

## Глава 3

### Частотно-временной анализ

Классическое преобразование Фурье (непрерывное и дискретное) является весьма полезным математическим аппаратом для анализа и синтеза сигналов, однако иногда оказывается недостаточно эффективным при обработке сложных сигналов. Преобразование Фурье, например, не отличает сигналы из двух синусоид с разными частотами, один из которых представляет собой сумму синусоид, второй – последовательно следующие друг за другом синусоиды. В обоих случаях их спектр будет выглядеть как два пика на двух фиксированных частотах. Следовательно, преобразование Фурье в своем традиционном виде не приспособлено для анализа нестационарных сигналов в том числе локализованных на некотором временном интервале, так как теряется информация о временных характеристиках сигнала.

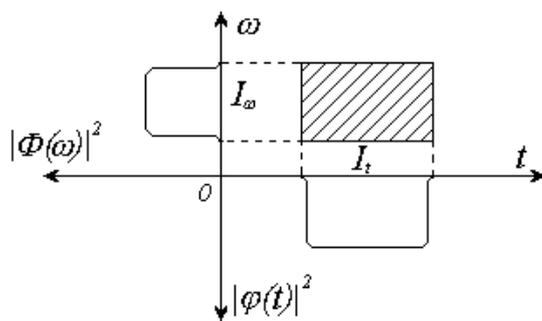
Следовательно, спектральный анализ реальных сигналов необходимо осуществлять как по частоте, так и во времени. Преимущества такого анализа очевидны. На практике чаще всего приходится иметь дело с нестационарными процессами, в которых информативным является сам факт изменения частотно-временных характеристик сигнала. Примерами таких сигналов являются спутниковые изображения Земли, рентгенограммы

внутренних органов, речь и музыка, турбулентные поля различной природы и т.д., т.е. фактически – весь объем информации, с которым приходится иметь дело в повседневной жизни. Для выполнения такого анализа требуются базисные функции, обладающие способностью выявлять в анализируемом сигнале как частотные, так и его временные характеристики. Другими словами, сами базисные функции должны обладать определенными свойствами, названными *частотно - временной локализацией*.

### 3.1. Частотно-временные свойства базисных функций

#### 3.1.1. Плоскость частота-время

Для анализа и сравнения частотно-временных локализационных свойств различных базисов используют плоскость частота-время. Любая



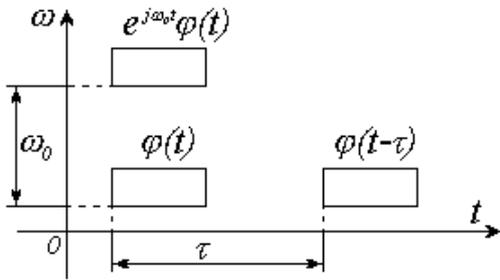
**Рис. 3.1.**

*Характеристика частотно-временной локализации функции  $\varphi(t)$*

функция  $\varphi(t)$  может характеризоваться интервалом  $I_t$  на временной оси и интервалом  $I_\omega$  в Фурье области, в которых содержится 90% ее энергии, сосредоточенной около центра тяжести (В.3) функции  $|\varphi(t)|^2$  и  $|\Phi(\omega)|^2$ . Тогда в этой плоскости функцию  $\varphi(t)$  можно изобра-

зить в виде прямоугольника, как показано на рис. 3.1.

Очевидно, что смещение функции на  $\tau$  от исходного состояния вызовет перемещение прямоугольника параллельно оси  $t$ . Модуляция этой



**Рис. 3.2.**

*Влияние смещения на  $\tau$  и модуляции  $e^{j\omega_0 t}$  функции  $\varphi(t)$  на ее положение на плоскости время-частота*

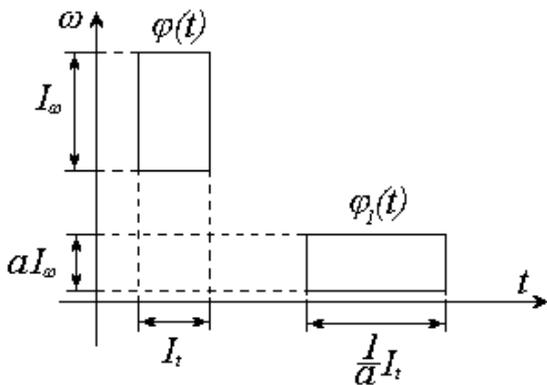
функции комплексной экспонентой  $e^{j\omega_0 t}$  сдвигает прямоугольник параллельно оси  $\omega$  (рис. 3.2.).

Масштабирование функции (ее сжатие или растяжение) приводит к развороту прямоугольника. Действительно, получим новую функцию  $\varphi_1(t)$  масштабированием функции  $\varphi(t)$  на коэффициент  $a$ :

$$\varphi_1(t) = \varphi(at).$$

Энергия такой функции

$$E_{\varphi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(at)|^2 dt = \frac{1}{a} E_{\varphi}.$$



**Рис. 3.3.**

*Положение функции  $\varphi(t)$  на плоскости время-частота при масштабировании на коэффициент  $a < 1$ :  $\varphi_1(t) = \varphi(at)$*

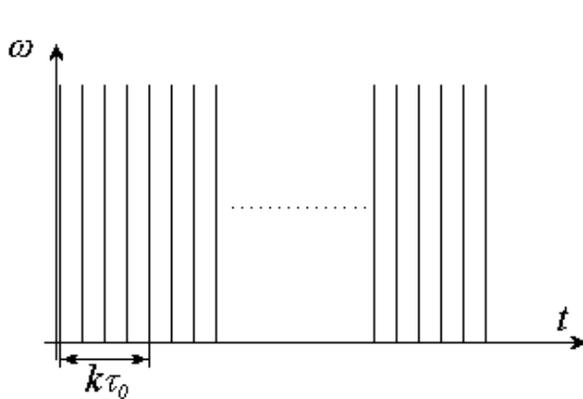
Следовательно, ширина

функции  $\varphi_1(t)$  равна  $I_t' = \left(\frac{1}{a}\right) I_t$ .

В соответствии со свойством масштабирования Фурье-преобразования (2.2.5)  $I_{\omega} = a I_{\omega}$ . Влияние масштабирования на положение функции в плоскости время-частота показано на рис. 3.3.

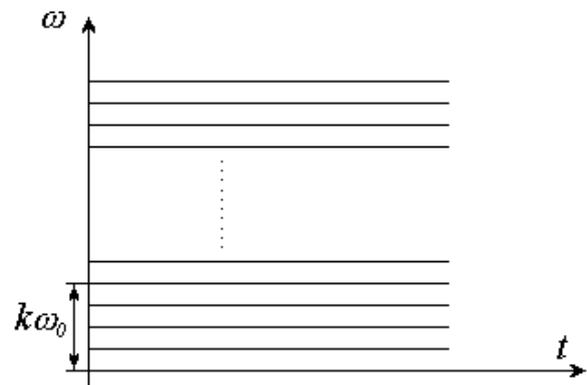
В качестве примеров функций, иллюстрирующих эффективность их представления в плоскости время-частота, рассмотрим  $\delta$ -функцию Дирака и Фурье-базис. Известно, что  $\delta$ -функция является идеальным базисом для временного анализа сигналов. Результатом такого анализа являются отсчеты, которые можно

рассматривать как временной спектр сигнала. На плоскости время-частота  $\delta$ -функция  $\delta(t - k\tau_0)$  выглядит как показано на рис. 3.4а, т.е. эта функция



**Рис. 3.4а.**

$\delta$ -функция Дирака на плоскости время-частота



**Рис. 3.4б.**

Базисные функции  $e^{jk\omega_0 t}$  Фурье-анализа на плоскости время-частота

обладает свойством хорошей временной локализации, но плохой локализацией в спектральной области (она имеет равномерный спектр на всех частотах). Базисные функции  $e^{j\omega t}$  Фурье-анализа, наоборот, обладают хорошей частотной локализацией в то время, как во временной области они имеют бесконечную протяженность (см. рис. 3.4б).

