

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

БОЯРСКАЯ Мария Леонидовна

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,  
ПОДКРЕПЛЕННОЙ СТЕРЖНЯМИ И  
ПЛАСТИНКАМИ

01.02.04 — МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

АВТОРЕФЕРАТ  
ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ  
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 2017

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

- Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
**ФИЛИППОВ Сергей Борисович**
- Официальные оппоненты:** **МИХАСЕВ Геннадий Иванович**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
био- и наномеханики Белорусского  
государственного университета
- СУХОТЕРИН Михаил Васильевич**  
доктор технических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики Государственного  
университета морского и речного флота  
имени адмирала С.О. Макарова
- Ведущая организация:** Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого

Защита состоится 20 апреля 2017 г. в 15 часов на заседании  
диссертационного совета Д 212.232.30 на базе Санкт-Петербургского  
государственного университета по адресу: 1998504, Санкт-Петербург,  
Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке  
им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета  
по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д.7/9  
и на сайте <https://disser.spbu.ru/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite/details/12/1269.html>

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 212.232.30, д. ф.-м. н., проф.

Кустова Е.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы.**

Тонкостенные конструкции, содержащие оболочки и пластины, широко применяются в технике. Опыт показывает, что тонкостенные конструкции могут разрушиться не из-за высоких напряжений, превышающих предел прочности, но вследствие недостаточной упругой устойчивости тонкостенных элементов. Наличие динамических нагрузок, действующих на оболочки и пластины, приводит к необходимости изучения их колебаний.

При проектировании надводных и подводных кораблей, летательных аппаратов, тепловозов и вагонов, трубопроводов, резервуаров, куполов и покрытий в инженерных сооружениях часто используются подкрепленные оболочки, которые обладают большей жесткостью по сравнению с гладкими оболочками такого же веса. Во многих случаях расчеты подкрепленных оболочек на устойчивость имеют существенное значение.

В данной работе решены некоторые частные задачи теории колебаний и устойчивости подкрепленных оболочек. В первой главе для определения частот колебаний круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной абсолютно жесткими цилиндрическими роликами используется разложение решений в ряд Фурье. Во второй и третьей главе приближенные значения критических нагрузок потери устойчивости подкрепленных оболочек и пластин находятся с помощью асимптотических и численных методов.

**Цель работы.** Основной целью диссертационной работы является построение моделей подкрепленных цилиндрических оболочек; исследование частот и форм колебаний, устойчивости оболочки, поиск оптимальных значений параметров на основе построенных моделей.

**Основные методы исследований.** Для достижения поставленной цели использована классическая теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа - Лява, точность которой оказывается достаточной для вывода всех полученных в работе приближенных формул.

В задаче о колебаниях оболочки на роликах решения представлены в виде рядов Фурье. При решении задач устойчивости подкрепленных оболочек и пластин, использован асимптотический метод Вишика-Люстерника. В ряде случаев для поиска параметра критической нагрузки применен вариационный метод. Полученные приближенные результаты сравниваются с результатами, найденными численно методом прогонки. Для проведения расчетов созданы программы базы пакетов Mathematica 7.0 и Maple.

**Научная новизна.** Решена задача о колебаниях вращающейся цилиндрической оболочки, подкрепленной абсолютно жесткими цилиндрическими роликами, найдены частоты и формы малых свободных коле-

баний при произвольном числе роликов в случае их равномерного расположения.

Решена задача потери устойчивости кольцевой пластинки, подкрепленной круговым стержнем, рассматриваемой как модель шпангоута для круговой цилиндрической оболочки.

Решена комплексная задача потери устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением. В качестве модели шпангоутов использованы как упрощенная стержневая, так и пластинчатая модели. Найдены значения критического давления для подкрепленной оболочки и оптимальные параметры подкрепляющего оболочку шпангоута.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается математически корректной постановкой задач, использованием строгих аналитических методов, сравнением аналитических и численных результатов.

**Научная и практическая ценность.** Решен ряд новых задач устойчивости и колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек.

Рассмотренная в первой главе цилиндрическая оболочка, подкрепленная роликами, является моделью оболочки центробежного концентратора, используемого для обогащения руд.

Во второй и третьей главах получены приближенные формулы для расчета критического давления и оптимальной формы шпангоута, которые могут быть использованы при проектировании тонкостенных конструкций. Для оболочки с фиксированной массой оптимальным параметрам соответствует наибольшее критическое давление. Расчеты для цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, подверженной действию равномерного внешнего давления, могут быть использованы при проектировании подводных лодок, а оболочка, подверженная действию внутреннего давления может являться моделью для котлов высокого давления.

**Апробация работы.** Результаты работы были представлены: на объединенном семинаре СПбГУ и ПГУПС "Компьютерные методы в механике сплошной среды" (Санкт-Петербург 2009, 2010), на Международной научной конференции по механике "Шестые Поляховские чтения", СПб, 2012, на XXXXV Всероссийском симпозиуме по механике и процессам управления, посвященный 70-летию Победы, Миасс, 22 - 24 декабря 2015, на Европейском конгрессе по Вычислительным методам в прикладных науках и технике (ECCOMAS Congress 2016), 5-10 June 2016 Crete Island, Greece, на семинарах кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 7 работ. Список публикаций приведен в конце автореферата. Статьи [1] – [3] вышли в журнале, рекомендованном ВАК. Переводы работ [1], [3] и работа

[7] индексированны в базе Scopus.

