МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

лектор **А.Н.Подкорытов**

Глава 0. ВВЕДЕНИЕ

Эта глава общематематическая – она не связана со спецификой собственно математического анализа. Её цель выработать общую терминологию и обозначения, относящиеся к базовым математическим понятиям – "утверждение", "множество", "отображение" и "вещественное число". Мы не будем их определять (сводить к другим понятиям) по очень простой причине – любая цепочка определений имеет начало, в котором используются некоторые первичные (т. е. не определяемые) понятия. Желательно, чтобы они были интуитивно ясными и чтобы имелся определённый навык в их использовании. На наш взгляд указанные четыре понятия вполне удовлетворяют этому пожеланию. Отказываясь их определять, мы тем не менее считаем совершенно необходимым обсудить как сами эти понятия, так и различные ситуации, связанные с их использованием.

§1. Утверждение

Под утверждением (высказыванием) мы будем понимать предложение, для которого имеет смысл вопрос "истинно оно или ложно?". Это не означает, что ответ на такой вопрос известен – не исключено, что никто не знает ответа (т. е. проблема "открыта"). Например, вопросы "пойдёт ли снег 10 января 2046 в Петербурге?" и "существуют ли нечётные совершенные*) числа?" открытые до сих пор (осень 2019 года) проблемы. Наряду с этим мыслимы утверждения, истинность которых вряд ли когда-нибудь будет установлена или опровергнута (например, "изобретатель колеса был левшой"). Важно, что на поставленные вопросы возможны лишь ответы "да" или "нет". Разумеется, не с каждым предложением русского языка можно связать подобный вопрос – например, "пойди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что".

В дальнейшем особую роль для нас будет играть возможность, исходя из одного или двух данных утверждений, построить ещё одно утверждение. Чаще всего используются следующие пять конструкций.

(1) Отрицание. Каждому утверждению $\mathcal{P}$ можно сопоставить его отрицание, обозначаемое $\overline{\mathcal{P}}$ или $\rceil\mathcal{P}$, – новое утверждение, которое истинно, если $\mathcal{P}$ ложно, и ложно, если $\mathcal{P}$ истинно.

(2) Логическое произведение (конъюнкция). Конъюнкция двух утверждений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – новое утверждение, обозначаемое $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ или $\begin{cases}\mathcal{P}\\ \mathcal{Q}\end{cases}$, которое истинно лишь в том случае, когда истинны оба утверждения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

(3) Логическая сумма (дизъюнкция). Дизъюнкция двух утверждений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – новое утверждение, обозначаемое $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ или $\left[\begin{array}{l}\mathcal{P}\\ \mathcal{Q}\end{array}\right.$, которое истинно, если истинно хотя бы одно из утверждений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ (т. е. $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ложно лишь в случае, когда ложны оба утверждения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$).

---

*)Совершенное число – положительное целое число равное сумме всех своих делителей, кроме его самого; например, 28=1+2+4+7+14.

(4) Равносильность (эквивалентность). Высказывание “утверждения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ равносильны” (обозначение $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$) истинно, если “истинности” утверждений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ совпадают, т. е. $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ истинное утверждение в двух случаях: когда оба утверждения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ истинны или оба они ложны.

(5) Следование (импликация). “Из утверждения $\mathcal{P}$ следует утверждение $\mathcal{Q}$” (другими словами “если $\mathcal{P}$, то $\mathcal{Q}$” или “утверждение $\mathcal{P}$ сильнее утверждения $\mathcal{Q}$”) – это новое утверждение (обозначение $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$), которое ложно лишь в случае, когда $\mathcal{P}$ истинно, а $\mathcal{Q}$ ложно.

Отметим частный случай, вызывающий наибольшие затруднения: если $\mathcal{P}$ ложно, то высказывание $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ истинно для всех утверждений $\mathcal{Q}$ (из ложной предпосылки следует всё, что угодно). На первый взгляд это не вполне согласуется с интуицией. Но противоречие здесь кажущееся. Поясним это на традиционном примере: “если существуют русалки (утверждение $\mathcal{P}$), то их волосы зелёные (утверждение $\mathcal{Q}$)” – это истинное высказывание. Следует подчеркнуть, что в нём не утверждается, что у русалок волосы действительно зелёного цвета (утверждение $\mathcal{Q}$). Говоря, что высказывание $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ истинно, мы не обсуждаем истинность утвержденииий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, мы утверждаем истинность нового, третьего высказывания “вывод сделан верно”. Поэтому наряду с $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ истинным является высказывание $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – утверждение, что все русалки брюнетки. Таким образом, истинность утверждений $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ и $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$ не связана с истинностью утверждений $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ (так как $\mathcal{P}$ ложно). Иначе говоря, в обоих случаях вывод сделан верно, а то что он привёл к сомнительным заключениям, объясняется ложной предпосылкой (утверждение $\mathcal{P}$).

Выяснение истинности любого сколь угодно сложного высказывания, построенного с помощью конечного числа операций (1)-(5) из конечного числа утверждений, истинность которых известна, рутинное занятие. При этом могут оказаться полезными “таблицы истинности” (в них используются сокращения “И”, “Л” для обозначения истинного и ложного утверждений).

$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$

$\mathcal{Q} \backslash \mathcal{P}$	И	Л
И	И	Л
Л	Л	Л

$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$

$\mathcal{Q} \backslash \mathcal{P}$	И	Л
И	И	И
Л	И	Л

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

$\mathcal{Q} \backslash \mathcal{P}$	И	Л
И	И	И
Л	Л	И

$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$

$\mathcal{Q} \backslash \mathcal{P}$	И	Л
И	И	Л
Л	Л	И

Отметим очевидные (легко проверяемые с помощью таблиц истинности) свойства.

1^0. $\rceil(\rceil\mathcal{P}) \Leftrightarrow \mathcal{P}$.

2^0. $\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{P}}$ ложно всегда; $\mathcal{P} \vee \big(\overline{\mathcal{P}}\big)$ истинно всегда.

3^0. $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P})$; $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{Q} \vee \mathcal{P})$.

4^0. $\overline{(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})} \Leftrightarrow \big(\overline{\mathcal{P}} \vee \overline{\mathcal{Q}}\big)$; $\overline{(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})} \Leftrightarrow \big(\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}}\big)$; $\overline{(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})} \Leftrightarrow \big(\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}\big)$.

5^0. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \big(\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}\big)$ – схема доказательства методом “от противного” ($\mathcal{P}$ – условие теоремы, $\mathcal{Q}$ – её утверждение).

6^0. $(\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})) \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R})$; $(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})) \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R})$ – поэтому обычно в таких ситуациях скобки не ставят и пишут кратко: $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$; $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}$.

7^0. $(\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})) \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R}))$.

8^0. $(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})) \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}))$.

Вместо $\overline{\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}}$ и $\overline{\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}}$ часто пишут $\mathcal{P} \not\Rightarrow \mathcal{Q}$ и $\mathcal{P} \not\Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

Упражнение. Покажите на конкретных примерах, что
$(\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})) \not\Leftrightarrow ((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R})$ и $(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})) \not\Leftrightarrow ((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R})$,
т. е. скобки в этих случаях необходимы.

Обычно приходится иметь дело с высказываниями, зависящими от одного или нескольких параметров. Например, утверждение $\mathcal{P}(x) = (x > 5)$ истинно для всех $x \in (5, \infty)$ и ложно для $x \in (-\infty, 5]$. Утверждение $\mathcal{P}(x, y) = (x^2 + y^2 \leqslant 1)$ истинно в круге радиуса 1 с центром в начале координат и ложно вне его. Естественно через $\overline{\mathcal{P}}(x)$ обозначать противоположное высказывание, зависящее от параметра x, т. е. для каждого параметра x утверждение $\overline{\mathcal{P}}(x)$ истинно лишь в том случае, когда утверждение $\mathcal{P}(x)$ ложно.

С каждым утверждением $\mathcal{P}(x)$, зависящим от параметра x, можно связать два новых утверждения:

$\mathcal{P}_* =$ (утверждение $\mathcal{P}(x)$ истинно для всех значений x);

$\mathcal{P}^* =$ (существует хотя бы одно такое значение параметра x, что утверждение $\mathcal{P}(x)$ истинно).

Для записи этих утверждений используются специальные значки (кванторы) – "$\forall$" и "$\exists$". $\forall$ – квантор всеобщности, $\exists$ – квантор существования. Таким образом,

$$\mathcal{P}_* = (\forall x\ \mathcal{P}(x) \quad \text{истинно}); \qquad \mathcal{P}^* = (\exists x\ \mathcal{P}(x) \quad \text{истинно}).$$

При этом имеется ввиду, что рассматриваются лишь "допустимые" значения параметра x, т. е. те, для которых имеет смысл утверждение $\mathcal{P}(x)$. Эти значения либо оговариваются заранее, либо ясны из контекста.

В дальнейшем большую роль играет умение правильно строить отрицание утверждений $\mathcal{P}_*$ и $\mathcal{P}^*$. Ясно, что

$$\overline{\mathcal{P}_*} \Leftrightarrow (\exists x\ \mathcal{P}(x) \quad \text{ложно}) \Leftrightarrow \big(\exists x\ \overline{\mathcal{P}}(x) \quad \text{истинно}\big)\,;$$

$$\overline{\mathcal{P}^*} \Leftrightarrow (\forall x\ \mathcal{P}(x) \quad \text{ложно}) \Leftrightarrow \big(\forall x\ \overline{\mathcal{P}}(x) \quad \text{истинно}\big)$$

(кванторы изменяются, а утверждение $\mathcal{P}$ заменяется на противоположное).

