, что при движении заряженной частицы в дипольном магнитном поле в случае положения инжектора на геомагнитном экваторе структура области высыпания однозначно определяется безразмерными координатами источника и безразмерным импульсом частицы. Приведены конкретные примеры расчёта областей высыпания, полученных численным решением системы уравнений для различных начальных данных, задаваемых безразмерными импульсами и координатами. Выведена система безразмерных уравнений движения, удобная для численного интегрирования в случае произвольного числа гармоник в разложении потенциала. Для выбранных начальных координат и кинетических энергий электрона определены значения углов i и q , определяющих направление начальной скорости частицы, для которых возможно пересечение траекторий с земной поверхностью. Построены области высыпания электронов высокой энергии в геомаг-

нитном поле, потенциал которого представлен в виде суммы первых гармоник ряда Гаусса.

Публикации автора по теме диссертации

1. Колесников Е. К., Ключников Г. Н. Задача о движении ведущего центра заряженной частицы в суперпозиции магнитного диполя и однородного магнитного поля// Вестник СПбГУ, серия 1. – 2015. – №1. – с. 123–134.
2. Колесников Е. К., Ключников Г. Н. Разрешённые области в задаче о динамике заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей// Вестник СПбГУ, серия 1. – 2016. – №2. – С. 293–299.
3. Ключников Г. Н. Метод Штермера в задаче о точечной инжекции заряженных частиц в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей// Естественные и технические науки. – 2017. – №1. – С. 54–68.
4. Колесников Е. К., Ключников Г. Н. Об областях применимости дрейфового приближения в задаче о динамике заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей// Международная научная конференция по механике «Седьмые Поляховские Чтения». – 2 февраля–6 февраля 2015 г. Тезисы докладов. – СПб: ООО «Пантон». – 2015. – С. 252.
5. *Klyushnikov G.* Precipitation regions in the problem of charged particles dynamics in the Earth's magnetic field//International Student Conference «Science and Progress». Abstracts – Nov. 2015. – P. 46.
6. Ключников Г. Н. Структура областей высыпания электронов высокой энергии, инжектируемых точечным источником с поверхности Земли в геомагнитное поле, представленное первыми гармониками ряда Гаусса// Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны/– Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. – № 4. – г. Санкт-Петербург, 11 января 2017 г. – С. 16–19.
7. *Kolesnicov E., Kluishnicov G.* About drift approach applicability regions in the problem for dynamics of a charged particle in a superposition of dipole and uniform magnetic fields //International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2015. – Feb. 2015. – DOI: 10.1109/POLYAKHOV.2015.7106736.