В работе [1] соавтору Филиппову С.Б. принадлежит численное решение задачи, а Боярской М.Л. — ее приближенное аналитическое решение. В работе [2] соавтор Филиппов С.Б. нашел начальное напряженное состояние подкрепленной оболочки, а Боярская М.Л. получила формулы для критического давления и оптимальных параметров. В работе [3] и [7] соавтор Филиппов С.Б. вывел вариационные формулы, а Боярская М.Л. выполнила численные расчеты методом прогонки и провела анализ полученных результатов. В работе [6] соавторам Филиппову С.Б. и Кулаковскому И.А. принадлежат вычисления оптимальных параметров для задачи о колебаниях подкрепленной шпангоутами оболочки, а Боярской М.Л. — решение той же задачи для случая потери устойчивости оболочки.

**Результаты, выносимые на защиту:**

1. Изучены колебания цилиндрической оболочки, вращающейся на роликах. С помощью представления решения в виде отрезка ряда Фурье получены приближенные формулы для определения частот и форм свободных колебаний. Проведен анализ результатов и их сравнение с данными численного расчета.

2. Исследована устойчивость широкого шпангоута под действие равномерной нагрузки, приложенной к его краю. В качестве модели такого шпангоута используется кольцевая пластина, подкрепленная по краю круговым стержнем. Асимптотическим и вариационным методами получены приближенные формулы для определения критических нагрузок. Проанализировано влияние размеров поперечного сечения стержня на их величину.

3. Получены простые приближенные формулы для расчета критического давления для оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением в случае узких и широких шпангоутов, для случаев внешнего и внутреннего давления и расположения шпангоутов снаружи или внутри оболочки. Установлено, что шпангоуты с тавровым поперечным сечением эффективнее шпангоутов с прямоугольным сечением за исключением случая, когда широкие шпангоуты расположены внутри оболочки, находящейся под действием внутреннего давления.

4. С помощью стержневой модели шпангоутов для подкрепленной оболочки с фиксированной массой найдены оптимальные параметры, соответствующие максимальному значению критического давления. С использованием пластиночной модели определена оптимальная форма шпангоута с тавровым поперечным сечением.

**Объем и структура диссертации.**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 42 наименования. Число иллюстраций равно 64. Общий объем работы 80 страниц.

Работа поддерживалась грантами РФФИ 13-01-00523 и 16-01-00580.

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводятся математические модели, используемые в задачах колебаний и устойчивости оболочек, обсуждаются основные методы, используемые при решении краевых задач, дается обзор литературы, касающейся задач о колебаниях оболочек, устойчивости кольцевых пластин и подкрепленных оболочек, формулируются цели и задачи работы, а также результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** получены приближенные формулы для вычисления частот и форм малых свободных колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки, которая служит моделью оболочки центрбежного концентратора, используемого для обогащения руд.

Найдена нижняя часть спектра частот бесконечной цилиндрической оболочки, вращающейся на  $n$  роликах с постоянной угловой скоростью. В предположении о нерастяжимости меридиана оболочки приближенные выражения для нормального и окружного перемещений  $w$  и  $v$  ищутся в виде отрезков рядов Фурье по окружной координате  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} w(\varphi, t) &= \sum_{k=1}^N [a_k(t) \cos k\varphi + b_k(t) \sin k\varphi], \\ v(\varphi, t) &= \sum_{k=1}^N \left[ -\frac{a_k(t)}{k} \sin k\varphi + \frac{b_k(t)}{k} \cos k\varphi \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Решения (1) удовлетворяют условиям  $w(\varphi_j, t) = 0$ , где  $\varphi = \varphi_j$  — координата образующей цилиндрической оболочки, контактирующей с неподвижным роликом, Уравнения Лагранжа для обобщенных координат  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$  с множителями  $\lambda_j$  и  $n$  уравнений связей  $w(\varphi_j, t) = 0$  составляют систему из  $2N + n$  уравнений, решение которой ищется в виде

$$a_k = A_k e^{i\omega\tau}, \quad b_k = B_k e^{i\omega\tau}, \quad \lambda_j = L_j e^{i\omega\tau},$$

где  $\omega$  — частота колебаний,  $\tau$  — безразмерное время.

Условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $L_j$  дает уравнения частот. В случае равномерного расположения роликов и при  $N = n$  получены явные приближенные формулы для частот колебаний. Для  $n = 2n_1 + 1$ ,  $n_1 = 1, 2, \dots$  эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^{(k)} &= \frac{\sqrt{\Omega^2(d_p - d_k)^2 + (c_p + c_k)[e_p^2 + e_k^2 + \Omega^2(e_p + e_k)]} \mp \Omega(d_p - d_k)}{(c_p + c_k)}, \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{e_n(e_n + \Omega^2)}{c_n}}, \quad c_k = 1 + \frac{1}{k^2}, \quad d_k = k - \frac{1}{k}, \quad e_k = k^2 - 1. \\ & \quad k = 1, 2, \dots, n_1, \quad p = n - k. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Omega$  — безразмерная угловая скорость вращения оболочки.