В заключение этого параграфа рассмотрим часто встречающуюся ситуацию, когда высказывание зависит от двух параметров x и y, т. е. для каждой пары x и y "допустимых" значений параметров $\mathcal{P}(x, y)$ – высказывание, истинность которого зависит от конкретных значений x и y. Построим восемь новых высказываний:

$$\mathcal{P}_1 = (\forall x\ \forall y\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно}); \qquad \mathcal{P}_2 = (\forall y\ \forall x\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно});$$

$$\mathcal{P}_3 = (\exists x\ \exists y\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно}); \qquad \mathcal{P}_4 = (\exists y\ \exists x\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно});$$

$$\mathcal{P}_5 = (\forall x\ \exists y\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно}); \qquad \mathcal{P}_6 = (\exists y\ \forall x\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно});$$

$$\mathcal{P}_7 = (\exists x\ \forall y\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно}); \qquad \mathcal{P}_8 = (\forall y\ \exists x\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{истинно}).$$

Ясно, что $\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_3 \Leftrightarrow \mathcal{P}_4$, т. е. <u>одинаковые</u> кванторы можно менять местами. В то же время нетрудно привести примеры высказывания $\mathcal{P}(x, y)$, для которого $\mathcal{P}_5 \not\Leftrightarrow \mathcal{P}_6$ и $\mathcal{P}_7 \not\Leftrightarrow \mathcal{P}_8$, т. е. порядок следования <u>различных</u> кванторов существенен. В этом легко убедиться на следующем примере: $\mathcal{P}(x, y) =$ (студент x успешно сдал экзамен y). Очевидно, что $\mathcal{P}_7$ утверждает, что не все студенты "хвостисты", а $\mathcal{P}_8$ утверждает, что среди учебных дисциплин нет недоступных. Ясно, что $\mathcal{P}_8 \not\Leftrightarrow \mathcal{P}_7$.

Упражнение. Что утверждают $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_6$ в рассматриваемом примере? Какое из утверждений $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_6$ сильнее, т. е. какое из утверждений $\mathcal{P}_5 \Rightarrow \mathcal{P}_6$ или $\mathcal{P}_6 \Rightarrow \mathcal{P}_5$ истинно?

При доказательстве различных утверждений часто используют метод доказательства "от противного": вместо того, чтобы доказывать $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ доказывают $\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}$. При этом утверждения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ обычно зависят от одного или нескольких параметров. Поэтому умение правильно формулировать отрицание утверждений типа $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_8$ совершенно необходимо для понимания многих математических рассуждений. Построим, например, отрицание утверждения $\mathcal{P}_5$ (при этом полезно иметь ввиду только что рассмотренную конкретную реализацию утверждения $\mathcal{P}(x, y)$ (x – студент, y – экзамен). $\overline{\mathcal{P}_5} = \rceil(\forall x\ \exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ истинно) означает, что не для всех x справедливо утверждение ($\exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ истинно). Иначе говоря, найдется такой параметр x, для которого утверждение ($\exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ истинно) ложно: $\overline{\mathcal{P}_5} \Leftrightarrow (\exists x\ \rceil(\exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ истинно)). Отрицание утверждения ($\exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ истинно) означает, что не существует y, для которого утверждение $\mathcal{P}(x, y)$ истинно, т. е. для всех y $\mathcal{P}(x, y)$ ложно: $\rceil(\exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ истинно) $\Leftrightarrow$ ($\forall y\ \overline{\mathcal{P}}(x, y)$ истинно). Итак, $\overline{\mathcal{P}_5} \Leftrightarrow (\exists x\ \forall y\ \overline{\mathcal{P}}(x, y)$ истинно).

Упражнение. Сформулируйте отрицания утверждений $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_8$ и убедитесь тем самым в справедливости следующего правила: при построении отрицания утверждения, зависящего от параметров, все кванторы изменяются (на "противоположные"), а финальное утверждение заменяется на его отрицание.

§2. Множество

Наряду с термином "множество" употребительны и многочисленные его синонимы: набор, совокупность, коллекция, собрание, и т.д.*) Каждое множество однозначно определяется объектами, входящими в него. Эти объекты принято называть элементами или точками множества. Обычно явно или неявно подразумевается, что имеется некоторое основное множество, точки которого используются при построении или описании других множеств. Таким образом, для любой точки a (из основного множества) и некоторого множества A имеют смысл утверждения "a принадлежит множеству A" и "a не принадлежит множеству A". Первое из них записывается $a \in A$, а второе – $a \overline{\in} A$ (или $a \notin A$).

Для описания (задания, построения и т.д.) некоторого множества A чаще всего используют следующие два способа: перечисление всех элементов множества, например, $A = \{a, 0, *, \sqrt{3}\}$ – множество содержащее четыре конкретных элемента – $a, 0, *, \sqrt{3}$ (каждый элемент, принадлежащий множеству, указывается ровно один раз; поэтому подразумевается, в частности, что $a \neq \sqrt{3}$). Этот простейший способ пригоден лишь

*)Некоторые авторы в том же смысле употребляют и слово "семейство", но многие, в том числе и мы, употребляем его в другом смысле (см. следующий параграф).

для множеств достаточно "бедных" по набору своих элементов. В более сложных случаях используют описание множества с помощью характеризующего его свойства: рассматривается некоторое утверждение $\mathcal{P}(a)$, зависящее от параметра a (из основного множества). Говорят, что элемент a обладает свойством $\mathcal{P}$, если $\mathcal{P}(a)$ – истинное утверждение. Все элементы, обладающие свойством $\mathcal{P}$, образуют некоторое множество A, которое записывают так $A = \{a| \ \mathcal{P}(a) \quad \text{истинно}\}$. Некоторые, наиболее часто встречающиеся множества имеют фиксированные, общепринятые обозначения:

$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел или номеров (натуральный ряд);

$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел (дробей);

$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных (действительных) чисел;

$\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел.

Отметим также обозначения промежутков различных типов с концами a и b из $\mathbb{R}$:

$[a, b] = \{x| \ x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant a \wedge x \leqslant b\}$ – замкнутый промежуток или отрезок;

$(a, b) = \{x| \ x \in \mathbb{R} \wedge x > a \wedge x < b\}$ – открытый промежуток или интервал;

$[a, b) = \{x| \ x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant a \wedge x < b\}$ – промежуток замкнутый слева и открытый справа;

$(a, b] = \{x| \ x \in \mathbb{R} \wedge x > a \wedge x \leqslant b\}$ – промежуток открытый слева и замкнутый справа.

Зачастую тип промежутка с концами a и b несущественен или неизвестен. Для всех четырёх таких промежутков будем использовать общее обозначение $\langle a, b\rangle$. В случае $a > b$ не существует ни одного вещественного числа, содержащегося в промежутках с концами a и b. В такой ситуации удобно понятие *пустого множества,* которое обозначается $\varnothing$, – это множество, не содержащее ни одного элемента: $\forall a \ a \in \varnothing$ – ложное утверждение.

Множество может содержать бесконечно много точек (бесконечное множество) или конечное число точек (конечное множество). Конечное множество может не содержать ни одного элемента (пустое множество) или содержать лишь один элемент (одноточечное множество). Не следует путать одноточечное множество $\{a\}$ и точку a, образующую это множество. Например, студенческая группа Гр, из которой отчислены все студенты кроме студента s, – одноточечное множество: Гр $= \{s\}$. Объекты Гр и s различны – для первого из них (но не для второго) отведено место в расписании занятий, зато второй (но не первый) может зарегистрировать свой брак с другим объектом $\widetilde{s}$.

Говорят, что *множество A содержится в множестве B* или A – *подмножество множества B* (запись $A \subset B$), если $\forall a \in A \ a \in B$. Следует обратить внимание на различие в употреблении знаков " $\subset$ " и " $\in$ ". Первый из них применяется к двум множествам ($A \subset B$), а второй – к точке и множеству ($a \in A$). Ясно, что $\varnothing \subset A$ для любого множества A.

Множества A и B равны (запись $A = B$), если $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$. Таким образом, проверка равенства $A = B$ состоит из двух этапов:

$$I. \ \forall a \in A \ a \in B \ (\text{т. е. } A \subset B) \quad II. \ \forall b \in B \ b \in A \ (\text{т. е. } B \subset A).$$

Напомним определения основных операций над множествами:

$A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\}$ – объединение множеств A и B;

$A \cap B = \{x |\ x \in A \wedge x \in B\}$ – пересечение множеств A и B;

$A \setminus B = \{x |\ x \in A \wedge x \notin B\}$ – разность множеств A и B;

$A' = \{x |\ x \notin A\}$ – дополнение множества A (до основного множества).

Ясно, что два множества равны лишь тогда, когда равны их дополнения. Заметим ещё, что $(A')' = A$, $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$, но не для всех множеств $A \setminus B = B \setminus A$.

Упражнение. В каком случае верно последнее равенство?

Следующие два равенства (формулы Де Моргана или формулы двойственности для двух множеств) оказываются полезными при доказательстве различных теоретико-множественных утверждений:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'; \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Первое из них вытекает их следующей цепочки равносильных утверждений

$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \rceil(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow ((\rceil x \in A) \wedge (\rceil x \in B)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Leftrightarrow ((x \in A') \wedge (x \in B')) \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$.

Доказательство второго равенства аналогично. Кроме того, его можно свести к уже доказанному первому равенству – ведь достаточно показать, что правая и левая части второго равенства имеют равные дополнения.

Замечание. Из правил построения отрицаний для утверждений $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ и $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ немедленно следует, что

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B);$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B);$$

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B).$$

Упражнение. Выясните, какие из следующих включений верны:

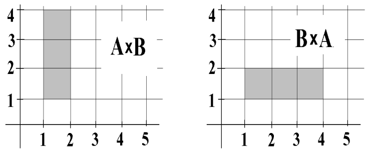
1. $A \cup B \underset{\supset}{\subseteq} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
2. $(A \setminus B) \setminus D \underset{\supset}{\subseteq} (A \cap D) \setminus (B \cap D)$;
3. $A \cap (B \cup D) \underset{\supset}{\subseteq} (A \cap B) \cup (A \cap D)$;
4. $(A \setminus B) \setminus D \underset{\supset}{\subseteq} A \setminus (B \setminus D)$;
5. $(A \setminus B) \setminus D \underset{\supset}{\subseteq} A \setminus (B \cup D)$.