### 3.1.2. Ограниченное во времени Фурье-преобразование

Локальность преобразования Фурье достигается путем ограничения анализируемого сигнала с помощью движущегося окна. Результатом такого анализа будет функция двух переменных – положения окна  $\tau$  и частоты  $\omega$ :

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.1.1)$$

Иначе говоря, спектральный анализ в окне данных производится вычислением скалярного произведения сигнала и базисной функции

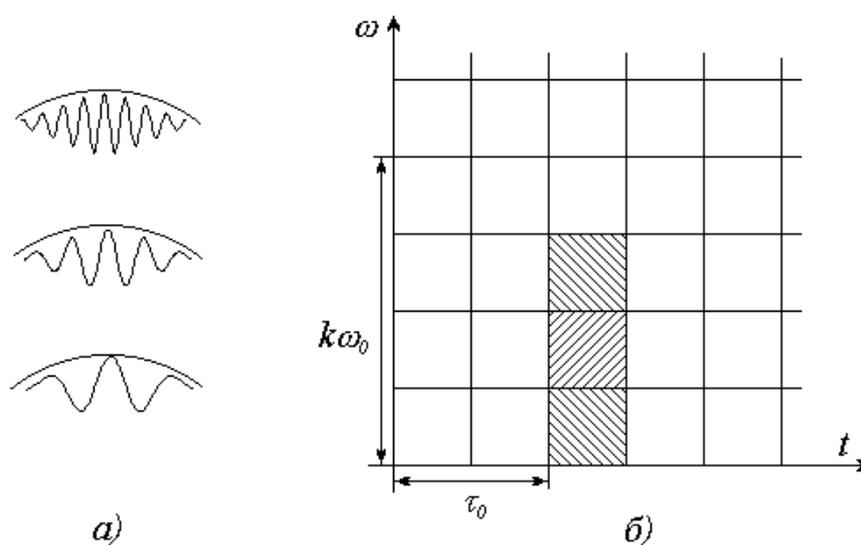
$$g_{\tau}(\omega, t) = w(t - \tau)e^{j\omega t},$$

т.е.

$$F(\omega, \tau) = \langle g_{\tau}(\omega, t), f(t) \rangle$$

Не останавливаясь здесь на выборе окон  $w(t)$  для проведения эффективного оконного Фурье-анализа, отметим, что таким образом в спектральный анализ, кроме частоты, вводится еще один параметр – время.

Как будет видно из дальнейшего, для достижения хорошей временной



**Рис. 3.5.**

*Ограниченное во времени преобразование Фурье на плоскости время-частота:*

*а) пример базисных функций преобразования*

$$g_{\tau}(\omega, t) = e^{jk\omega_0 t} w(t - \tau_0) \text{ при сдвиге } \tau_0$$

*и  $k = 1, 2, 3$  (вещественная часть);*

*б) изображение функций в плоскости время-частота (заштрихованные прямоугольники)*

локализации преобразования (3.1.1) в качестве окна необходимо выбрать функцию Гаусса. Такое Фурье-преобразование носит название преобразования Габора.

Ограниченное во времени преобразование Фурье на плоскости время-частота показано на рис. 3.5.

Как видно из этого рисунка, при сдвиге окна или изменении частоты модуляции ширина прямоугольника сохраняется неизменной. Это вызвано тем обстоятельством, что при всех этих операциях ширина самого окна не изменяется.

### 3.1.3. Принцип неопределенности

Как следует из свойства масштабирования Фурье-преобразования (2.2.5), ширина базисной функции во временной и частотной областях взаимосвязаны: расширение функции во временной области ведет к ее сужению в частотной и наоборот.

Закономерность, связывающая две эти величины, называется *принципом неопределенности*. В качестве меры концентрации энергии любой функции по времени и по частоте принимают произведение вторых центральных моментов функций  $\varphi(t)$  и ее спектра  $\Phi(\omega)$ . Предположим, что  $\varphi(t)$  и  $\Phi(\omega)$  уже центрированные функции (если это не так, то путем сдвига и модуляции  $\varphi(t)$  их можно отцентрировать).

Тогда ширины функций можно определить как

$$\begin{aligned}\mu_t^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\varphi(t)|^2 dt, \\ \mu_\omega^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\Phi(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

Принцип неопределенности утверждает, что, если  $\varphi(t)$  убывает быстрее, чем  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , то

$$\mu_t^2 \mu_\omega^2 \geq \frac{\pi}{2}, \quad (3.1.3a)$$

где равенство справедливо только, если

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2}, \quad (3.1.3b)$$

т.е. является функцией Гаусса.

Для доказательства предположим, что  $\|\varphi(t)\| = 1$ , и рассмотрим интеграл от произведения  $t\varphi(t)\varphi'(t)$ . Используя неравенство Коши-Шварца (1.25в), получим

$$\left| \int_R t\varphi(t)\varphi'(t) dt \right|^2 \leq \int_R |t\varphi(t)|^2 dt \int_R |\varphi'(t)|^2 dt \quad (3.1.4)$$

Первый интеграл справа в последнем выражении равен, очевидно,  $\mu_t^2$ . Для вычисления второго интеграла вспомним, что преобразование Фурье производной равно  $j\omega\Phi(\omega)$ . Тогда, в соответствии с формулой Парсеваля (2.2.14), имеем

$$\int_R |\varphi'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_R \omega^2 |\Phi(\omega)|^2 d\omega = \mu_\omega^2.$$

Интеграл слева в выражении (3.1.4) вычисляется путем интегрирования по частям

$$\int_R t\varphi(t)\varphi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_R (t\varphi^2(t))'_t dt = \frac{1}{2} t\varphi^2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_R \varphi^2(t) dt.$$

При соблюдении условий затухания, налагаемых на функцию  $\varphi(t)$ , первое слагаемое равно нулю и сам интеграл, таким образом, равен  $-\frac{1}{2}$ .

Тогда из (3.1.4) имеем  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\pi} \mu_t^2 \mu_\omega^2$ , что после преобразования дает

(3.1.3а).

Нетрудно видеть, что равенство в (3.1.4) возможно при  $\varphi'(t) = at\varphi(t)$ .

Отсюда следует, что  $\varphi(t) = ce^{at^2/2}$ . Следовательно, (3.1.3б) справедли-

во при  $c = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$  и  $a = -2\alpha$ .

### 3.2. Базисные функции частотно-временного анализа

Итак, частотно-временной анализ предназначен для выявления локальных частотно-временных возмущений сигнала. Вследствие кратковременности таких возмущений, сам сигнал может рассматриваться как заданный в  $L_2$ , т.е. для одномерных сигналов – на всей действительной оси  $R(-\infty, \infty)$  с нормой

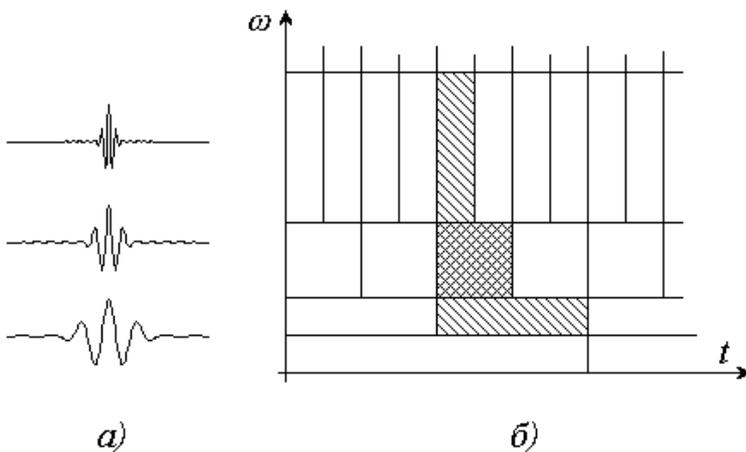
$$\|f(t)\|^2 < \infty.$$

Следовательно, базисные функции, которые получили название вейвлетов, также должны принадлежать  $L_2$  и быстро убывать при  $|t| \rightarrow \infty$ . Тогда, чтобы перекрыть такими базисными функциями все возможные временные положения сигнала, необходимо, чтобы базисные функции представляли собой набор смещенных во времени функций. Удобнее всего, если этот набор образуется из одной и той же "материнской" функции  $\psi(t)$  (прототипа), сдвинутой по оси  $t$ , т.е.  $\{\psi(t-b)\}$ . Чтобы обеспечить частотный анализ, базисная функция должна иметь еще один аргумент – масштабный коэффициент, который является аналогом частоты в Фурье-анализе. Тогда базисные функции для частотно-временного анализа будут

иметь вид

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad a, b \in R,$$

где масштабный коэффициент  $a$  введен как делитель  $t$ , причем масштабированию подвергается также и сдвиг  $b$ . Это позволяет сохранить относительную "плотность" расположения базисных функций по оси  $t$  при расширении или сжатии самой функции и при  $\frac{b}{a} = \Delta = \mathbf{const}$  (Рис. 3.6).