При  $n = 2n_1$  частоты определяются по формулам (2), если  $k < n_1$ . В случае  $k = n_1$  вместо двух частот имеется одна частота

$$\omega^{(n_1)} = \sqrt{e_{n_1}(e_{n_1} + \Omega^2)/c_{n_1}}. \quad (3)$$

При уменьшении угловой скорости вращения оболочки  $\Omega$  частоты  $\omega_1^{(k)}$  и  $\omega_2^{(k)}$  сближаются. Если  $\Omega = 0$ , то вместо этих двух частот появляется одна кратная частота. Превращение кратной частоты неподвижной оболочки  $\omega^{(k)}$  в частоты  $\omega_1^{(k)}$  и  $\omega_2^{(k)}$  вращающейся оболочки называют расщеплением частот.

Нетривиальные решения, соответствующие частотам  $\omega_1^{(k)}$ ,  $\omega_2^{(k)}$ ,  $\omega_n$  и  $\omega^{(n_1)}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} w_1^{(k)} &= Ae^{i\omega\tau}(e^{-ik\varphi} - e^{ip\varphi}), & w_2^{(k)} &= Ae^{i\omega\tau}(e^{ik\varphi} - e^{-ip\varphi}), \\ w_n &= Ae^{i\omega\tau} \sin n\varphi, & w_{n_1} &= Ae^{i\omega\tau} \sin n_1\varphi, \end{aligned}$$

где  $A$  — произвольная постоянная.

В Таблице 1 представлены значения низших безразмерных частот колебаний для различного числа роликов  $n$  и двух значений безразмерной угловой скорости вращения оболочки  $\Omega$ . Сравнение аналитических

Таблица 1: Низшие частоты колебаний для различного числа роликов.

$n$	$\Omega$	метод	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
3	0	аналитический	1.66	1.66	<b>7.59</b>			
		численный	1.64	1.64	7.59			
3	1	аналитический	1.52	2.44	8.05			
		числ.	1.50	2.36	7.94			
6	0	аналитический	<b>7.59</b>	10.1	10.1	13.8	13.8	<b>34.5</b>
		численный	7.59	9.94	9.94	12.8	12.8	34.5
6	1	аналитический	8.05	9.13	11.1	12.3	15.4	35.0
		численный	8.03	9.47	11.2	11.9	14.1	34.9

результатов с численными, полученными методом прогонки, показывает, что относительная погрешность, возникающая при вычислении частот по приближенным формулам (2) и (3), не превосходит 10%.

Жирным шрифтом выделены частоты, значения которых совпадают с найденными численно. Для них аналитическое решение является точным, а формы колебаний пропорциональны функции  $\sin n\varphi$ .

Во второй части первой главы рассмотрены колебания цилиндрической оболочки конечной длины с шарнирно опертыми краями. Оболочка подкреплена по образующим  $\varphi = \varphi_j$   $n$  абсолютно жесткими цилиндрическими роликами.

Как и в случае бесконечной оболочки, перемещения ищутся в виде отрезков ряда Фурье, но на этот раз решения зависят еще и от продольной переменной  $x$ . В частности,

$$w = \sum_{k=1}^N (a_k(t) \cos k\varphi + b_k(t) \sin k\varphi) \sin(\pi nx/l), \quad (4)$$

где  $l$  — длина оболочки.

Для описания колебаний оболочки использованы уравнения Лагранжа второго рода с множителями. В случае равномерного расположения роликов и  $N = n$  получены биквадратные уравнения для определения частот.

В Таблице 2 приведены результаты расчетов первой безразмерной частоты для невращающейся оболочки. Здесь  $n = 3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\alpha = \pi/l$ .

Результаты показывают, что различие между частотами колебаний оболочек конечной и бесконечной длины увеличивается не только с уменьшением длины оболочки, но и с уменьшением ее толщины.

**Во второй главе** рассматривается потеря устойчивости под действием радиальных напряжений шпангоута с тавровым поперечным сечением, подкрепляющего цилиндрическую оболочку. В качестве модели такого шпангоута используется круговая пластинка. Край пластинки, сопряженный с оболочкой, предполагается жестко заделанным, а свободный край подкреплен круговым стержнем. На рис. 1 изображено поперечное сечение шпангоута.

Рассматриваются три случая. В первом (втором) случае пластинка расположена снаружи оболочки, находящейся под действием внутреннего (внешнего) давления (см. рис. 2а, 2б). В третьем случае пластинка находится внутри оболочки, находящейся под действием внешнего давления (см. рис. 2с).

За единицу длины выберем радиус цилиндрической оболочки. Потеря устойчивости кольцевой пластинки под действием радиальных напряжений  $\sigma_0$  описывается безразмерным дифференциальным уравнени-

Таблица 2. Частота  $\omega_1$  для трех роликов

$l$	$\omega_1$	
	$h=1/15$	$h=1/50$
5	8.65	28.2
10	3.19	9.17
15	2.11	4.60
20	1.83	2.98
$\infty$	1.66	1.66

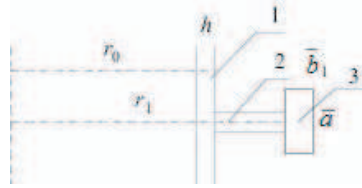


Рис. 1. Поперечное сечение пластинки, подкрепленной стержнем; 1 — оболочка, 2 — пластинка, 3 — стержень.