Наконец, рассмотрим ещё одну операцию над множествами. Для этого напомним, что *упорядоченная пара* (a, b) определяется не только своими элементами ("координатами"), но и их порядком, т. е. указанием, какой элемент пары является первым ("первой координатой"), а какой – второй. Иначе говоря, равенство пар (a, b) и $(\widetilde{a}, \widetilde{b})$

равносильно утверждению $(a = \widetilde{a}) \wedge (b = \widetilde{b})$. В отличие от двухточечного множества $\{a, b\}$, которое образовано <u>различными</u> точками a и b, упорядоченная пара может быть образована равными элементами – (a, a). *Декартовым (или прямым) произведением* $A \times B$ двух множеств A и B (существенно, что A – первое, а B – второе множество) называется множество всех таких упорядоченных пар (a, b), что $a \in A$ и $b \in B$, т. е. $A \times B = \{(a, b) |\ a \in A \wedge b \in B\}$.

Аналогичным образом для любого $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 3)$ вводятся упорядоченные наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ из n элементов и прямое произведение $A_1 \times \cdots \times A_n$ множеств $A_1, \ldots, A_n$. В частном случае, когда все эти множества совпадают с некоторым множеством A, вместо $A \times \cdots \times A$ пишут кратко A^n – множество всех упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, у которых все координаты $a_1, \ldots, a_n$ принадлежат множеству A. В частности, $\mathbb{R}^2$ можно истолковывать как плоскость, $\mathbb{Z}^2$ как "решётку целочисленных векторов" в $\mathbb{R}^2$ и т.д.

Множество $A \times B$ удобно изображать графически, если $A, B \subset \mathbb{R}$. Например, для $A = [1, 2]$ и $B = [1, 4]$ имеем



Этот пример показывает, что вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$, т. е. порядок "сомножителей" существенен в определении декартова произведения. Нетрудно убедиться в том, что для непустых множеств A и B равенство $A \times B = B \times A$ возможно лишь в случае $A = B$.

Примем по определению, что $A \times \varnothing = \varnothing$ и $\varnothing \times B = \varnothing$ для любых множеств A и B.

§3. Отображение

Отображение множества X в множество Y – это правило (способ) F, сопоставляющее каждому элементу x множества X некоторый, вполне определённый для него (и, следовательно, единственный) элемент y множества Y. В этом случае y называют значением отображения F в точке x и пишут $y = F(x)$. Термин "отображение" имеет большое число синонимов: оператор, правило, морфизм, семейство, преобразование и др. Хорошо известный термин "функция" многими авторами также считается одним из синонимов. Мы не вполне разделяем эту точку зрения, считая целесообразным закрепить термин "функция" за важнейшим частным случаем отображения – отображения, принимающего лишь числовые значения (т. е. $Y \subset \mathbb{R}$ или $Y \subset \mathbb{C}$).

В различных ситуациях используются разнообразные способы для обозначения отображения F. Отметим некоторые из них: $F : X \to Y$, $y = F(x)$, $x \mapsto F(x)$, $\{F(x)\}_{x \in X}$. В последнем случае обычно говорят о семействе элементов $F(x)$, параметризованном с помощью индекса x из множества X. При этом часто используют укороченную запись: $\{F_x\}_{x \in X}$.

Из сказанного ясно, что для задания отображения необходимо указать три объекта:

множество аргументов (множество определения или задания отображения) X;
множество Y, в которое отображаются эти аргументы;
собственно правило F, сопоставляющее каждому аргументу x значение $y = F(x)$.

Таким образом, с формальной точки зрения, отображение – это упорядоченная тройка (X, Y, F). Поэтому равенство отображений $F : X \to Y$ и $\widetilde{F} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ означает, что

$$\begin{cases} X = \widetilde{X}, \\ Y = \widetilde{Y}, \\ F = \widetilde{F}; \end{cases} \qquad \text{или подробнее} \qquad \begin{cases} X = \widetilde{X}, \\ Y = \widetilde{Y}, \\ \forall x \in X \quad F(x) = \widetilde{F}(x). \end{cases}$$

Подчеркнём, что на природу множеств X и Y не накладывается никаких ограничений: это могут быть числовые множества, множества, образованные словами, географическими объектами и т.д. Отметим несколько частных случаев отображений, наиболее важных для нас в дальнейшем.

Функция. Если $Y \subset \mathbb{R}$ (или $Y \subset \mathbb{C}$), то отображение $f : X \to Y$ называют функцией (вещественной или комплексной), определённой на множестве X. Особенно важны случаи $Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{C}$, так как при таком выборе Y естественно определяются арифметические операции над функциями: $f + g,\ f - g,\ fg,\ const f,\ |f|,\ \frac{f}{g}$ (если $g(x) \neq 0$ $\forall x \in X$). Например, для двух функций $f, g : X \to \mathbb{C}$ их сумма – это новое отображение $(f+g)$ из X в $\mathbb{C}$, действующее по правилу $\forall x \in X\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$. В вещественном случае ($Y \subset \mathbb{R}$) подобным же образом определяются функции $\max(f, g)$ и $\min(f, g)$: $\forall x \in X\ \ \max(f, g)(x) = f(x),\ \min(f, g)(x) = g(x)$, если $f(x) \geqslant g(x)$, и $\max(f, g)(x) = g(x),\ \min(f, g)(x) = f(x)$ в противном случае.

Желая подчеркнуть, что не только множество Y, но и X является числовым (т. е. $X \subset \mathbb{R}$ или $X \subset \mathbb{C}$), говорят, что отображение $f : X \to Y$ – числовая функция.

Как и в случае произвольных отображений, две функции f и g считаются равными, если они имеют общее множество задания X, действуют в одно и то же числовое множество Y и $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Последовательность. Отображение $F : \mathbb{N} \to Y$ называется последовательностью в Y. В частности, если $Y \subset \mathbb{R}$ или $Y \subset \mathbb{C}$, то говорят о числовой (вещественной или комплексной) последовательности. Подчеркнём, что согласно этому определению, последовательность в Y – это частный случай отображения в Y (которое задано на $\mathbb{N}$), а не подмножество в Y. В частности, для числовых последовательностей $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) определены арифметические операции.

Значение последовательности $F : \mathbb{N} \to Y$ в точке $n \in \mathbb{N}$ называют n-ым членом последовательности и вместо записи $F(n)$ используют более короткую – F_n. Поэтому чаще всего последовательность $F : \mathbb{N} \to Y$ записывают в виде семейства $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Поскольку указание $\{n \in \mathbb{N}\}$ ясно из контекста, его нередко опускают и пишут кратко $\{F_n\}$.

Наконец, отметим, что иногда приходится рассматривать последовательности, определённые не на натуральном ряде $\mathbb{N}$, а на множестве $\mathbb{Z}$ всех целых чисел (двусторонние последовательности) или на множествах вида $\{n|\ n \in \mathbb{Z} \wedge n \geqslant c\}$, где c -

фиксированное вещественное число. Чаще всего $c = 0$. Используемые здесь обозначения вполне естественны: $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{F_n\}_{n\geqslant c}$.

Конечная последовательность (упорядоченный набор). Пусть $X = \{1, \ldots, N\}$, где $N \in \mathbb{N}$. Отображение $F : X \to Y$ называется конечной последовательностью или упорядоченным набором из N элементов множества Y. Запись – $(F_1, \ldots, F_N)$. Частный случай $N = 2$ – упорядоченная пара, мы обсуждали его в предыдущем параграфе.

Тождественное отображение. Пусть $X = Y$ и отображение $F : \ X \to X$ таково, что $F(x) = x$ для всех $x \in X$. Такое отображение назыается тождественным отображением множества X и обозначается id_X (или просто id, если ясно, на каком множестве оно задано).

Постоянное отображение. Отображение $F : X \to Y$ постоянно, если существует такой элемент $y_0 \in Y$, что $F(x) = y_0$ для всех $x \in X$.

Обсудим теперь другое понятие, тесно связанное с понятием отображения, — график. Оно играет большую роль в математике, так как с его помощью естественно ставятся или решаются многие математические проблемы.

Определение. *Графиком отображения $F : \ X \to Y$ называется множество $\Gamma_F = \{(x, y)|\ x \in X \wedge y \in Y \wedge y = F(x)\}$ (или короче $\Gamma_F = \{(x, F(x))|\ x \in X\}$).*

Ясно, что $\Gamma_F \subset X \times Y$. Равенство двух отображений $F, G : \ X \to Y$ равносильно совпадению их графиков. Отметим два основых свойства графика отображения $F : X \to Y$

$$\begin{cases} \forall x \in X\ \exists y \in Y\ (x, y) \in \Gamma_F, \\ ((x, y_1) \in \Gamma_F \wedge (x, y_2) \in \Gamma_F) \Rightarrow y_1 = y_2. \end{cases}$$

Упражнение. Докажите, что эти два свойства исчерпывающим образом описывают все графики. Точнее, следующие два утверждения о множестве $\Gamma \subset X \times Y$ равносильны:

$$I.\quad \Gamma - \text{график некоторого отображения}\quad F :\ X \to Y,\ \text{т. е.}\ \ \Gamma = \Gamma_F,$$

$$II.\quad \begin{cases} \forall x \in X\ \exists y \in Y\ (x, y) \in \Gamma, \\ ((x, y_1) \in \Gamma \wedge (x, y_2) \in \Gamma) \Rightarrow y_1 = y_2. \end{cases}$$

Для числовых функций, т. е. в случае $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, это описание легко истолковать графически – любая вертикальная прямая, проходящая через множество X, ровно в одной точке пересекает множество Γ.