**Рис. 3.6.**

*Вейвлет-преобразование на плоскости время-частота*  
 а) пример базисных функций вейвлет при различных масштабах:  $(a - 2^k, k = 0, 1, 2)$ ;  
 б) изображение функций в плоскости время-частота

Таким образом, базисные функции для частотно-временного анализа должны обладать следующими свойствами.

*Ограниченность,*

т.е. принадлежность  $L_2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

*Локализация.* Ба-

зисные функции вейв-

лет-анализа, в отличие от преобразования Фурье, должны быть локализованы, т.е. определены на конечном интервале как во временной, так и в частотной областях. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq C \cdot (1 + |t|)^{-1-\varepsilon} \\ \text{и} \\ |\Psi(\omega)| &\leq C \cdot (1 + |\omega|)^{-1-\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

при  $\varepsilon > 0$ .

Нулевое среднее. Равенство нулю нулевого момента

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.2.2)$$

или, что иногда необходимо – равенство нулю момента  $m$ -го порядка

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0.$$

Это – вейвлеты  $m$ -го порядка, позволяющие анализировать более тонкую структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие.

### 3.3. Непрерывное вейвлет - преобразование

Введем базис, отвечающий перечисленным выше условиям

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (3.3.1)$$

где множитель  $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$  необходим для сохранения нормы

$$\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|.$$

Пусть  $a, b \in R$ , т.е. принимают произвольные вещественные значения, тогда пара преобразований, которое носит название непрерывного вейвлет - преобразования, обозначаемое как CWT – continuous wavelet transform, будет иметь вид:

$$CWT_f(a,b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (3.3.2a)$$

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db, \quad (3.3.2б)$$

где нормализующий коэффициент

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (3.3.3)$$

Интегрированием (3.3.3) по частям можно убедиться в том, что это условие всегда выполняется, если  $\Psi(\omega) = 0$  при  $\omega = 0$  и, следовательно, равен нулю по крайней мере, нулевой момент функции  $\psi(t)$ , т.е. выполняется условие (3.2.2).

Сравнивая формулы (3.3.2) с соответствующими выражениями для непрерывного преобразования Фурье (2.2.1), видим, что роль функции  $e^{j\omega t}$  здесь играет функция  $\psi_{a,b}(t)$ , а  $C_\psi$  аналогичен коэффициенту  $2\pi$ , причем роль частоты играет масштабный множитель  $\frac{1}{a}$ . Однако, также как в ограниченном во времени преобразовании Фурье, базисная функция зависит еще от параметра сдвига  $b$ .

Для упрощения доказательства справедливости (3.3.2), предположим, что  $\psi(t) \in L_1$ ,  $f(t) \in L_1 \cap L_2$ , а также  $F(\omega) \in L_1$ . Тогда, учитывая, что  $\Psi_{a,b}(\omega) = \sqrt{a} \cdot e^{-jb\omega} \Psi(a\omega)$ , в соответствии с формулой Парсеваля (2.2.13) мы получим из (3.3.2а)

$$\begin{aligned} CWT_f(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,b}^*(\omega) F(\omega) d\omega = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) e^{jb\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Далее рассмотрим в (3.3.2б) отдельно интеграл по переменной  $b$ , ко-

торый будет функцией  $a$ , т.е.  $I(a)$ :

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f(a, b) \psi_{a, b}(t) db,$$

и, подставляя сюда (3.3.4), получим

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) e^{jb\omega} d\omega \right) \psi_{a, b}(t) db = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a, b}(t) e^{jb\omega} db. \end{aligned}$$

Второй интеграл после подставки  $x = \frac{(t-b)}{a}$  равен

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a, b}(t) e^{jb\omega} db &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{jb\omega} db = \\ &= \sqrt{a} \cdot e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-j\omega ax} dx = \sqrt{a} \cdot e^{j\omega t} \Psi(a\omega). \end{aligned}$$

Тогда

$$I(a) = \frac{|a|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(a\omega)|^2 F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Проинтегрируем последнее выражение по  $a$  (см. (3.3.2б)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(a) \frac{da}{a^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{|a|} d\omega da.$$

Благодаря ограничениям, наложенным на  $f(t)$  и  $\psi(t)$ , мы можем изменить порядок интегрирования. Обозначив  $a' = a\omega$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{|a|} da = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a')|^2}{|a'|} da' = C_{\Psi},$$

т.е.  $C_{\Psi}$  не зависит от  $\omega$ .

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(a) \frac{da}{a^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \cdot C_{\psi} d\omega = C_{\psi} f(t).$$

Отсюда вытекает справедливость (3.3.2б) и необходимость ограничения (3.3.3).

Приведем примеры материнских вейвлетов, формирующих базис (3.3.1). Наибольшей популярностью здесь, пожалуй, пользуются функции на основе производных функции Гаусса:

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}. \quad (3.3.5)$$

Это вызвано тем обстоятельством, что, как уже было доказано выше, функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях.

При  $m = 1$  получаем вейвлет (рис. 3.7, а), который называют WAVE – вейвлет с равным нулю нулевым моментом. При  $m = 2$  получаем вейвлет (рис. 3.7, б), называемый “мексиканская шляпа” – МНАТ – вейвлет:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (3.3.6)$$

у него нулевой и первый моменты равны нулю. Спектр Фурье этого вейвлета уже, поэтому он имеет лучшее разрешение.

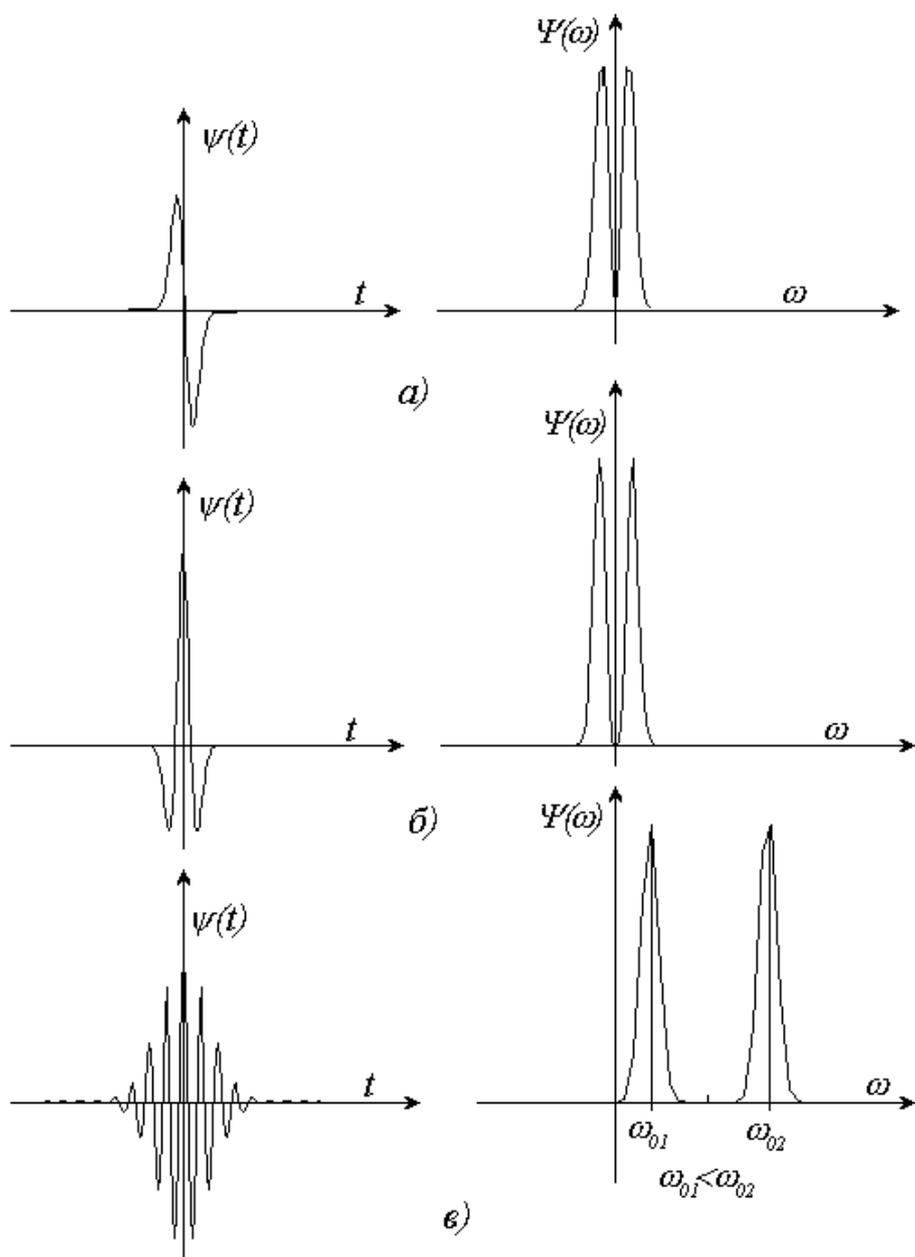
Функция Гаусса образует также DOG-вейвлет – разность двух Гауссиан:

$$\psi(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} - 0,5 \exp\left\{-\frac{t^2}{8}\right\}.$$

Широкое распространение получил вейвлет Морле (Morlet) (рис. 3.7, в),

$$\psi(t) = \exp\{j\omega_0 t\} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}. \quad (3.3.7)$$

где  $\omega_0$  – доминантная частота, позволяющая варьировать избирательностью базиса. Этот вейвлет отличается от других, прежде всего, тем, что он является комплексной функцией, у которой вещественные и мнимые части – модулированные гауссианой гармоники.



**Рис. 3.7.**  
 Примеры базисных функций вейвлет:  
 а) WAVE-вейвлет;  
 б) МНТ-вейвлет (мексиканская шляпа);  
 в) вейвлет Морле

### 3.4. Свойства непрерывного вейвлет-преобразования

*Линейность.* Линейность непрерывного вейвлет-преобразования следует из линейности скалярного произведения (3.3.2а).

Пусть функции  $f(t)$  и  $g(t) \in L_2$ . Тогда,

$$CWT_{f,g}(a,b) = CWT_f(a,b) + CWT_g(a,b). \quad (3.4.1)$$

*Сдвиг.* Рассмотрим непрерывное преобразование вейвлет-функции  $f_1(t) = f(t - b')$ . Тогда

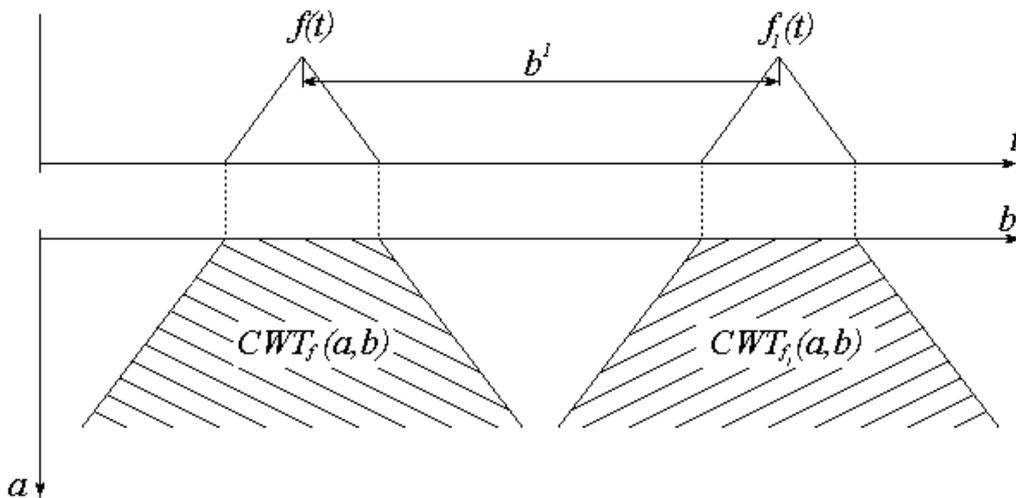


Рис.3.8.

*Иллюстрация свойства сдвига непрерывного вейвлет-преобразования: сдвиг функции во временной области ведет к сдвигу ее вейвлет-образа*

$$\begin{aligned} CWT_{f_1}(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - b') \psi\left(\frac{t - b}{a}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \psi\left(\frac{t_1 + b' - b}{a}\right) dt' = CWT_f(a, b - b'), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

т.е. вейвлет - образ функции также сдвигается на  $b'$ . Это иллюстрируется на рис. 3.8.

*Масштабирование.* Рассмотрим, далее, непрерывное преобразование

вейвлет-функции  $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(t/c)$ , где множитель  $\frac{1}{\sqrt{c}}$  введен для сохранения энергии.

Имеем:

$$\begin{aligned} CWT_{f_1}(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a| \cdot c}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f\left(\frac{t}{c}\right) dt = \\ &= \sqrt{\frac{c}{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{ct_1-b}{a}\right) f(t_1) dt_1 = CWT_f\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right), \end{aligned}$$

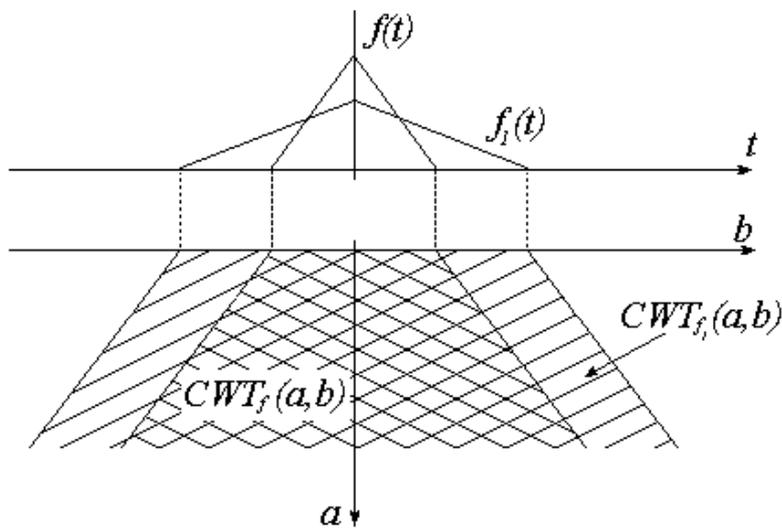


Рис. 3.9.

Иллюстрация свойства масштабирования при  $c = 2$   
(Преобразование вейвлет-функции  $f_1(t)$   $CWT_{f_1}(a,b)$   
"перекрывают"  $CWT_f(a,b)$ )

т.е. вейвлет-преобразование также подвергается масштабному преобразованию. Это означает, что, если функция расширяется во временной области, то в масштабно-временной (частотно-временной) плоскости  $[a,b]$  она также расширяется (рис. 3.9).

Аналог теоремы

Парсеваля. Для каж-

дой функции  $f(t) \in L_2$  и ее непрерывного преобразования вейвлет справедливо следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a,b)|^2 \frac{dad b}{a^2}. \quad (3.4.3)$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2}.$$

В соответствии с (3.3.4) можем записать:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) e^{jb\omega} d\omega \right|^2 db \right) \frac{da}{a^2}. \end{aligned}$$

Обозначим  $P(\omega) = \Psi^*(a\omega)F(\omega)$ .

Тогда, дважды воспользовавшись теоремой Парсеваля (2.2.14), получим:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{jb\omega} d\omega \right|^2 db \right) \frac{da}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |P(b)|^2 db \right) \frac{da}{|a|} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega \right) \frac{da}{|a|}. \end{aligned}$$

С учетом введенного обозначения для  $P(\omega)$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi^*(a\omega)|^2 |F(\omega)|^2 d\omega \right) \frac{da}{|a|} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{|a|} da. \end{aligned}$$

Второй интеграл равен  $C_\psi$ . Снова применяя теорему Парсеваля, с учетом обозначения для  $I$  получим окончательно для (3.4.3):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \cdot \frac{C_\psi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

что доказывает (3.4.3).