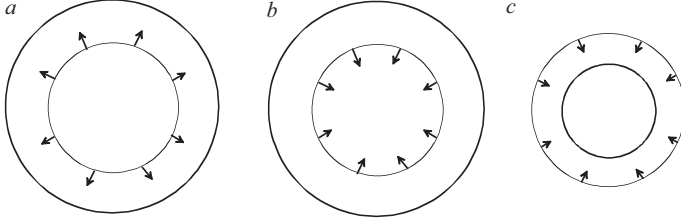


Рис. 2. Радиальные напряжения, действующие на пластинку.

ем относительно прогиба  $w_p$ :

$$\frac{d^4 w_p}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_p}{dr^3} - \frac{2m^2 + 1 - \beta t_1}{r^2} \frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{2m^2 + 1 + \beta t_2}{r^3} \frac{dw_p}{dr} + \frac{m^2(m^2 - 4 - \beta t_2)}{r^4} w_p = 0, \quad (5)$$

где  $r$  — радиальная координата,  $m$  — число волн по окружности,  $t_1$  и  $t_2$  безразмерные начальные усилия,  $\beta = a_1 \sigma_0 r_0^3 / D$  — параметр нагрузки,  $a_1$  — толщина пластинки,  $D$  — ее изгибная жесткость.

Для определения начальных усилий  $t_1$  и  $t_2$  использованы уравнения, описывающие осесимметричную деформацию кольцевой пластинки в ее плоскости. В первом случае

$$t_{1,2} = \frac{r^2(1 - S_0)\gamma \mp r_1^2(\gamma + \delta S_0)}{(1 - S_0)\gamma - r_1^2(\gamma + \delta S_0)}, \quad (6)$$

где  $\gamma = 1 - \nu$ ,  $\delta = 1 + \nu$ ,  $S_0 = \delta S / (a_1 r_1)$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $S$  — безразмерная площадь поперечного сечения стержня. Начальные усилия для второго случая, которому соответствует рис. 2b, получаются заменой  $t_k$  на  $-t_k$  в формулах (6). Начальные усилия для третьего случая дает замена  $S_0$  на  $-S_0$  в формулах (6). Значение  $S_0 = 0$  соответствует шпангоуту с прямоугольным поперечным сечением.

Для узкой пластинки безразмерной шириной  $\varepsilon = r_1 - 1 \ll 1$  в предположении  $m \sim 1$ , после замены переменной  $r = 1 + \varepsilon x$  в уравнениях (5) и отбрасывания малых членов получено приближенное уравнение и приближенные граничные условия. Приближенные начальные усилия имеют вид

$$t_1 = 1 - \frac{\varepsilon a_1 x}{\varepsilon a_1 + S}, \quad t_2 = \frac{\nu S - a_1}{\varepsilon a_1 + S}. \quad (7)$$

Для определения значения  $\beta_c$  краевой задачи вариационным методом в качестве функции Ритца выбрана функция

$$W(x) = 1 - \cos kx, \quad (8)$$

где  $k(c) = \pi(c+1)/(c+2)$ .

Для пластинки с параметрами  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $a_1 = 0.01$ , сопряженной с круговым стержнем, имеющим прямоугольное поперечное сечение шириной  $a$  и высотой  $b_1$ , значения параметра критической нагрузки  $\beta_c$  для различных  $a$  и  $b_1$  приведены в Таблице 3. В последнем столбце Таб-

Таблица 3. Зависимость величин  $c$ ,  $S$ ,  $I_1$ ,  $G_2$  и  $\beta_c$  от размеров поперечного сечения стержня

$a$	$b_1$	$c$	$S_1$	$I_1$	$G_2$	Значения $\beta_c$	
						Метод Рунге	Прогонка
0	0.0	0	0.0	3.04	0.0	830	784
0.01	0.01	0.001	0.01	3.05	0.15	685	663
0.04	0.01	0.058	0.04	3.31	0.48	520	515
0.05	0.02	0.227	0.10	4.08	0.99	448	447
0.06	0.03	0.590	0.18	5.74	1.57	469	468
0.06	0.03	1.248	0.28	8.78	2.07	542	541
0.08	0.05	2.330	0.40	13.5	2.24	640	639
0.10	0.07	6.370	0.70	25.7	1.71	816	816
0.12	0.09	14.15	1.08	35.3	1.03	915	915

лицы 3 содержатся значения  $\beta_c$ , полученные численным интегрированием краевой задачи методом прогонки. Для рассматриваемого примера погрешность приближенной формулы превосходит 6%.

При увеличении размеров поперечного сечения стержня параметр критической нагрузки  $\beta_c$  сначала убывает, а затем начинает возрастать. Убывание критической нагрузки с ростом размеров поперечного сечения стержня связано с увеличением докритического усилия  $t_1$  на внешнем крае пластинки (и пропорционального ему коэффициента  $G_2$ ), а ее возрастание — с увеличением жесткости стержня  $c$  (и быстрого возрастания коэффициента  $I_1$  при  $a > 0.06$ ,  $b_1 > 0.03$ ). Такой результат свидетельствует о том, что в задаче о потере устойчивости подкрепленной оболочки под действием внутреннего давления шпангоуты с прямоугольным поперечным сечением оказываются более эффективными по сравнению со шпангоутами с тавровым поперечным сечением.