Тот факт, что с одной стороны, график однозначно определяет отображение, а с другой стороны, все подмножества произведения $X \times Y$, являющиеся графиками, полностью описываются, позволяет дать теоретико-множественное определение отображения, в котором понятия “отображение” и “график отображения” отождествляются: графиком (отображением) называется любое подмножество Γ произведения $X \times Y$, обладающее двумя свойствами, указанными в последнем упражнении.

Определение. *Образом множества $A \subset X$ при отображении $F : X \to Y$ называется множество $F(A) = \{y|\, \exists x \in A \wedge y = F(x)\}$ (короче $F(A) = \{F(x)|\, x \in A\}$). Прообразом множества $B \subset Y$ называется множество $F^{-1}(B) = \{x|\, x \in X \wedge F(x) \in B\}$. Множество $F(X)$ называют полным образом при отображении F или совокупностью всех значений F.*

Легко видеть, что

$$
\begin{aligned}
&F(A) \subset Y, \quad F^{-1}(B) \subset X;\\
&F(\varnothing) = \varnothing, \quad F^{-1}(\varnothing) = \varnothing;\\
&(A \neq \varnothing \wedge A \subset X) \Rightarrow F(A) \neq \varnothing;\\
&(B \neq \varnothing \wedge B \subset Y) \not\Rightarrow F^{-1}(B) \neq \varnothing;\\
&F^{-1}(B) \neq \varnothing \Leftrightarrow B \cap F(X) \neq \varnothing;\\
&F^{-1}(B) = X \Leftrightarrow F(X) \subset B.
\end{aligned}
$$

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ и $F(x) = x^2$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&F(\mathbb{R}) = [0, \infty), \quad F^{-1}(\mathbb{R}) = F^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R}, \quad F^{-1}([-2, -1]) = \varnothing,\\
&F([1, 2]) = F([-2, -1]) = [1, 4], \quad F^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2].
\end{aligned}
$$

Последние два равенства показывают, что вообще говоря, $F^{-1}(F(A)) \neq A$. Можно утверждать лишь, что $F^{-1}(F(A)) \supset A$.

Упражнение. Пусть $F: X \to Y$ и $B \subset Y$. Верно ли равенство $F(F^{-1}(B)) = B$?

Определение. *Пусть отображение F действует из X в Y. Тогда*
I. F называется <u>сюръекцией</u> (или F действует из X <u>на</u> Y), если $\forall y \in Y \ \exists x \in X \quad y = F(x)$, т. е. $F(X) = Y$ (говоря иными словами, уравнение $F(x) = y$ разрешимо на множестве X для любой правой части из Y);
II. F называется <u>инъекцией</u> (F взаимно однозначно на X), если $\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$, т. е. различным аргументам соответствуют различные значения отображения (говоря иными словами, уравнение $F(x) = y$ имеет на множестве X не более одного решения для любой правой части из Y);
III. F называется <u>биекцией</u>, если оно одновременно и сюръекция, и инъекция (говоря иными словами, уравнение $F(x) = y$ имеет единственное решение на множестве X для любой правой части из Y).

Очевидно, что тождественное отображение биективно. Произвольное отображение $F: X \to Y$ может не обладать ни одним из описанных в определении свойств.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$. Ясно, что функции $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ – биекции. Напротив, функция $x \mapsto x^2$ не только не сюръективна (уравнение $x^2 = -1$ не разрешимо в $\mathbb{R}$), но и не инъективна (уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня).

Заменив (уменьшив) множество Y на $\widetilde{Y} = F(X)$, получим новое отображение – сюръекцию, действующую на X по прежнему правилу. Аналогично, заменив множество X на подходящее множество $\widetilde{X} \subset X$, можно добиться инъективности отображения. Проще всего взять одноточечное подмножество $\widetilde{X}$, но это приводит к существенному уменьшению совокупности значений отображения. Однако интуитивно ясно, что можно так подобрать множество $\widetilde{X}$, что этого не произойдёт. Ситуация, когда не меняя самого правила F, уменьшают множество его задания, довольно частая, и для её описания имеется общепринятая терминология и обозначение (в отличие от ситуации, связанной с изменением множества Y).

Определение. *<u>Сужением отображения</u> $F: X \to Y$ на множество $\widetilde{X} \subset X$ называется такое отображение $\widetilde{F}: \widetilde{X} \to Y$, что $\forall x \in \widetilde{X}$ $\widetilde{F}(x) = F(x)$. Обозначение:* $\widetilde{F} = F\Big|_{\widetilde{X}}$.

Ясно, что для инъективности сужения достаточна (но не необходима) инъективность исходного отображения, а его сюръективность необходима (но не достаточна) для сюръективности сужения.

Упражнение. Рассмотрим отображение $F: X \to Y$ и две группы свойств, которыми F может обладать:

$$\mathcal{P}_1 = (F \text{ – сюръекция});$$
$$\mathcal{P}_2 = (F \text{ – инъекция});$$
$$\mathcal{P}_3 = (F \text{ – биекция});$$

и

$$\mathcal{Q}_1 = (\forall A_1, A_2 \subset X \quad F(A_1 \cap A_2) = F(A_1) \cap F(A_2));$$
$$\mathcal{Q}_2 = \big(\forall B_1, B_2 \subset Y \quad F^{-1}(B_1 \cap B_2) = F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2)\big);$$
$$\mathcal{Q}_3 = (\forall A_1, A_2 \subset X \quad F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2));$$
$$\mathcal{Q}_4 = \big(\forall B_1, B_2 \subset Y \quad F^{-1}(B_1 \cup B_2) = F^{-1}(B_1) \cup F^{-1}(B_2)\big);$$
$$\mathcal{Q}_5 = (\forall A_1, A_2 \subset X \quad F(A_1 \setminus A_2) = F(A_1) \setminus F(A_2));$$
$$\mathcal{Q}_6 = \big(\forall B_1, B_2 \subset Y \quad F^{-1}(B_1 \setminus B_2) = F^{-1}(B_1) \setminus F^{-1}(B_2)\big).$$

Ясно, что не каждое отображение обладает каким-нибудь из свойств $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, 3$. Верно ли аналогичное утверждение о свойствах $\mathcal{Q}_j$, $j = 1, \dots, 6$? Иначе говоря, нет ли среди них свойств, присущих любому отображению?

Имеется ли какая-нибудь связь между свойствами первой и второй групп? Точнее, какие из утверждений $\mathcal{P}_i \Rightarrow \mathcal{Q}_j$ и $\mathcal{Q}_j \Rightarrow \mathcal{P}_i$ верны при $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, \dots, 6$? Есть ли утверждения $\mathcal{P}_i$ равносильные каким-нибудь утверждениям $\mathcal{Q}_j$?

Определение. *Говорят, что для двух отображений $F: X \to Y$ и $G: Z \to W$ имеет смысл композиция, если $\forall x \in X$ $F(x) \in Z$ (т. е. $F(X) \subset Y \cap Z$). В этом случае отображение $H: X \to W$, действующее по правилу $\forall x \in X$ $H(x) = G(F(x))$, называется <u>композицией</u> (или суперпозицией) отображений F и G. Обозначение: $H = G \circ F$ или $H = G(F)$.*

Простейшие примеры показывают, что отбражения $G(F)$ и $F(G)$ не обязаны совпадать. Например, функции $x \mapsto \sin^2 x$ и $x \mapsto \sin(x^2)$ различны (первая из них неотрицательна, а вторая меняет знак), хотя обе они получены композицией одной и той же пары функций $F(x) = x^2$ и $G(x) = \sin x$. Более того, из того, что композиция $G(F)$ имеет смысл, не следует, что имеет смысл $F(G)$. Например, для функций $F(x) = \arcsin x$, $X = [-1, 1]$ и $G(y) = 2 + y^2$, $Y = \mathbb{R}$ имеет смысл лишь композиция $G(F)(x) = 2 + \arcsin^2 x$, $x \in X = [-1, 1]$.

Упражнение. Докажите, что композиция отображений $F: X \to Y$ и $G: Y \to Z$, обладающих одним из свойств *сюръективность, инъективность* или *биективность* также обладает этим свойством.

Следующее определение чрезвычайно важно для правильного понимания многих тем, обсуждаемых не только в курсе математического анализа, но и в других разделах математики.

Определение. *Отображение $F: \ X \to Y$ называется обратимым, если существует такое отображение $G : Y \to X$, что*

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad G(F(x)) = x, \ \text{т. е.} \ \ G \circ F = id_X, \\ \forall y \in Y \quad F(G(y)) = y, \ \text{т. е.} \ \ F \circ G = id_Y. \end{cases}$$

В этом случае отображение G называется обратным к F и обозначается F^{-1}.

Замечания. 1^0. Не каждое отображение F обратимо, но если оно обратимо, то обратное отображение $G = F^{-1}$ также обратимо и при этом $G^{-1} = F$, т. е. $\left(F^{-1}\right)^{-1} = F$.

2^0. Из первого требования определения вытекает инъективность F и сюръективность G, а из второго – инъективность G и сюръективность F. Таким образом, оба они биективны.

3^0. Если отображение $F: \ X \to Y$ обратимо, то обратное отображение единственно. Действительно, если некоторое отображение $\widetilde{G}: \ Y \to X$ также удовлетворяет требованиям определения, то $\forall y \in Y \quad F(G(y)) = y = F(\widetilde{G}(y))$. Так как F взаимно однозначно, то из равенства $F(G(y)) = F(\widetilde{G}(y))$ следует равенство $G(y) = \widetilde{G}(y)$, причём оно верно для всех $y \in Y$. Таким образом, отображения G и $\widetilde{G}$ совпадают.

4^0. Для любого множества X отображение id_X обратимо и $(id_X)^{-1} = id_X$.