*Свойства локальности.* Локальные свойства базиса (3.3.1) во временной и частотной областях характеризуются концентрацией энергии базисной функции  $\psi_{a,b}(t)$  во временной и частотной областях. Поэтому количественно это свойство можно определить величиной вторых центральных моментов функций  $|\psi_{a,b}(t)|^2$  и  $|\psi(\omega)|^2$ , квадратный корень из которых характеризует область наибольшей концентрации энергии этих функций.

Обозначим через  $t_0$  и  $\Delta_t^2$ , соответственно, величины первого и второго центральных моментов функции  $|\psi(t)|^2$ , т.е.

$$t_0 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt,$$

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt \right].$$

Тогда первый момент (центр тяжести, среднее значение функции)  $|\psi_{a,b}(t)|^2$  будет равен

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{a\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt.$$

После замены переменной на  $t_1 = \frac{t-b}{a}$  и преобразований, получим:

$$\bar{t}_1 = \frac{a}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t_1 |\psi(t_1)|^2 dt_1 + b \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t_1)|^2 dt_1 = b + at_0. \quad (3.4.4)$$

Отсюда следует, что центр тяжести базисной функции  $\psi_{a,b}(t)$  изменяется с масштабом  $a$ : чем шире базисная функция (больше  $a$ ), тем больше расстояние между центрами базисных функций.

Определим второй центральный момент функции  $|\psi_{a,b}(t)|^2$ . Имеем

(В.4):

$$\begin{aligned} \Delta_\psi^2 &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \left\{ \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} (t-b-at_o)^2 \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \left\{ a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t-b}{a}-t_o\right)^2 \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим  $t_1 = \frac{t-b}{a}$ :

$$\Delta_\psi^2 = \frac{a^2}{\|\psi\|^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t_1-t_o)^2 |\psi(t_1)|^2 dt_1 \right\} = a^2 \Delta_t^2.$$

Тогда ширина (иногда говорят – радиус) функции  $\psi_{a,b}(t)$  во временной области будет равен

$$R_\psi = a\Delta_t. \quad (3.4.5)$$

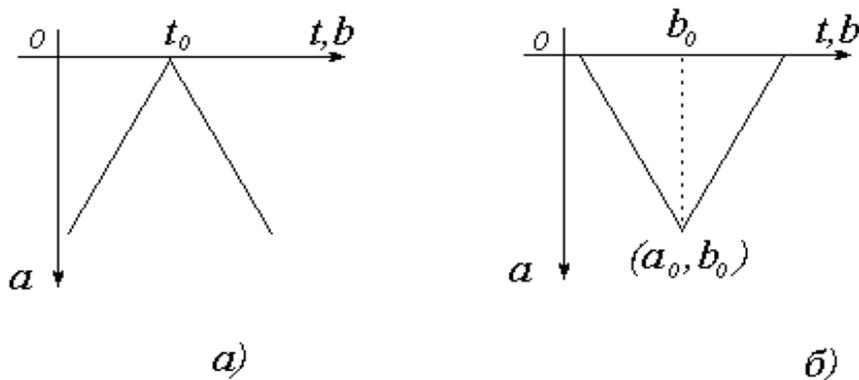
Следовательно, функция  $\psi_{a,b}(t)$  занимает "окно" во временной области:

$$Win_t = [b+at_o - a\Delta_t, b+at_o + a\Delta_t]. \quad (3.4.6)$$

Это "окно" шириной  $2a\Delta_t$  будет расположено около точки  $t_w = b+at_o$ . Последнее означает, с одной стороны, что значение анализируемой функции  $f(t)$ , взятое в некоторой точке  $t_o$ , влияет на значение коэффициента  $CWT_f(a,b)$  с ростом масштаба во все большем временном диапазоне, образуя в плоскости  $(a,b)$  так называемый угол влияния (рис. 3.10, а). С другой стороны, величина коэффициента  $CWT_f(a,b)$  в точке  $(a_0,b_0)$  будет определяться значениями функции  $f(t)$  в окрестности точки  $b_0$ , определяемой тем же углом влияния (3.10, б).

Из рис. 3.10, в частности, следует важный вывод о том, что

мелкомасштабные вариации функции  $f(t)$  будут проявляться в вейвлет-области при малых значениях масштаба  $a$ , в то время как при больших значениях масштаба они будут сглаживаться, но при этом будут проявляться крупномасштабные изменения функции  $f(t)$ .



**Рис. 3.10.**

Угол влияния на величины коэффициентов  $CWT_f(a, b)$  с ростом масштаба - а) и на величину коэффициента  $CWT_f(a_0, b_0)$  значений функции  $f(t)$  в окрестности точки  $b_0$  - б).

Определим далее локальные свойства вейвлета  $\psi(t)$  в частотной области. Обозначим через  $\omega_0$  и  $\Delta_\omega^2$  величины первого и второго центральных моментов функции  $\Psi(\omega)$ . Как было отмечено выше, благодаря равенству нулю первых моментов вейвлета  $\psi(t)$ , функция  $\Psi(\omega)$  описывает полосовой фильтр с центральной частотой, равной  $\omega_0$ . Если ввести функцию  $\eta(\omega) = \Psi(\omega - \omega_0)$ , имеющую нулевое среднее значение и ширину  $\Delta_\omega$ , то вейвлет-преобразование в Фурье-области аналогично (3.3.4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 CWT_f(a, b) &= \\
 &= \frac{a\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{jb\omega\} \eta * \left( a \left( \omega - \frac{\omega_0}{a} \right) \right) F(\omega) d\omega.
 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Оконная функция  $\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega_0}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega_0) = \Psi(a\omega)$  имеет ширину

$\frac{\omega_0}{a}$ . Поэтому, с точностью до константы и фазового сдвига  $e^{jb\omega}$ , вейвлет-преобразование (3.3.4) дает локальную информацию о спектре анализируемой функции  $F(\omega)$  в полосе  $\pm \frac{\Delta\omega}{a}$  с центром в точке  $\frac{\omega_0}{a}$ , т.е. в окне

$$Win_\omega = \left[ \frac{\omega_0}{a} - \frac{\Delta\omega}{a}, \frac{\omega_0}{a} + \frac{\Delta\omega}{a} \right].$$

При этом отношение центральной частоты  $\frac{\omega_0}{a}$  к ширине окна  $2\frac{\Delta\omega}{a}$ ,

равное  $\frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$ , остается постоянным

при любых значениях  $a$ . Частотный анализ при постоянном значении  $\frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$

носит название анализа с постоянной добротностью избирательной системы – анализ с постоянным  $Q$ . Этим

вейвлет-анализ отличается от обычного Фурье-анализа или Фурье-анализа на ограниченном временном интервале. Площадь частотно-

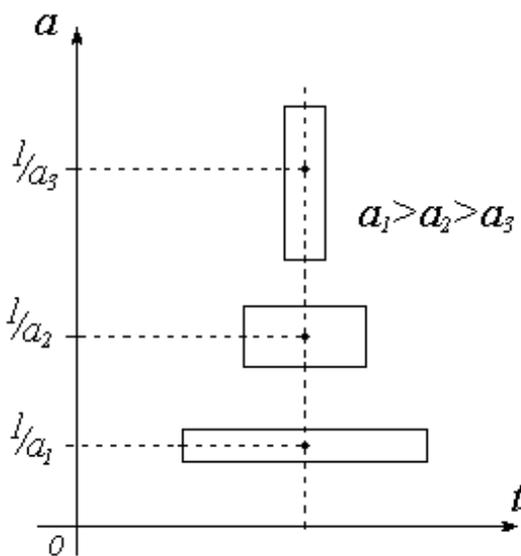


Рис. 3.11.

Функции вейвлет-анализа на плоскости время-частота

временного окна вейвлет-анализа будет равна  $2a\Delta_t \frac{2\Delta\omega}{a} = 4\Delta_t\Delta\omega$ , т.е. она

будет постоянной при всех значениях масштаба  $a$ . Причем, при увеличении масштаба (смещение в низкочастотный диапазон анализа) окно будет расширяться по временной шкале в плоскости время-частота (рис. 3.11) и сужаться по частотной шкале. При уменьшении масштаба – наоборот.