Второй случай — действия на оболочку внешнего давления — отличается от первого только тем, что на краю  $r = r_0$  действуют растягивающие радиальные напряжения, то есть они имеют противоположный знак. Краевая задача при  $m \sim 1$  не имеет нетривиального решения, и потери устойчивости не происходит. В случае большого числа волн по окружности  $m \sim 1/\varepsilon$  приближенное уравнение потери устойчивости и

граничные условия для узкой пластинки будут иметь вид:

$$\frac{d^4 w_p}{dx^4} - \varepsilon^2(2m^2 - \beta t_1) \frac{d^2 w_p}{dx^2} + \varepsilon^4 m^2(m^2 - \beta t_2) w_p = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w_p = w_p' = 0, \quad x = 0, \\ w_p'' + c w_p' - m^2 \nu \varepsilon^2 w_p = 0, \quad w_p''' - \varepsilon^2[m^2(2 - \nu) - \beta t_1] w_p' = 0, \quad (10) \\ x = 1. \end{aligned}$$

При  $t_1 = 1$  краевая задача (9) – (10) имеет аналитическое решение. Это решение и выбирается в качестве функции Ритца при решении задачи (9) – (10) вариационным методом.

Относительная погрешность приближенных значений  $\beta_c$ , найденных по вариационной формуле, в сравнении с численными результатами, полученными методом прогонки, оказывается меньше 0.1%. На рис. 3 показана зависимость величины  $\beta_0 = \varepsilon^2 \beta_c$  для пластинки с параметрами  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $a_1 = 0.01$ , подкрепленной стержнем с квадратным поперечным сечением, от размера поперечного сечения  $a = b_1$ .

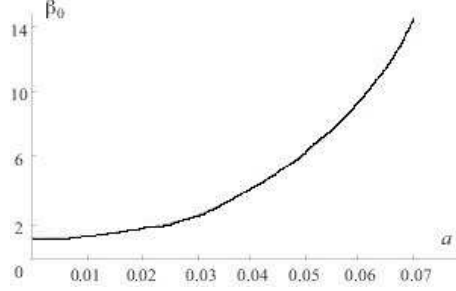


Рис. 3. Зависимость параметра  $\beta_0$  от размера сечения стержня  $a$ .

Выражение  $\beta t_2$  в рассмотренном случае имеет противоположный знак по сравнению с первым случаем. Поэтому критическая нагрузка  $\beta_c$  возрастает с ростом параметра  $S_0$  для всех  $S_0 > 0$ , и при действии внешнего давления использование шпангоутов с тавровым поперечным сечением более эффективно, чем шпангоутов с прямоугольным поперечным сечением.

В случае потери устойчивости кольцевой пластинки под действием сжимающих радиальных усилий, действующих на ее внешнем заделанном крае (см. Рис. 2с) безразмерная ширина пластинки  $\varepsilon = 1 - r_1 \ll 1$ . При  $m \sim 1/\varepsilon$  приближенные уравнение, граничные условия и начальные усилия получены заменой переменной  $r = 1 - \varepsilon x$ .

Краевая задача для шпангоута, расположенного внутри оболочки, отличается от предыдущей только выражениями для  $t_1$  и  $t_2$ . На рис. 4. показана зависимость  $\beta_0$  для пластинки с теми же значениями параметров, что и для предыдущего случая, подкрепленной стержнем, от

размера поперечного сечения стержня  $a = b_1$ . Критическая нагрузка  $\beta_c$  возрастает с ростом параметров  $a$  и  $b_1$ .

**В третьей главе**

исследуется устойчивость тонкой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением под действием равномерного давления. Шпангоуты рассматриваются сначала как круговые стержни, что допустимо в случае их небольшой ширины.

Затем задача решается с использованием пластиночной модели шпангоута. Это необходимо в случае подкрепления оболочки достаточно широкими шпангоутами.

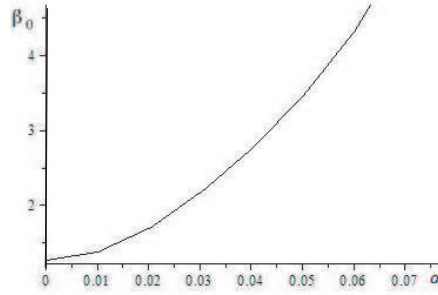


Рис. 4. Зависимость параметра  $\beta_0$  от размера сечения стержня  $a$  при расположении шпангоута внутри оболочки.

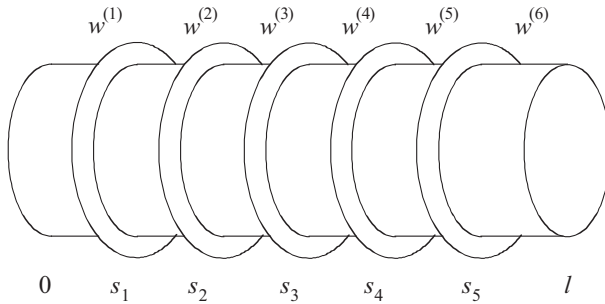


Рис. 5. Подкрепленная цилиндрическая оболочка.

В случае использования стержневой модели шпангоута для описания потери устойчивости подкрепленной по параллелям  $s = s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_s$  одинаковыми шпангоутами оболочки (рис. 5) под действием равномерного внешнего бокового давления  $p$  использованы безразмерные уравнения полубезмоментной теории:

$$\frac{d^4 w^{(i)}}{ds^4} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_s, \quad (11)$$

где  $s$  — координата, направленная по образующей,  $w^{(i)}$  — проекция перемещения на направление нормали для  $s \in [s_{i-1}, s_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\text{sdwgf}n = n_s + 1$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_n = l$ ,  $l$  — безразмерная длина оболочки,

$$\alpha^4 = (m^4 \lambda - \mu^4 m^8) / \sigma, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad \lambda = \frac{\sigma p}{Eh},$$

$m$  — число волн по параллели,  $E$  — модуль Юнга,  $\mu^4 = h^2/12$  — малый параметр,  $h$  — безразмерная толщина оболочки. В качестве граничных условий для уравнений (11) используются условия шарнирного опирания краев оболочки.