Упражнение. Докажите, что композиция обратимых отображений $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$ также обратима и при этом $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Теорема (биективность и обратимость отображения). *Пусть $F: \ X \to Y$. Тогда*

$$(F \ \textit{обратимо}) \quad \Longleftrightarrow \quad (F \ \textit{биекция.})$$

Доказательство. Биективность обратимого отображения установлена в замечании 2^0. Докажем обратное утверждение – биективность влечёт обратимость. Для этого определим отображение $G: \ Y \to X$ следующим образом. Для любого $y \in Y$ в качестве $G(y)$ возьмём решение уравнения $F(x) = y$. Так как F биективно, то такое решение существует и единственно, т. е. определение отображения G корректно. Из него немедленно следует, что отображение G удовлетворяет равенству $F(G(y)) = y$ на всём множестве Y. Осталось доказать, что $G(F(\widetilde{x})) = \widetilde{x}$ для всех $\widetilde{x} \in X$. Но по определению отображения G это равносильно тому, что элемент $\widetilde{x}$ из X решает уравнение $F(x) = y$ с правой частью $y = F(\widetilde{x})$, а это очевидно.

Теорема доказана.

Примеры. Если принять на веру сюръективность следующих отображений (доказательство будет приведено позже – см. Гл.II Непрерывность), то легко убедиться в их обратимости на указанных множествах:

$$\begin{array}{ll}
X = Y = \mathbb{R} & x \mapsto x^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}); \\
X = Y = [0, \infty) & x \mapsto x^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}); \\
X = \mathbb{R},\ Y = (0, \infty) & x \mapsto a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1); \\
X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ Y = [-1, 1] & x \mapsto \sin x; \\
X = [0, \pi],\ Y = [-1, 1] & x \mapsto \cos x; \\
X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ Y = \mathbb{R} & x \mapsto \operatorname{tg} x; \\
X = (0, \pi),\ Y = \mathbb{R} & x \mapsto \operatorname{ctg} x.
\end{array}$$

Обратные функции, очевидно, таковы

$$\begin{array}{ll}
y \mapsto \sqrt[2n+1]{y} & \forall y \in \mathbb{R}; \\
y \mapsto \sqrt[2n]{y} & \forall y \geqslant 0; \\
y \mapsto \log_a y & \forall y > 0; \\
y \mapsto \arcsin y & \forall y \in [-1, 1]; \\
y \mapsto \arccos y & \forall y \in [-1, 1]; \\
y \mapsto \operatorname{arctg} y & \forall y \in \mathbb{R}; \\
y \mapsto \operatorname{arcctg} y & \forall y \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Упражнение. Пусть $F : X \to Y$ – обратимое отображение, $B \subset Y$. В этой ситуации символ $F^{-1}(B)$ можно понимать двояко – или как прообраз множества B при отображении $F : X \to Y$, или как образ этого же множества при отображении $F^{-1} : Y \to X$. Убедитесь, что при этом противоречия не возникает, т. е. оба истолкования определяют одно и то же множество в X.

Теперь скажем несколько слов о так называемых многозначных отображениях и функциях, с которыми часто связаны недоразумения. То понимание отображения $F : X \to Y$, которое было принято нами в этом параграфе, не оставляет места какой-либо многозначности. Единственная разумная возможность дать истолкование понятию “многозначное отображение” состоит в следующем. Вместо отображения из множества X в множество Y рассматривается отображение $\mathcal{F} : X \to \mathfrak{P}_Y$, где $\mathfrak{P}_Y = \{E|\ E \subset Y\}$ – множество всех подмножеств множества Y. Таким образом, для любого элемента $x \in X$ значением $\mathcal{F}(x)$ является не точка множества Y, а некоторое его подмножество (возможно, одноточечное). Если при любом $x \in X$ множество $\mathcal{F}(x)$ содержит лишь две или одну точку из Y, то говорят, что $\mathcal{F}$ — двузначное отображение; если оно содержит не более трёх точек, то — трёхзначное и т.д.

Введение многозначных функций (т. е. отображений $\mathcal{F} : X \to \mathfrak{P}_\mathbb{R}$ или $\mathcal{F} : X \to \mathfrak{P}_\mathbb{C}$) связано со значительными неудобствами (например, нет простого, естественного определения арифметических действий с такими “функциями”). Поэтому определённую ценность представляет понятие *ветви многозначного отображения.* Отображение $F : X \to Y$ называется ветвью многозначного отображения $\mathcal{F} : X \to \mathfrak{P}_Y$, если $F(x) \in \mathcal{F}(x)$

для любого элемента $x \in X$. Выбор той или иной ветви определяется какими-то дополнительными соображениями. Чаще всего многозначные отображения возникают при попытках решить на множестве X уравнение $F(x) = y$, где F – не взаимно однозначное отображение. В этом случае определяют отображение $\mathcal{G} : Y \to \mathfrak{P}_X$, действующее по правилу $\mathcal{G}(y) = F^{-1}(\{y\})$ для любого $y \in Y$. Ветвью такого многозначного отображения будет всякое отображение $G : Y \to X$, для которого равенство $F(G(y)) = y$ справедливо на всём множестве Y.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty)$ и $f(x) = x^2$. Тогда $\mathcal{G}(y) = \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}$ для $y > 0$ и $\mathcal{G}(0) = \{0\}$. Кроме двух "хороших" ветвей этой двузначной функции $g_+(y) = \sqrt{y}$ и $g_-(y) = -\sqrt{y}$ имеется ещё бесконечно много других. Это все функции вида $g(y) = s(y)\sqrt{y}$, где s – любая функция на $[0, \infty)$, принимающая лишь два значения 1 и -1.

В заключение этого параграфа рассмотрим обобщение формул Де Моргана на случай, когда рассматриваются объединение и пересечение не двух множеств, а произвольного семейства множеств. При этом под семейством $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств некоторого множества X мы будем понимать отображение множества "индексов" A в множество $\mathfrak{P}_X$ всех подмножеств X, то есть отображение $\alpha \mapsto X_\alpha, \quad X_\alpha \subset X \ \forall \alpha \in A$. Объединение и пересечение всех множеств $X_\alpha, \ \alpha \in A$ определяются естественно:

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x | \ \exists \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x | \ \forall \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\}.$$

Легко видеть, что в случае A={1,2} мы получим $X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2$.

Примеры. 1^0. Пусть $A = (0, 1)$ и $X_\alpha = (\alpha, 2\alpha)$. Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{0<\alpha<1} (\alpha, 2\alpha) = (0, 2); \qquad \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{0<\alpha<1} (\alpha, 2\alpha) = \varnothing.$$

2^0. Пусть $A = (0, \infty)$ и $X_\alpha = \{(x, y) | \ (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 \leqslant 2\alpha^2\}$ – круг радиуса $\sqrt{2}\alpha$ с центром в точке (α, α). Тогда пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ содержит лишь одну точку – начало координат, а объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ кроме неё содержит ещё и полуплоскость $\{(x, y) | \ x + y > 0\}$ (других точек в нём нет).

Упражнение. Чему равны объединение и пересечение замкнутых кругов $X_\alpha = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leqslant \alpha^2\}$ при $\alpha > 0$?

Формулы Де Моргана в этой более общей ситуации выглядят так

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha \in A} X'_\alpha; \qquad \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right)' = \bigcap_{\alpha \in A} X'_\alpha.$$

В доказательстве требуются минимальные изменения по сравнению с уже разобранным случаем двух множеств:

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right)' \Longleftrightarrow x \notin \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \Longleftrightarrow \rceil\,(\forall\alpha\in A \quad x\in X_\alpha) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\exists\alpha\in A \quad \rceil x\in X_\alpha) \Longleftrightarrow (\exists\alpha\in A \quad x\in X'_\alpha) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in A} X'_\alpha.$$

Второе равенство проверяется аналогично.

Как хорошо известно, объединение и пересечение двух множеств не изменится, если эти множества поменять местами: $X_1\cup X_2 = X_2\cup X_1$ и $X_1\cap X_2 = X_2\cap X_1$. В следующем упражнении объясняется, в какой форме это переносится на случай произвольного семейства множеств.

Упражнение. *Перестановкой множества* A называется любая биекция $\varphi:\ A\to A$. Докажите, что перестановка не меняет ни объединения, ни пересечения семейства множеств. Точнее, пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – некоторое семейство множеств из X; $\varphi: A\to A$ – перестановка множества индексов, $\widetilde{X}_\alpha = X_{\varphi(\alpha)} \quad \forall\alpha\in A$. Тогда

$$\bigcap_{\alpha\in A} X_{\varphi(\alpha)} = \bigcap_{\alpha\in A} \widetilde{X}_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha; \quad \bigcup_{\alpha\in A} X_{\varphi(\alpha)} = \bigcup_{\alpha\in A} \widetilde{X}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha.$$

§4. Вещественные числа

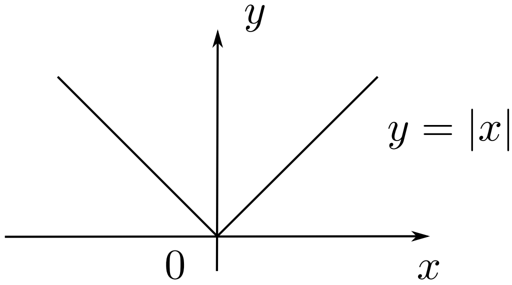
Повседневный опыт и школьное обучение выработали определённые практические навыки в обращении с вещественными числами – каждый знает, что эти числа можно складывать, умножать (вычитать, делить) и сравнивать по величине. Иначе говоря, на множестве $\mathbb{R}$ определены две арифметические операции (и им обратные) и одно бинарное отношение, которые удовлетворяют хорошо известным аксиомам. Мы будем исходить из этого "наивного" представления о вещественных числах. В то же время следует отдавать себе отчёт в том, что вопросы "Что такое вещественное число? Как устроено множество $\mathbb{R}$?" не имеют простых ответов. На первый из них можно ответить, рассмотрев какое-нибудь из аксиоматических построений множества $\mathbb{R}$ (см., например, книги Э.Ландау, Г.М.Фихтенгольца, В.А.Зорича и др.). Со вторым вопросом дело обстоит сложнее. Существует много легко формулируемых вопросов о свойствах вещественных чисел, ответы на которые весьма сложны или не известны до сих пор.