### 3.5. Дискретное вейвлет-преобразование

Представление функции  $f(t)$  через ее непрерывное вейвлет-преобразование является избыточным. В задачах обработки информации, встречающихся на практике, сигнал, во-первых, имеет ограниченную полосу и, во-вторых, допускаются те или иные погрешности в получаемых результатах. Поэтому используют дискретное представление непрерывных сигналов, при которых параметры преобразования, в данном случае  $a$  и  $b$ , приобретают дискретные значения. Вейвлет-преобразование, при котором значения  $a$  и  $b$  дискретны, называют дискретным вейвлет-преобразованием (DWT - Discrete Wavelet Transform).

#### 3.5.1. Дискретизация масштаба

Рассмотрим сначала случай дискретного масштаба  $a$  и положим  $a = a_m = a_0^m$  ( $a_0 > 1$ ). Это равноценно разбиению частотной оси на поддиапазоны (частотные полосы). Предположим, что  $\omega_0 = (a_0 + 1)\Delta_\omega$  (это можно сделать всегда, умножив функцию  $\psi$  на некоторый модуляционный множитель  $e^{j\alpha t}\psi(t)$  (см. (2.2.4б))). Тогда частотное окно будет равно

$$\left( \frac{\omega_0}{a_m} - \frac{\Delta_\omega}{a_m}, \frac{\omega_0}{a_m} + \frac{\Delta_\omega}{a_m} \right) = \left( a_0^{-m+1}\Delta_\omega, a_0^{-m+2}\Delta_\omega \right),$$

а центральная частота  $m$ -го вейвлета:

$$\frac{\omega_0}{a_m} = (a_0 + 1)a_0^{-m}\Delta_\omega.$$

Базисом для DWT является функция, полученная из (3.3.1) при  $a = a_0^m$ :

$$\psi_{m,b}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}(t-b)). \quad (3.5.1.)$$

Если справедливо (3.3.3) и если  $\psi(t)$  достаточно быстро затухает, то любая функция из  $L_2$  может быть представлена в виде дискретной по  $m \in Z$  последовательности

$$DWT_f(m,b) = \langle f, \psi_{m,b} \rangle = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-m}t - b) dt. \quad (3.5.2.)$$

Для восстановления  $f(t)$  по дискретным значениям (3.5.2.) на базис  $\psi_{m,b}(t)$  налагаются дополнительные ограничения, а именно, образ Фурье вейвлета  $\psi_{m,b}(t)$  должен удовлетворять соотношению

$$A \leq \sum_{m \in Z} |\Psi(a_0^m \omega)|^2 \leq B, \quad (3.5.3.)$$

где константы  $A$  и  $B$  такие, что  $0 < A \leq B < \infty$ .

Условие (3.5.3.) в терминах радиотехники имеет довольно прозрачное толкование. Действительно, так как при каждом значении масштаба  $a_0^m$  вейвлет представляет собой полосовой фильтр, то набор (сумма) этих фильтров (блок фильтров) является некоторым устройством с неравномерной частотной характеристикой, определяемой константами  $A$  и  $B$  (рис. 3.12). Сигнал, например звуковой, на выходе такого устройства при сильной неравномерности частотной характеристики претерпевает существенные искажения. Поэтому для его восстановления принимают специальные меры, в частности, устанавливают фильтр, компенсирующий искажения частотной характеристики. В вейвлет-преобразовании таким фильтром является дуальный (или двойственный) вейвлет  $\tilde{\psi}(t)$ , Фурье-образ которого имеет вид:

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \frac{\Psi(\omega)}{\sum_n |\Psi(a_0^n \omega)|^2}. \quad (3.5.4.)$$

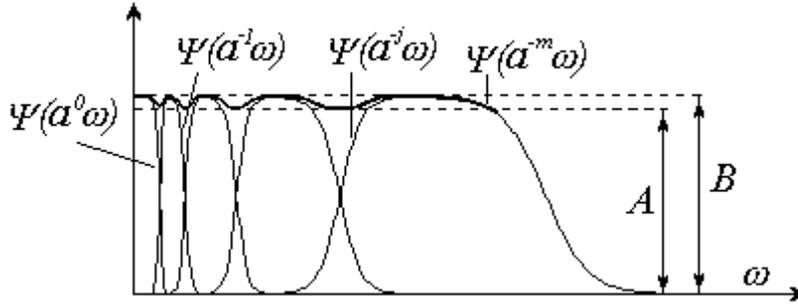


Рис. 3.12.

Частотная характеристика набора полосовых фильтров, образованных вейвлетами  $\Psi(a^m \omega)$  с разным масштабом при  $m = 0, -1, -2, -3, -4$

Покажем, что с помощью такого вейвлета по коэффициентам DWT полностью восстанавливается сигнал. Действительно, используя соотношение Парсеваля (2.2.13) и формулу (3.5.4.), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} DWT_f(m, b) \left\{ a_0^{-\frac{m}{2}} \tilde{\Psi}(a_0^{-m}(t-b)) \right\} db = \\ & = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} DWT_f(m, \omega) \tilde{\Psi}(a_0^m \omega) e^{it\omega} d\omega = \\ & = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \Psi^*(a_0^m \omega) \tilde{\Psi}(a_0^m \omega) e^{it\omega} d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{it\omega} d\omega = f(t). \end{aligned}$$

Из (3.5.4.) и (3.5.3.) можно показать, что

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\tilde{\Psi}(a_0^m \omega)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

### 3.5.2. Дискретизация масштаба и сдвига. Фреймы

В этом случае полагают дискретными величины  $a$  и  $b$ , т.е.  $a = a_m = a_0^m$  и  $b = kb_0 a_0^m$ . Частотное окно для анализа сохраняется прежним. Ширина временного окна (3.4.6.) равна  $2a_0^m \Delta_t$ , а среднее значение  $(t_0 + kb_0) a_0^m$  изменяется дискретно пропорционально  $m$ -ой степени  $a_0$ -масштабу вейвлета. Чем уже функция  $\psi$ , т.е. меньше величина  $a_0^m$ , тем меньше (на ту же величину) шаг сдвига этой функции.

Базисными функциями для дискретного вейвлет-преобразования будут функции, получаемые из (3.3.1) при  $a = a_0^i$  и  $b = kb_0 a_0^i$

$$\psi_{ik}(t) = a_0^{-i/2} \psi\left(\frac{t - a_0^i k t_0}{a_0^i}\right) = a_0^{-i/2} \psi(a_0^{-i} t - kb_0). \quad (3.5.5)$$

Коэффициенты разложения любой функции из  $L_2$  могут быть получены как

$$\begin{aligned} DWT_f(i, k) &= \langle f(t), \psi_{ik}(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ik}(t) dt = a_0^{-i/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-i} t - kb_0) dt. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Выражение (3.5.6) является дискретным вейвлет-преобразованием функции  $f(t)$  – DWT.

Чтобы обратное преобразование во временную область было справедливым, должно выполняться следующее условие:

$$A \|f\|^2 < \sum_{i,k} |\langle f, \psi_{ik} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3.5.7)$$

для всех  $f \in L_2(R)$ , если константы  $A$  и  $B$  такие, что  $0 < A \leq B < \infty$ .

В этом случае формула для восстановления функции  $f(t)$  по коэффициентам  $DWT_f(i, k)$  будет иметь вид

$$f(t) = \frac{2}{A+B} \sum_{i,k} DWT_f(i,k) \psi_{ik}(t) + R, \quad (3.5.8)$$

где ошибку восстановления  $R$  можно оценить как  $\|R\| \leq O\left(\frac{B}{A}-1\right)\|f\|$ .

Разделив все члены неравенства (3.5.7) на  $\|f\|^2$ , можно видеть, что константы  $A$  и  $B$  являются границами нормированной на  $\|f\|^2$  энергии – скалярного произведения  $\langle f, \psi_{ik} \rangle$ . Они (эти константы) как бы "обрамляют" нормированную энергию коэффициентов  $DWT_f(i,k)$ . Отсюда произошел термин фрейм (frame), которым называют множество функций  $\{\psi_{ik}(t); i, k \in Z\}$ , при которых условие (3.5.7) выполняется.

Если  $A = B$ , то  $\|R\| = 0$  и множество  $\{\psi_{ik}(t)\}$  называют *плотным фреймом*. При этом выражение  $A\|f\|^2 = \sum_{i,k} |\langle f, \psi_{ik} \rangle|^2$ , вытекающее из (3.5.7), является обобщением теоремы Парсеваля на плотные фреймы.