В предположении, что оболочка и шпангоуты изготовлены из одного материала, а характерный размер поперечного сечения шпангоута много меньше  $\mu$ , условия сопряжения на параллелях, подкрепленных шпангоутами имеют вид

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= w^{(i+1)}, & w^{(i)'} &= w^{(i+1)'}, \\ w^{(i)''} &= w^{(i+1)''}, & w^{(i)'''} - w^{(i+1)'''} &= -cw^{(i+1)}, \\ s &= s_i, & i &= 1, 2, \dots, n_s, \\ c &= m^8 \mu^4 l \eta / (\sigma n), & \eta &= 12 \sigma n I / (h^3 l) \end{aligned} \quad (12)$$

где  $I$  — момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра.

Наименьшему положительному значению параметра  $\alpha$ , для которого краевая задача для уравнения (11) имеет нетривиальное решение, соответствует  $\lambda_1$  — критическое значение параметра  $\lambda$ , при котором происходит потеря устойчивости подкрепленной оболочки. В случае равномерного расположения шпангоутов для  $\lambda_1$  методом осреднения получена формула:

$$\frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_1(0)} \simeq \begin{cases} (1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ n, & \eta > \eta_*, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\eta_* = n^{4/3} - 1$ ,  $\lambda_1(0)$  — критическое значение параметра нагрузки для неподкрепленной оболочки. Приближенную формулу (13) можно применять как при внешнем, так и при внутреннем расположении шпангоутов.

Для оболочки толщиной  $h$ , подкрепленной шпангоутами с тавровыми поперечными сечениями, размеры которых приведены на рис. 6, обозначим  $k = b/a$ ,  $k_1 = a_1/a$ ,  $k_2 = b_1/b$ .

При  $k_1 = 1$  или  $k_2 = 1$  шпангоут имеет прямоугольное поперечное сечение. Масса подкрепленной оболочки  $M_s = 2\pi R^3 \rho h l + 2\pi R^3 \rho (n-1) S_{sp}$ , а критическое давление для нее

$$p_1 = \frac{\lambda_1(\eta) E h}{\sigma},$$

где  $S_{sp}$  — площадь поперечного сечения шпангоута, а  $\lambda_1(\eta)$  находится по формуле (13). Обозначив  $f_b = p_1/p_0$ ,  $d = h/h_0$ , где  $l$  — длина,  $r_0$  — радиус

и  $h_0$  – толщина неподкрепленной оболочки, получим

$$f_b = d^{5/2} \frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_1(0)} = \begin{cases} d^{5/2}(1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ d^{5/2}n, & \eta > \eta_*. \end{cases} \quad (14)$$

При фиксированных значениях параметров  $l, h_0, n_s, k, k_1, k_2$  и при достаточно малом  $h_0$  функция  $f_b$  имеет максимум в точке  $d = d_*$ , где  $d_* \in [0, 1]$  – корень кубического уравнения

$$d^3 - \frac{B}{\eta_* A^2} (d - 1)^2 = 0.$$

Оптимальное значение  $a_*$  размера поперечного сечения  $a$  определяется по формуле  $a_* = \sqrt{(1 - d_*)/A}$ , вытекающей из предположения равенства масс неподкрепленной и подкрепленной оболочек  $M_s = M_0$ . Здесь  $A = n_s k(k_1 + k_2 - k_1 k_2)/lh_0$ . Максимальное значение  $f_b^*$  функции  $f_b(d)$  равно  $f_b^* = n d_*^{5/2}$ .

В таблице 4 приведены значения оптимальных параметров  $a_*, d_*$  и максимальных значений  $f_b^*$  функции  $f_b(d)$  для случая  $l = 10, h_0 = 0.01, n_s = 5, k = 1, k_2 = k_1, \nu = 0.3$ .

Случай  $k_1 = k_2 = 1$  соответствует прямоугольной форме поперечного сечения шпангоута. При уменьшении  $k_1$ , чему соответствует утончение прямоугольных частей шпангоута, значение относительного критического давления  $f_b^*$  для подкрепленной оболочки увеличивается, в то время как масса ее не изменяется. Это показывает, что шпангоут с тавровым сечением является более эффективным, чем шпангоут с прямоугольным сечением.

С увеличением относительной ширины шпангоута  $k$  функция  $f_b^*(k)$  возрастает. Однако, расчеты, проведенные в методом конечных элементов, показывают, что при достаточно больших значениях  $k$  критическое давление убывает. Это связано с тем, что при увеличении  $k$  происходит смена формы потери устойчивости. Форма потери устойчивости первого типа, аналогичная форме потери устойчивости гладкой оболочки, сменяется формой потери устойчивости второго типа, при которой деформация локализуется на шпангоуте, в то время как оболочка практически не деформируется. Стержневая модель пригодна только для описания потери устойчивости первого типа. Для адекватного описания потери

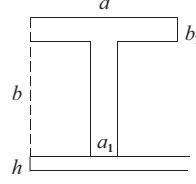


Рис. 6. Тавровое поперечное сечение шпангоута.