В этом параграфе мы остановимся лишь на трёх темах, связанных с понятием вещественного числа и играющих большую роль в математике, – абсолютная величина числа, метод математической индукции и аксиома полноты множества вещественных чисел.

Определение. *Абсолютной величиной (модулем) вещественного числа называется само это число, если оно неотрицательно, и противоположное число в противном случае:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, сопоставление $x \mapsto |x|$ – это неотрицательная функция, определённая на всём множестве $\mathbb{R}$. Ясно, что $|x| = \max\{x, -x\}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.



Перечислим основные свойства абсолютной величины вещественного числа.

а) $|x| \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
б) $|x| = 0 \iff x = 0$;
в) $|xy| = |x| \cdot |y|$, в частности, $|-x| = |x|$;
г) $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$, $\quad |x| < a \iff -a < x < a$;
д) $|x \pm y| \leqslant |x| + |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
е) $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Утверждения а) – г) очевидны. Для доказательства неравенства д) воспользуемся неравенствами $\pm x \leqslant |x|$ и $\pm y \leqslant |y|$. Из них следует, что $\pm(x \pm y) \leqslant |x| + |y|$. Поэтому

$$|x \pm y| = \max\{(x \pm y), -(x \pm y)\} \leqslant |x| + |y|.$$

Для доказательства неравенства е) заметим, что из неравенства д) следует $|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|$, т. е. $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Меняя числа x и y местами, получаем $|y| - |x| \leqslant |x - y|$. Таким образом,

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leqslant |x - y|.$$

Отметим, наконец, что свойства а), б), д) позволяют трактовать величину $|x - y|$ как расстояние между точками x, y на вещественной оси $\mathbb{R}$.

Упражнения. 1^0. Убедитесь в том, что неравенство д) обращается в равенство лишь в том случае, когда числа x и y имеют одинаковые знаки (т. е. $xy \geqslant 0$). В каких случаях неравенство е) обращается в равенство?

2^0. Решите неравенство $|2x - 1| + |x| \leqslant 3$.

3^0. Постройте график функции $f(x) = 2|x + 1| - |x| - x$.

4^0. Нарисуйте множества $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leqslant 1\}$ и $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \max(|x|, |y|) \leqslant 1\}$.

Переходя к обсуждению метода математической индукции, отметим, что он основан на очень наглядном и интуитивно очевидном свойстве множества натуральных чисел: *его любое непустое подмножество имеет первый (наименьший) элемент,* т.е.

$$(E \subset \mathbb{N} \wedge E \neq \varnothing) \Longrightarrow (\exists n_0 \in E \ \forall n \in E \quad n \geqslant n_0).$$

В зависимости от способа построения множества $\mathbb{R}$ это утверждение либо принимают в качестве аксиомы, либо выводят из других предпосылок. Принимая его на веру без дальнейшего обсуждения, получаем следующее важное утверждение.

Теорема (о методе математической индукции). *Пусть* $\{\mathcal{P}_n\}$ *– последовательность высказываний. Следующие два утверждения равносильны:*

$$I.\ \forall n \in \mathbb{N}\ \mathcal{P}_n \text{ истинно}; \qquad II.\ \mathcal{P}_1 \text{ истинно и } \forall n \in \mathbb{N}\ \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}.$$

Доказательство. Нужно доказать лишь $II \Rightarrow I$ (обратное утверждение очевидно). Допустим противное: множество тех номеров n, для которых утверждение $\mathcal{P}_n$ ложно, не пусто. Обозначим его E : $E \subset \mathbb{N}$, $E \neq \varnothing$ и для любого $n \in E$ утверждение $\mathcal{P}_n$ ложно. Пусть n_0 – первый элемент множества E. Так как $n_0 \in E$, то по определению множества E утверждение $\mathcal{P}_{n_0}$ ложно. В силу утверждения II $n_0 > 1$ (так как $\mathcal{P}_1$ истинно) и, следовательно, $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим утверждение $\mathcal{P}_{n_0-1}$. Если оно истинно, то истинно утверждение $\mathcal{P}_{n_0}$ (так как $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ для всех номеров n и, в частности, для $n = n_0 - 1$). Но это невозможно, так как $\mathcal{P}_{n_0}$ ложно. Если же утверждение $\mathcal{P}_{n_0-1}$ ложно, то $n_0 - 1 \in E$, что противоречит определению номера n_0 как первого элемента множества E. Полученное противоречие доказывает, что сделанное предположение ложно, то есть $E = \varnothing$ и, следовательно, все утверждения $\mathcal{P}_n$ истинны.

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет заменять проверку истинности последовательности утверждений $\{\mathcal{P}_n\}$ на проверку утверждения $\mathcal{P}_1$ (база индукции) и доказательство истинности другой последовательности утверждений $\{\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}\}$ (индукционный переход). В большинстве случаев (но не всегда!) база устанавливается просто. Доказательство утверждения $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ зачастую значительно проще чем непосредственное доказательство утверждения $\mathcal{P}_{n+1}$.

Прежде чем переходить к примерам, сделаем несколько замечаний об использовании этого метода.

Замечания. 1^0. Если последовательность утверждений $\{\mathcal{P}_n\}$ определена для $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant m$ (m – фиксированное целое число), то база индукции состоит в проверке утверждения $\mathcal{P}_m$. Чаще всего $m = 0$.

2^0. Утверждения I и II теоремы равносильны утверждению

$$III. \quad \mathcal{P}_1 \text{ истинно и } \ (\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства $II \Rightarrow III$ (обратное очевидно) достаточно применить теорему к последовательности утверждений $\{\widetilde{\mathcal{P}}_n\}$, где $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n$.

3^0. Полезно иметь в виду такую, на первый взгляд парадоксальную, особенность метода – иногда легче доказывать более сильное утверждение. Это связано со спецификой индукционного перехода: проверка утверждения $\mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}$ может оказаться проще чем проверка утверждения $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, хотя для всех n утверждение $\mathcal{Q}_{n+1}$ сильнее утверждения $\mathcal{P}_{n+1}$. Причина ясна: в первом случае используется более сильная предпосылка $\mathcal{Q}_n$ вместо $\mathcal{P}_n$. Такая ситуация встретится нам в одном из примеров.

4^0. Зачастую методом математической индукции пользуются так: сначала с его помощью доказывают истинность утверждений $\{\mathcal{P}_{2^k}\}$, а затем для доказательства $\mathcal{P}_n$ подбирают такой номер k, что $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$, и $\mathcal{P}_n$ выводят из $\mathcal{P}_{2^k}$. Разумеется, вместо $\{2^k\}$ можно брать и другие возрастающие последовательности номеров.

Примеры. 1^0. Неравенство Бернулли. Пусть $x \geqslant -1$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$
Обозначим это утверждение $\mathcal{B}_n$ и проверим, что $\mathcal{B}_n \Rightarrow \mathcal{B}_{n+1}$ (утверждение $\mathcal{B}_1$ очевидно):
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.$$
Нетрудно видеть, что при $n \geqslant 2$ неравенство Бернулли обращается в равенство лишь при $x=0$.

2^0. Бином Ньютона. Для любого номера n и любых двух чисел a и b (вещественных или комплексных) справедливо равенство
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$
Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\quad k! = 1\cdot 2\cdots k$ $(0! = 1! = 1)$.

Обозначим это утверждение $\mathcal{N}_n$. Так $\mathcal{N}_1$ очевидно, то остаётся проверить, что $\mathcal{N}_n \Rightarrow \mathcal{N}_{n+1}$:
$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} =$$
$$\overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}.$$
В первой сумме вернёмся к прежнему обозначению индекса суммирования – будем писать k вместо j. Выровняем пределы суммирования в получившихся суммах. Для этого выделим последнее слагаемое в первой сумме и первое – во второй:
$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} =$$
$$= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}.$$
В конце мы воспользовались рекуррентной формулой для биномиальных коэффициентов $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, которая легко следует из их определения.

3^0. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_{n+1} \leqslant \leqslant \sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Требуется доказать, что $x_n \leqslant x_1^n$.

Обозначим доказываемое утверждение $\mathcal{P}_n$ и воспользуемся модификацией метода математической индукции, приведённой в замечании 2^0. Так как база индукции очевидна, то надо доказать $(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Из утверждений $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$, т. е. из неравенств $x_1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant x_1^2, \ldots, x_n \leqslant x_1^n$ следует, что $x_{n+1} \leqslant \sqrt[n]{x_1^2 x_1^4 \cdots x_1^{2n}} = \sqrt[n]{x_1^{n(n+1)}} = x_1^{n+1}$, т. е. $x_{n+1} \leqslant x_1^{n+1}$ – утверждение $\mathcal{P}_{n+1}$.

4^0. Пусть $x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$ для $n \in \mathbb{N}$ ($x_1 = \frac{1}{2}$). Требуется доказать неравенство $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ (утверждение $\mathcal{P}_n$). База $\mathcal{P}_1$ очевидна, но прямая проверка индукционного перехода не получается: так как $x_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} x_n$, то утверждение $\mathcal{P}_{n+1}$ равносильно неравенству $\frac{2n+1}{2n+2} x_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, а оно не вытекает из неравенства $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ (т. е. из утверждения $\mathcal{P}_n$), так как $\frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Рассмотрим более сильное утверждение $\mathcal{Q}_n :\ x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. База $\mathcal{Q}_1$ очевидна ($\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$). Проверим, что $\mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}$:

$$x_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} x_n < \frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}$$

в силу простого неравенства $(2n+1)(2n+3) < 4(n+1)^2$.