Для плотных фреймов из (3.5.8) получаем

$$f(t) = A^{-1} \sum_{i,k} DWT_f(i,k) \psi_{i,k}(t).$$

Если  $A = B = 1$ , то плотный фрейм становится *ортогональным базисом*.

Заметим, что для вейвлетов, образованных материнским вейвлетом (3.3.6), хорошие результаты при восстановлении сигналов получаются при

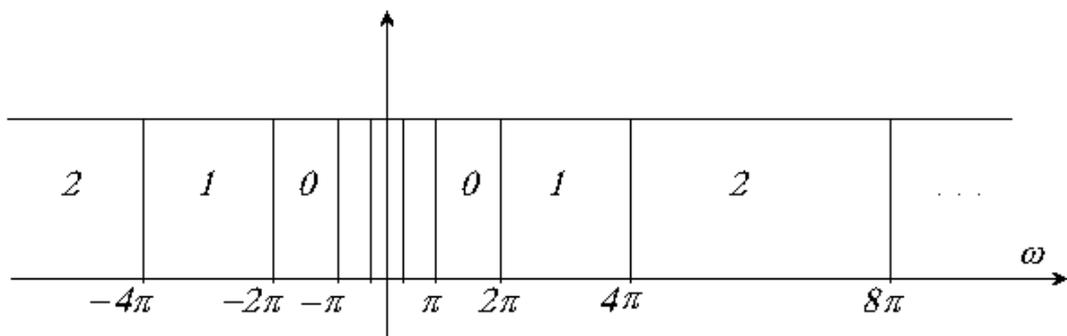
$a_0 = 2^{1/4}, b_0 = 0,5$ , так как  $\frac{B}{A} - 1 < 10^{-5}$ . Для бóльших величин, например

$a_0 = 2$ , будет  $\frac{B}{A} - 1 \cong 0,08$ , т.е. восстановление приводит к бóльшим искажениям.

### 3.5.3. Примеры вейвлетов для дискретного преобразования

Как было отмечено выше, функции вейвлет обладают свойством частотно-временной локализации, т.е. они ограничены как в частотной, так и во временной областях. Ниже рассмотрим два примера: первый – спектр вейвлетов в частотной области представляет собой идеальный полосовой фильтр, второй – сами функции вейвлет представляют собой прямоугольники. Все вейвлеты, с точки зрения частотно-временных свойств, занимают промежуточное положение между этими крайними случаями.

**Sinc-базис.** Разобьем ось частот на интервалы (поддиапазоны), как показано на рис. 3.13 при  $a_0 = 2$ . Такое разбиение называют логарифмическим, так как отношение верхней и нижней границ диапазонов постоянно и



**Рис. 3.13.**

*Разбиение оси частот в логарифмическом масштабе при  $a_0 = 2$*

равно 2. Такое разбиение является еще и идеальным, так как оно реализуется идеальными полосовыми фильтрами. Подобная идеализация нужна для исследования свойств частотного разложения с помощью идеализированных вейвлетов, что позволит в дальнейшем перейти к более сложным разложениям. Любой сигнал  $f(t) \in L_2$  со спектром  $F(\omega)$  может занимать полосу частот, охватывающую несколько таких поддиапазонов. Тогда

$F(\omega) = \sum_m F_m(\omega)$  и  $f(t) = \sum_m f_m(t)$ , т.е. сигнал представляет собой сумму

некоторого числа элементарных сигналов. В рассматриваемом идеальном случае частотные каналы не перекрываются, поэтому имеет место ортогональность этих элементарных сигналов, т.е.

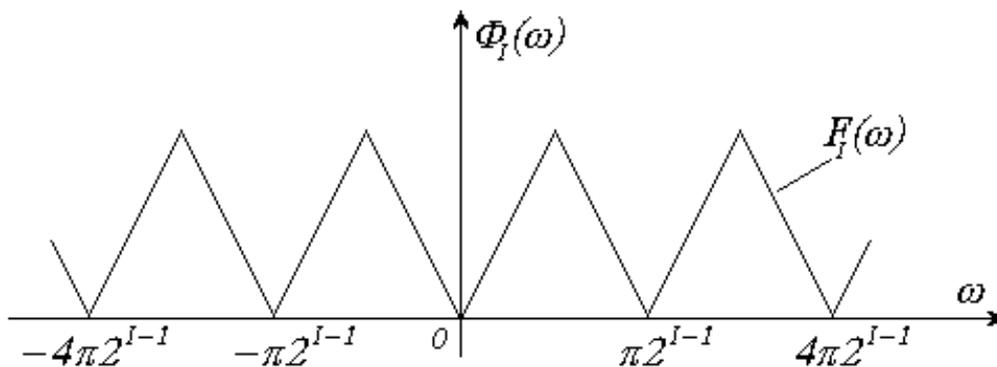
$$\int f_i(t)f_k(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int F_i(\omega)F_k(\omega)d\omega = \delta(i-k).$$

Выберем из всего множества сигналов такие, которые ограничены полосой частот  $2^I$ , т.е. имеющие спектр  $F_I(\omega)$

Рассмотрим периодическую функцию  $\Phi_I(\omega)$  такую, что

$$\Phi_I(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_I(\omega - 2\pi 2^I k),$$

т.е. полученную периодизацией  $F_I(\omega)$  (рис. 3.14). Тогда спектр функции



**Рис. 3.14.**

Периодизация функции  $F_I(\omega)$

$F_i(\omega)$  при произвольном  $I$  можно представить в виде

$$F_i(\omega) = \Phi_i(\omega) \left( \prod \left( \frac{\omega}{\pi 2^{i+1}} \right) - \prod \left( \frac{\omega}{\pi 2^i} \right) \right), \quad (3.5.9)$$

где  $\prod(x)$  – функция окна такая, что

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Посмотрим, как при этих условиях можно представить функцию  $f(t)$  во временной области. Для этого разложим периодическую функцию  $\Phi_i(\omega)$  с периодом  $\frac{T}{2} = \pi 2^i$ , в ряд Фурье (см. (2.1.1)):

$$\Phi_i(\omega) = \sum_k b_i[k] e^{jk \frac{2\pi}{2\pi 2^i} \omega} = \sum_k b_i[k] e^{jk 2^{-i} \omega}, \quad (3.5.10a)$$

где

$$b_i[k] = \frac{1}{2\pi 2^i} \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} F_i(\omega) e^{-jk 2^{-i} \omega} d\omega. \quad (3.5.10б)$$

Подставляя (3.5.10a) в (3.5.9) и выполняя обратное преобразование Фурье, получим:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k b_i[k] e^{jk 2^{-i} \omega} d\omega \cdot \prod \left( \frac{\omega}{\pi 2^{i+1}} \right) \cdot e^{i\omega t} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k b_i[k] e^{jk 2^{-i} \omega} \cdot \prod \left( \frac{\omega}{\pi 2^i} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Вычислим первый интеграл. Переставляя операции суммирования и интегрирования и ограничивая пределы интегрирования с учетом функции окна, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \int_{-\pi 2^{i+1}}^{\pi 2^{i+1}} e^{jk 2^{-i} \omega} e^{j\omega t} d\omega = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \int_{-\pi 2^{i+1}}^{\pi 2^{i+1}} e^{j\omega(t+k 2^{-i})} d\omega = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \int_{-\pi 2^{i+1}}^{\pi 2^{i+1}} \frac{e^{j\omega(t+k 2^{-i})}}{j(t+k 2^{-i})} d(j\omega(t+k 2^{-i})) = \\
& = \frac{2\pi 2^{i+1}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \frac{e^{j(t+k 2^{-i})\pi 2^{i+1}} - e^{-j(t+k 2^{-i})\pi 2^{i+1}}}{2\pi j(t+k 2^{-i}) 2^{i+1}} = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] 2^{i+1} \frac{\sin \pi(2^{i+1} t + k)}{\pi(2^{i+1} t + k)}.
\end{aligned}$$

Аналогично для второго интеграла получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \cdot e^{jk 2^{-i} \omega} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] 2^i \frac{\sin \pi(2^i t + k)}{\pi(2^i t + k)},
\end{aligned}$$

Тогда из (3.5.11):

$$f_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] (2^{i+1} \varphi(2^{i+1} t + k) - 2^i \varphi(2^i t + k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \Psi_{ik}(t),$$

где функция

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \text{sinc}(x) \quad (3.5.12)$$

показана на рис. (3.15).