Таблица 4. Параметры  $a_*, d_*$  и значение  $f_b^*$  для различных  $k_1 = k_2$

$k_1$	$d_*$	$a_*$	$f_b^*$
1	0.908	0.0429	4.712
0.8	0.912	0.0430	4.755
0.6	0.922	0.0431	4.895
0.4	0.941	0.0428	5.160
0.2	0.969	0.0414	5.549

устойчивости второго типа необходимо использовать пластиночную модель шпангоута. Внутреннее давление (случай 3) может вызвать потерю устойчивости только по форме второго типа.

При подкреплении оболочки по параллелям  $s = s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_s$  широкими шпангоутами с тавровым сечением моделью шпангоута служит кольцевая пластинка с безразмерными толщиной  $a_1$  и шириной  $\varepsilon = b - b_1$ , внешний край которой сопряжен с круговым стержнем прямоугольного поперечного сечения размером  $a \times b_1$ .

Действующее на оболочку давление  $p$  вызывает радиальные напряжения  $\sigma_0$  на внутреннем контуре пластинки. Для того чтобы найти зависимость  $\sigma_0$  от  $p$ , следует решить краевую задачу, описывающую осесимметричную деформацию конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки, кольцевой пластины и кругового стержня.

Для приближенного решения системы уравнений равновесия шарнирно опертой цилиндрической оболочки используется асимптотический метод. Неизвестные функции ищутся в виде суммы основного безмоментного состояния и краевых эффектов.

Осесимметричная деформация пластинки в ее плоскости описывается следующими безразмерными уравнениями:

$$(rT_{1p})' - T_{2p} = 0, \quad rT_{1p} = ru_p' + \nu u_p, \quad rT_{2p} = u_p + \nu ru_p'. \quad (15)$$

Здесь  $(\prime)$  означает производную по радиальной координате  $r$ ,  $r \in [1, r_1]$ ,  $r_1 = 1 + \varepsilon$  — внешний радиус пластины,  $\varepsilon$  — ширина пластины,  $T_{1p}$  и  $T_{2p}$  — тангенциальные усилия,  $u_p$  и  $v_p$  — компоненты перемещения. Жесткость пластинки на изгиб не учитывается, так как она намного меньше ее тангенциальной жесткости.

Принимая во внимание условия сопряжения оболочки и пластинки на параллели  $s = s_k$ ,  $r = 1$  и условие сопряжения пластинки и стержня при  $r = r_1$ , получаем формулу связи действующего на оболочку безразмерного давления  $\lambda$  и безразмерного параметра нагрузки  $\beta$ , приложенной к краю пластины:

$$\lambda = \frac{a_1^2}{12}(L_1 + L_2)\beta, \quad (16)$$

где

$$L_1 = \frac{\gamma\delta(K_1 + r_1^2)}{\delta r_1^2 - \gamma K_1}, \quad L_2 = \frac{qa_1}{h\mu}, \quad K_1 = \frac{\delta(1 - \gamma S)}{\gamma(1 + \delta S)},$$

$$q = \frac{(\gamma\delta)^{1/4}}{2\sqrt{2}}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12},$$

Слагаемое  $L_1$  представляет собой вклад безмоментного состояния, а слагаемое  $L_2$  связано с учетом краевых эффектов.

Используя значения критической нагрузки  $\beta_c$ , полученные во второй главе, по формуле

$$\lambda_c = \frac{a_1^2}{12}(L_1 + L_2)\beta_c$$

можно найти соответствующие им значения безразмерного критического давления  $\lambda_c$ .

В случае 1 действия на оболочку внутреннего давления при увеличении размеров поперечного сечения стержня безразмерное критическое давление  $\lambda_c$ , как и параметр  $\beta_c$ , сначала убывает, а затем начинает возрастать (рис. 7). С увеличением  $a = b_1$  возрастание безразмерного кри-

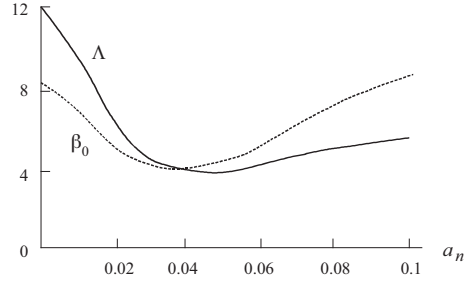


Рис. 7. Зависимости параметров  $\Lambda = 10^2\lambda_c$  и  $\beta_0 = \varepsilon^2\beta_c$  от размера поперечного сечения стержня  $a$  для случая внутреннего давления.

тического давления  $\lambda_c$  происходит медленнее, чем возрастание величины  $\beta_c$ . При  $a = 0.1$  значение  $\lambda_c = 0.054$  оказывается более чем в два раза меньше критического давления  $\lambda_c = 0.119$  при  $a = 0$ , т. е. критического давления для пластинки не подкрепленной стержнем. Этот эффект связан с заметным уменьшением коэффициента  $L_1$  в формуле (16) при увеличении размеров поперечного сечения стержня.