В этом примере имеется один нетривиальный шаг – замена исходного утверждения $\mathcal{P}_n$ на новое, более сильное $\mathcal{Q}_n$. Этот шаг невозможно формализовать и зачастую именно он вызывает наибольшие затруднения.

Упражнение. Покажите, что полученную для последовательности $\{x_n\}$ оценку сверху существенно улучшить нельзя: $x_n \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ убывает "с той же скоростью", что $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$.

5^0. Докажем неравенство

$$H_n \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{1 + \log_2 n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим это утверждение $\mathcal{P}_n$. База $\mathcal{P}_1$ очевидна, но доказательство индукционного перехода $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ после простых преобразований сводится к неравенству $(1 + \frac{1}{n})^n \leqslant 4$, которое не проще исходного. Применим метод математической индукции для оценки снизу величин

$$h_k = H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k}.$$

Из очевидных соотношений

$$h_{k+1} = h_k + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} > h_k + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k \text{ раз}} = h_k + \frac{1}{2},$$

следует $h_{k+1} > h_k + \frac{1}{2}$. Отсюда по индукции сразу получаем, что $h_k \geqslant 1 + \frac{k}{2}$. Теперь утверждение $\mathcal{P}_n$ получить совсем легко: взяв произвольный номер n, подберём такой номер k, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Тогда $\log_2 n < k + 1$ и поэтому

$$H_n \geqslant H_{2^k} = h_k \geqslant 1 + \frac{k}{2} > 1 + \frac{-1 + \log_2 n}{2} = \frac{1 + \log_2 n}{2}.$$

Упражнения. 1^0. Докажите, что для любых вещественных или комплексных чисел $x, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

2^0. На плоскости произвольным образом проведены несколько прямых, которые разбили её на конечное число многоугольников (некоторые из них неограничены). Докажите, что используя лишь две краски, их можно так раскрасить, что соседние, т. е. имеющие общий граничный отрезок, многоугольники будут окрашены в разные цвета (подобно тому как окрашена шахматная доска).

3^0. Докажите обобщение неравенства Бернулли:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

если все числа $x_1, \ldots, x_n$ не меньше (-1) и имеют один знак (т. е. либо $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, либо $x_1, \ldots, x_n \in [-1, 0]$).

4^0. Докажите, что

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

5^0. Докажите, что $H_n < 2 + \log_2 n$ (обозначение H_n введено в примере 5^0).

6^0. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Определим функцию S_p на $\mathbb{N}$ следующим образом: $S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что S_p – многочлен степени $p + 1$ со старшим коэффициентом $\frac{1}{p+1}$.

7^0. Докажите неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \qquad (\mathcal{C}_n)$$

Подсказка: сначала по индукции докажите неравенство $\mathcal{C}_{2^k}$. Чтобы доказать неравенство с произвольным $n \in \mathbb{N}$ примените неравенство $\mathcal{C}_{2^k}$ при $2^k \geqslant n$ к числам $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2^k}$, где $x_{n+1} = \cdots = x_{2^k} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Формулировки некоторых математических утверждений значительно упрощаются, если наряду с обычными вещественными числами использовать два несобственных числа $+\infty$ и $-\infty$.

Определение. *Расширенной числовой осью* $\overline{\mathbb{R}}$ *называется множество* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *причём* $-\infty < x < +\infty$ *для любого* $x \in \mathbb{R}$.

Для $x \in \overline{\mathbb{R}}$ положим

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \qquad \text{если } x \neq -\infty,$$
$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \qquad \text{если } x \neq +\infty,$$

и

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (-\infty) \cdot (-x) = (-x) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad \text{если } x > 0,$$
$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (-\infty) \cdot (-x) = (-x) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \text{если } x > 0.$$

Легко видеть, что так определённые арифметические операции в $\overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяют аксиомам арифметики (обращаем внимание на то, что символам $(+\infty)+(-\infty)$ и $0\cdot(\pm\infty)$ не придаётся какого-либо числового значения).

Введённое отношение порядка на $\overline{\mathbb{R}}$ позволяет рассматривать промежутки различных типов с концами из этого множества. Мы будем обозначать их по-прежнему – так же как промежутки в $\mathbb{R}$. Кроме того, возможность сравнивать числа из $\overline{\mathbb{R}}$ по величине позволяет принять следующее определение.

Определение. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \varnothing$.*

1^0. *Наибольшим элементом множества E называется такое число x^*, что $x^* \in E$ и $x \leqslant x^*$ для любого $x \in E$. Обозначение: $x^* = \max E$.*

2^0. *Наименьшим элементом множества E называется такое число x_*, что $x_* \in E$ и $x \geqslant x_*$ для любого $x \in E$. Обозначение: $x_* = \min E$.*

Разумеется, не каждое подмножество в $\overline{\mathbb{R}}$ имеет наибольший или наименьший элементы. Например, открытый промежуток не имеет ни того, ни другого. В то же время любое непустое *конечное* подмножество расширенной числовой оси имеет и наибольший, и наименьший элементы.

Обратимся теперь к важнейшей теме этого параграфа – аксиоме полноты множества вещественных чисел (её называют также и аксиомой Кантора-Дедекинда). Она играет особую роль в математическом анализе. Для эффективного использования этого постулата и непосредственных следствий из него требуется определённый навык.

Аксиома полноты. *Пусть A и B – непустые подмножества $\overline{\mathbb{R}}$, причём множество A расположено левее множества B, т. е. $\forall a \in A\ \forall b \in B \quad a \leqslant b$. Тогда в множестве $\overline{\mathbb{R}}$ найдётся точка c, разделяющая эти множества:*

$$\forall a \in A\ \forall b \in B \quad a \leqslant c \leqslant b.$$

Существенно, что точка c зависит от множеств A и B, но не от точек a и b. Поэтому ошибочна такая (к сожалению часто встречающаяся) формулировка заключения этой аксиомы: "для всех чисел $a \in A$ и $b \in B$ существует такое число c, что $a \leqslant c \leqslant b$." Утверждение, взятое в кавычки, верно, но оно тривиально (последнему неравенству удовлетворяет любое число из промежутка $[a, b]$). В отличие от этого малосодержательного утверждения аксиома Кантора-Дедекинда гарантирует существование "универсального разделителя" c, одного и того же для всех чисел a (из A) и b (из B).

Отметим, что из полноты множества $\overline{\mathbb{R}}$ сразу вытекает и полнота множества $\mathbb{R}$: *если непустые множества A и B содержатся в $\mathbb{R}$ и A расположено левее B, то в $\mathbb{R}$ найдётся точка c, разделяющая эти множества.*

Действительно, в $\overline{\mathbb{R}}$ такой разделитель c найдётся в силу аксиомы Кантора-Дедекинда. Осталось заметить, что он конечен, т. е. $c \in \mathbb{R}$, так как существуют такие числа $a \in A \subset \mathbb{R}$ и $b \in B \subset \mathbb{R}$, что $a \leqslant c \leqslant b$.

Свойство множества вещественных чисел, описываемое в аксиоме полноты, указывает на важную особенность строения этого множества: оно "сплошное", в нём нет "пропусков", "щелей" или "трещин". Употребление терминов, взятых в кавычки, может помочь осмыслить содержание аксиомы, но никак не может заменить её. В отличие от самой аксиомы они не сопровождались чёткими формулировками. Неосторожное употребление "близких" терминов или оборотов речи, не имеющих исчерпывающего определения, может привести к серьёзным ошибкам. Например, говоря о "сплошной" структуре множества, об отсутствии "пропусков", иногда неявно подразумевают, что его элементы имеются в любом невырожденном промежутке. Но это свойство значительно слабее полноты! Чтобы убедиться в этом, обсудим поподробнее принципиальное различие в структуре множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$. Очевидно, что в любом невырожденном промежутке имеются элементы и того, и другого множества. В то же время, множество $\mathbb{Q}$ не полное: в нём существуют такие непустые подмножества A и B, что A левее B, но *разделителя для них в множестве* $\mathbb{Q}$ *нет.* Для получения такого примера обратимся к хорошо известной ещё с античных времён задаче определения $\sqrt{2}$ – поиску положительного решения уравнения $x^2 = 2$.

Теорема (иррациональность корня из двух). *Уравнение* $x^2 = 2$ *неразрешимо на множестве рациональных чисел:* $\forall r \in \mathbb{Q} \quad r^2 \neq 2$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует положительное решение $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, то есть для некоторых чисел $p, q \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Можно считать, что числа p и q взаимно простые (иначе их следует поделить на наибольший общий делитель). Так как $p^2 = 2q^2$, то p – чётное число, т. е. $p = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Но тогда $4k^2 = p^2 = 2q^2$ и, следовательно, $2k^2 = q^2$. Поэтому число q также чётное, а это невозможно, так как числа p и q взаимно простые.

Теорема доказана.

Итак, все положительные рациональные числа распадаются на два класса:

$$A_{\mathbb{Q}} = \{a \in \mathbb{Q} \,|\, a > 0,\, a^2 < 2\} \quad \text{и} \quad B_{\mathbb{Q}} = \{b \in \mathbb{Q} \,|\, b > 0,\, b^2 > 2\}.$$

Мы покажем, что никакое рациональное число не может разделять эти множества и, следовательно, $\mathbb{Q}$ – не полно. Совсем иная ситуация в $\mathbb{R}$ – мы докажем, что множества

$$A_{\mathbb{R}} = \{a \in \mathbb{R} \,|\, a > 0,\, a^2 < 2\} \quad \text{и} \quad B_{\mathbb{R}} = \{b \in \mathbb{R} \,|\, b > 0,\, b^2 > 2\}$$

разделены положительным вещественным числом, квадрат которого равен 2, т. е. числом $\sqrt{2}$.