Сумма элементарных сигналов  $f_i(t)$  равна

$$f(t) = \sum_{i=0}^{M-1} f_i(t) = \sum_{i,k} a_i[k] \psi_{ik}(t), \quad (3.5.13)$$

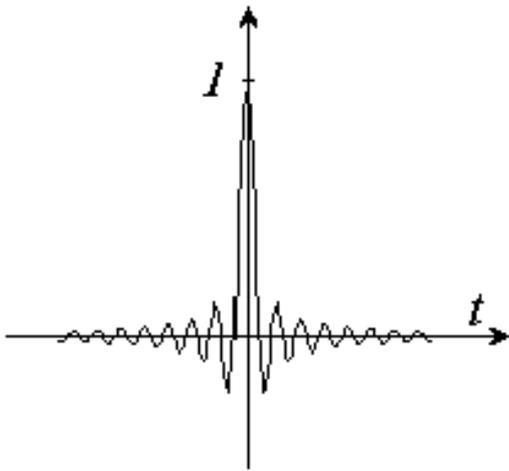


Рис. 3.15.  
Sinc -функция

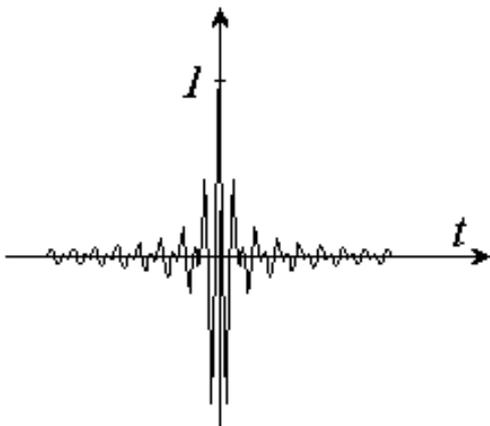


Рис 3.16.  
Sinc -вейвлет

$$a_i[k] = 2^{i/2} b_i[k],$$

где вейвлет

$$\psi_{ik}(t) = 2^{i/2} \psi(2^i t - k) \quad (3.5.14)$$

и (см. рис. 3.16):

$$\psi(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x). \quad (3.5.15)$$

Выражение (3.5.13) является представлением функции  $f(t)$  в базисе вейвлет. В рассматриваемом частном случае идеальной полосовой фильтрации вейвлетом является функция (3.5.14), образованная из материнской функции  $\psi(x)$  по (3.5.15) с учетом (3.5.12). Такой вейвлет называется **sinc**-вейвлетом по имени функции (3.5.12), которая его образует, а функция (3.5.12) получила название масштабной функции.

Множитель  $2^{i/2}$  при  $\psi_{ik}(t)$  необходим для сохранения нормы  $\|\psi_{ik}(t)\|$  вне зависимости от величины масштаба, так как:

$$\|\psi_{ik}(t)\| = 2^i \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(2^i t - k)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi(x)\|.$$

Покажем, что в рассматриваемом частном случае  $b_i[k] = 2^{-i} f_i(2^{-i} k)$ , т.е. определяется отсчетами функции  $f_i(t)$  при  $t = 2^{-i} k$ .

Рассмотрим интеграл Фурье (2.2.1а) при дискретных значениях  $t \in k\Delta_t$

функции  $F_i(\omega)$ , заданной на интервале  $|\omega| < \pi 2^i$ .

Имеем, с учетом (3.5.10б):

$$\begin{aligned} f_i(k\Delta_t) &= \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} F_i(\omega) \cdot e^{j\omega k\Delta_t} d\omega = \\ &= 2^i \frac{1}{2\pi 2^i} \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} F_i(\omega) \cdot e^{j\omega k\Delta_t} d\omega = 2^i b_{ik}. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Последнее равенство справедливо при  $\Delta_t = 2^{-i}$  и вещественных  $f(t)$ .

Следовательно,

$$b_{ik} = 2^{-i} f_i(2^{-i} k).$$

Выполнив преобразование Фурье выражения (3.5.14), можно видеть, что спектр Фурье **sinc**-вейвлета представляет собой идеальный полосовой фильтр, в общем случае занимающий полосу частот от  $2\pi 2^i$  до  $2\pi 2^{i+1}$ .

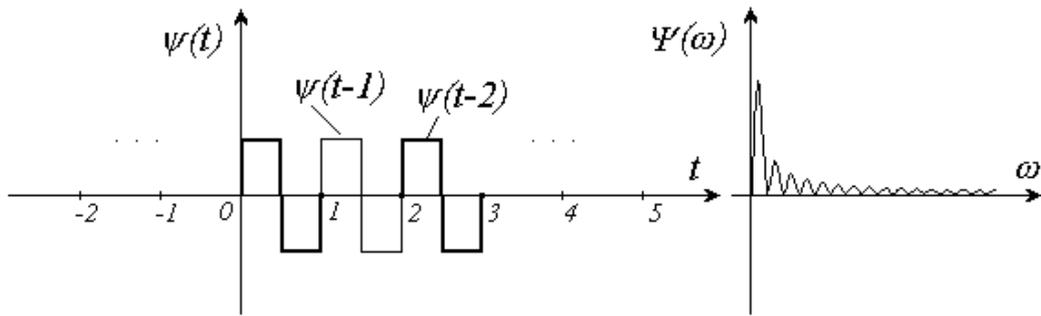
**Вейвлет Хаара.** Разобьем теперь временную ось на интервалы, как показано на рис. 3.17 и определим на единичном интервале функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.5.17)$$

Эта функция является материнским вейвлетом, так как она удовлетворяет условию (3.2.2). Система сдвигов таких функций  $\psi(t-n)$  образует ортонормальный базис, так как их взаимная энергия (В.5) равна нулю при  $n \neq 0$  и равна единице при  $n = 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

Преобразование Фурье (2.2.1б) вейвлета Хаара имеет вид



**Рис. 3.17.**

Функция Хаара.

а) вейвлет  $\psi(t)$ ;

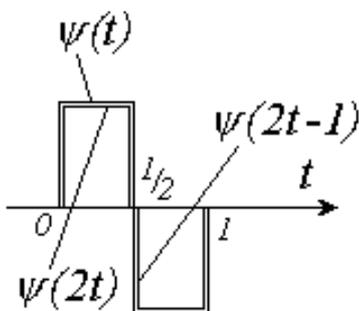
б) спектр Фурье амплитуды

$$\psi(\omega) = je^{-j\omega/2} \frac{(\sin \omega/4)}{\omega/4} \quad (3.5.18)$$

и показано на рис. 3.17б.

Функции Хаара, также как **sin c**-вейвлет, могут быть получены с помощью масштабной функции

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.5.19)$$



**Рис. 3.18.**

Формирование вейвлета Хаара с помощью масштабных функций

что иллюстрируется на рис. 3.18.

Из приведенных примеров следует ряд интересных выводов:

1. Представление вейвлет-функции в виде прямоугольников в любой из областей (частотной или временной) ведет к бесконечному расширению в противоположной области (сравните рис. 3.14 и 3.16;

рис. 3.17,а и 3.17,б).

Следовательно, для того, чтобы функции вейвлет были локализованы одновременно во временной и частотной областях, они должны убывать с ростом аргумента, по крайней мере, по закону обратной пропорционально-

сти (см. (3.2.1)).

2. Вейвлеты  $\psi(t)$ , спектры Фурье которых представляют собой полосовые фильтры, могут быть выражены через масштабные функции  $\varphi(t)$ , спектры Фурье которых представляют собой фильтры нижних частот (см. формулы (3.5.15) и (3.5.19)).

3. Базисные функции для DWT могут быть получены из одной материнской функции путем ее масштабирования и сдвига (см. формулы (3.5.14) и (3.5.15)).

4. Любой сигнал  $f(t)$  из  $L_2$  может быть представлен своим вейвлет-разложением (3.5.13), если число компонентов  $f_i(t)$  таково, что они занимают полосу частот большую, чем полоса сигнала.

## Литература

1. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // *Успехи математических наук*. 1998. V. 53. № 6. С.9-13.

2. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. 131 с.

3. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999. 203 с.

4. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН*. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145-1170.

5. Martin Vatterli, Jelena Kovačević. Wavelets and Subband Coding. Prentice Hall, New Jersey, 1995.