При действии на оболочку внешнего давления для кольцевой пластинки с параметрами  $a_1 = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ , сопряженной с круговым стержнем, имеющим квадратное поперечное сечение, и подкрепляющей снаружи оболочку толщиной  $h = 0.01$  (случай 2), на рис. 8. представлены графики зависимости величин  $\Lambda = 10^2\lambda_c$  и  $\beta_0 = \varepsilon^2\beta_c$  от размера поперечного сечения  $a = b_1$ .

В случае подкрепления оболочки пластинкой со стержнем, расположенными внутри оболочки, находящейся под действием внешнего давления (случай 3) зависимость  $\Lambda = 10^2\lambda_c$  и  $\beta_0 = \varepsilon^2\beta_c$  от  $a = b_1$  имеет такой же характер.

Использование стержневой модели шпангоута позволило найти оптимальное значение  $a_*$  размера поперечного сечения шпангоута  $a$ , но



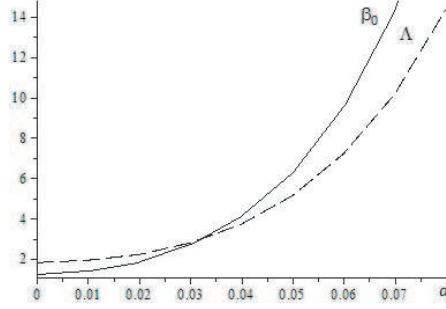


Рис. 8. Зависимости параметров  $\Lambda = 10^2 \lambda_c$  и  $\beta_0 = \varepsilon^2 \beta_c$  от размера поперечного сечения стержня  $a$  для случая внешнего давления.

не позволило определить оптимальную форму поперечного сечения, которая зависит от относительной ширины шпангоута  $k = b/a$ , где  $b$  — ширина шпангоута.

Относительное критическое внешнее давление, полученное с помощью пластиночной модели шпангоута можно найти по формуле  $f_p = p_c/p_0 = 6^{3/2} l h \lambda_c / 4 \sigma^{1/4} \pi h_0^{5/2}$ , где  $p_0$  — критическое давление для гладкой оболочки безразмерной толщины  $h_0$ .

Зафиксируем параметры  $l, h_0, n_s, k_1, k_2, \nu$  и рассмотрим подкрепленную оболочку с оптимальными параметрами  $a = a_*, d = d_*$ . Обозначим  $f_b^*(k) = n d_*^{5/2}(k)$  и  $f_p^*(k)$  ее относительные критические давления, соответствующие потере устойчивости по формам первого и второго типа.

Функция  $f_b^*(k)$  возрастает, а функция  $f_p^*(k)$  убывает, поэтому относительное критическое давление

$$f_c^*(k) = \min(f_b^*(k), f_p^*(k))$$

имеет максимум в точке  $k = k_*$ , где  $f_b^*(k) = f_p^*(k)$ . Следовательно,  $k = k_*$  является оптимальным значением параметра  $k$ .

В качестве примера рассмотрим оболочку с параметрами  $l = 10, h_0 = 0.01, n = 6, k_1 = k_2 = 0.2, \nu = 0.3$  в случае 2. Зависимость функции  $f_c^*$  от ширины кольца  $\varepsilon$  демонстрирует рис. 9. Кривая  $f_b^*$  показывает зависимость, полученную с использованием стержневой модели шпангоута и соответствует потере устойчивости по форме первого типа. Кривая  $f_p^*$  соответствует потере устойчивости по форме второго типа. Функция  $f_c^*$  достигает максимального значения для  $\varepsilon = \varepsilon_* \simeq 0.0643$ , которое является оптимальным.

**В заключении** представлены результаты, выносимые на защиту.

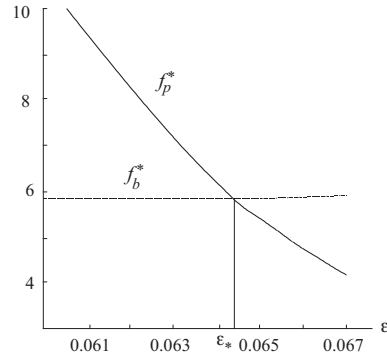


Рис. 9. Зависимость функции  $f_c$  от ширины кольца  $\varepsilon$ .

### ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

#### Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Боярская М.Л., Филиппов С.Б. Малые свободные колебания вращающейся на роликах бесконечной цилиндрической оболочки // Журн. Вестн. СПбГУ, 2011, Вып. 1, Сер. 1, С. 31-37.
2. Боярская М.Л., Филиппов С.Б. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2015.
3. Боярская М. Л., Филиппов С. Б. Устойчивость шпангоута под действием внутреннего давления в цилиндрической оболочке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 1. 2016. Том 3 (61), Вып. 2. С. 264-273.

#### Другие публикации:

4. Боярская М.Л. Устойчивость кольцевой пластины, сопряженной с цилиндрической оболочкой и подкрепленной круговым стержнем // Сборник научных трудов "Механика и процессы управления" М.: РАН, 2015.
5. Боярская М. Л. Частоты и формы колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки // Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды" СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2011, 71-80.
6. Филиппов С.Б., Боярская М.Л., Кулаковский И.А. Приближенное определение оптимальных параметров в задачах устойчивости и колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек // Шестые Поляховские чтения: Избранные труды, СПб, 2012, 296–302.
7. Sergei B. Filippov, Maria L. Boyarskaya. Buckling of annular plate joint with circular beam // Proceedings of the ECCOMAS Congress 2016, Crete Island, Greece, 5-10 June 2016, pp. 1-11.