Заметим, что множество $A_{\mathbb{Q}}$ расположено левее множества $B_{\mathbb{Q}}$ и $A_{\mathbb{R}}$ – левее $B_{\mathbb{R}}$, так как для положительных чисел a и b неравенства $a < b$ и $a^2 < b^2$ равносильны.

Сначала докажем два простых вспомогательных утверждения.

1^0. *В множествах* $A_{\mathbb{Q}}$ *и* $A_{\mathbb{R}}$ *нет наибольшего элемента.*

Действительно, пусть A – одно из множеств $A_{\mathbb{Q}}$ или $A_{\mathbb{R}}$. Для любого числа $a \in A$ справедливы неравенства $0 < a < 2$ и $2 - a^2 > 0$. Поэтому число $\widetilde{a} = a + \frac{2-a^2}{6}$ больше a, и в то же время

$$\widetilde{a}^2 = a^2 + \frac{a}{3}(2-a^2) + \frac{1}{36}(2-a^2)^2 < a^2 + \frac{2}{3}(2-a^2) + \frac{1}{18}(2-a^2) < a^2 + (2-a^2) = 2.$$

Следовательно, $\widetilde{a} \in A$ (в случае $A = A_{\mathbb{Q}}$ мы пользуемся очевидным утверждением $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \widetilde{a} \in \mathbb{Q}$). Поэтому любое число из A можно увеличить, не выходя из A.

2^0. *В множествах $B_{\mathbb{Q}}$ и $B_{\mathbb{R}}$ нет наименьшего элемента.*

Действительно, пусть B – одно из множеств $B_{\mathbb{Q}}$ или $B_{\mathbb{R}}$. Докажем, что любое число b из B можно уменьшить, оставаясь в B. По определению этого множества его элемент b удовлетворяет неравенству $b^2 > 2$. Поэтому число $\widetilde{b} = b - \frac{b^2-2}{2b}$ меньше b. Ясно также, что $\widetilde{b} = \frac{b}{2} + \frac{1}{b} > 0$. В то же время

$$\widetilde{b}^2 = b^2 - 2b\frac{b^2-2}{2b} + \left(\frac{b^2-2}{2b}\right)^2 = 2 + \left(\frac{b^2-2}{2b}\right)^2 > 2.$$

Следовательно, $\widetilde{b} \in B$ (в случае $B = B_{\mathbb{Q}}$ мы пользуемся очевидным утверждением $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \widetilde{b} \in \mathbb{Q}$). Поэтому любое число из B можно уменьшить, не выходя из B.

Теперь легко показать, что среди рациональных чисел нет разделителя множеств $A_{\mathbb{Q}}$ и $B_{\mathbb{Q}}$. Действительно, этот разделитель должен быть положительным рациональным числом и поэтому должен принадлежать либо множеству $A_{\mathbb{Q}}$, либо множеству $B_{\mathbb{Q}}$. В первом случае он был бы наибольшим элементам в $A_{\mathbb{Q}}$, а это невозможно в силу утверждения 1^0. Во втором случае разделитель оказался бы наименьшим элементом множества $B_{\mathbb{Q}}$, что противоречит утверждению 2^0.

Теорема (существование $\sqrt{2}$). *Существует такое положительное число $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$.*

Доказательство. Множества $A_{\mathbb{R}}$ и $B_{\mathbb{R}}$ содержатся в $\mathbb{R}$ и не пусты ($1 \in A_{\mathbb{R}}$, $2 \in B_{\mathbb{R}}$), причём $A_{\mathbb{R}}$ левее $B_{\mathbb{R}}$. По аксиоме Кантора-Дедекинда существует число c, разделяющее $A_{\mathbb{R}}$ и $B_{\mathbb{R}}$. Проверим, что $c^2 = 2$. Если это не так, то либо $c^2 < 2$, т. е. $c \in A_{\mathbb{R}}$, либо $c^2 > 2$, т. е. $c \in B_{\mathbb{R}}$. В первом случае $c = \max A_{\mathbb{R}}$ – это противоречит утверждению 1^0, а во втором $c = \min B_{\mathbb{R}}$ – это противоречит утверждению 2^0. Итак, $c^2 = 2$.

Теорема доказана.

Следующее важное утверждение (доказываемое обычно в теории пределов) сразу следует из аксиомы Кантора-Дедекинда.

Теорема (о вложенных промежутках). *Пусть $\{\Delta_n\}$ – последовательность непустых вложенных (т. е. $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$) и замкнутых промежутков в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ не пусто: существует такое число $c \in \overline{\mathbb{R}}$, что $c \in \Delta_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть A – множество, образованное левыми концами промежутков: $A = \{a |\ \exists k \in \mathbb{N}\ a = \min \Delta_k\}$. Аналогично, $B = \{b |\ \exists j \in \mathbb{N}\ b = \max \Delta_j\}$ – множество, образованное их правыми концами. Ясно, что эти множества не пусты и содержатся в $\overline{\mathbb{R}}$. Проверим, что множество A расположено левее множества B : $\forall a \in A\ \forall b \in B \quad a \leqslant b$, т. е. $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall j \in \mathbb{N} \quad \min \Delta_k \leqslant \max \Delta_j$. Положим $n = \max\{k, j\}$. Так как $k \leqslant n$, то $\Delta_n \subset \Delta_k$, и поэтому $\min \Delta_k \leqslant \min \Delta_n \leqslant \max \Delta_n$. Аналогично, из включения $\Delta_n \subset \Delta_j$ следует $\max \Delta_j \geqslant \max \Delta_n$. Таким образом, $\min \Delta_k \leqslant \max \Delta_j$ для всех $k, j \in \mathbb{N}$, т. е. множества A и B удовлетворяют условиям аксиомы Кантора-Дедекинда. Поэтому найдётся такая точка $c \in \overline{\mathbb{R}}$, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$. В частности, взяв $a = \min \Delta_n$ и $b = \max \Delta_n$ (концы одного и того же промежутка), получим $\min \Delta_n \leqslant c \leqslant \max \Delta_n$ для любого номера n, т. е. $c \in \Delta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Замечания. 1^0. Если рассматривать конечные промежутки, т. е. $\Delta_n \subset \mathbb{R}$ (а не $\overline{\mathbb{R}}$), то $c \in \mathbb{R}$.

2^0. В теореме не утверждается единственность точки c. Например, $\bigcap_n \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = [0,1]$. Ясно, что если две точки c_1 и c_2 принадлежат пересечению $\bigcap_n \Delta_n$, то длины всех промежутков не меньше чем $|c_1 - c_2|$ (промежутки не стягиваются в точку). Если же среди промежутков имеются сколь угодно короткие, то их пересечение содержит единственную точку.

3^0. Существенно, что рассматриваются замкнутые промежутки. Например, множество $\bigcap_n \left(0, \frac{1}{n}\right)$ пусто, хотя промежутки вложены. Где в доказательстве теоремы использована замкнутость промежутков?

Введённые ранее понятия наибольшего и наименьшего элементов числового множества обладают одним существенным недостатком – многие бесконечные числовые множества не имеют таких элементов. Кроме того, зачастую не так важно знать, чему равен максимальный элемент (его нахождение может оказаться слишком трудоёмкой задачей) – достаточно знать, что все точки множества не превосходят какого-то определённого числа. Например, выбирая ширину дверей на математико-механическом факультете, строители не выясняли, какой студент (или преподаватель) самый толстый. Им было ясно, что ширина дверей около одного метра вполне достаточна. Подобные ситуации часто возникают не только в строительстве, но и в математике. Поэтому в дальнейшем большую роль будут играть следующие определения.

Определение. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $E \neq \varnothing$.*

1^0. *Число $b \in \overline{\mathbb{R}}$ называется <u>верхней границей множества</u> E, если $\forall x \in E \quad x \leqslant b$. Совокупность всех верхних границ множества E обозначим $\widehat{E}$.*

2^0. *Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется <u>нижней границей множества</u> E, если $\forall x \in E \quad x \geqslant a$. Совокупность всех нижних границ множества E обозначим $\overset{\vee}{E}$.*

Разумеется, множества $\widehat{E}$ и $\overset{\vee}{E}$ не пусты: $+\infty \in \widehat{E}, \quad -\infty \in \overset{\vee}{E}$. Особый интерес представляют ситуации, когда имеются границы отличные от этих тривиальных границ.

Определение *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $E \neq \varnothing$.*

1^0. *Множество E называется <u>ограниченным сверху</u>, если оно имеет конечную верхнюю границу: $\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \leqslant b$, т. е. $E \subset [-\infty, b], \quad b < +\infty$.*

2^0. *Множество E называется <u>ограниченным снизу</u>, если оно имеет конечную нижнюю границу: $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \geqslant a$, т. е. $E \subset [a, +\infty], \quad a > -\infty$.*

3^0. *Множество E называется <u>ограниченным</u>, если оно ограничено и сверху, и снизу, т. е. $\exists a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad a \leqslant x \leqslant b$ (иначе говоря, E содержится в некотором конечном промежутке).*

Замечания. 1^0. Ясно, что всякое число большее, чем некоторая верхняя граница множества, также является его верхней границей, т. е. $b \in \widehat{E} \Rightarrow [b, +\infty] \subset \widehat{E}$. Аналогично, $a \in \overset{\vee}{E} \Rightarrow [-\infty, a] \subset \overset{\vee}{E}$.

2^0. Легко видеть, что ограниченность множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ равносильна тому, что $E \subset [-L, L]$ при некотором $L \in (0, +\infty)$ (если $E \subset [a, b]$, то достаточно взять $L = \max\{|a|, |b|\}$).

3^0. Ограниченность множества сверху или снизу влечёт такую же ограниченность любого его подмножества. В частности, ограничено всякое подмножество ограниченного множества.

4^0. Иногда отказываются от требования $E \neq \varnothing$, считая, что всякое число из $\overline{\mathbb{R}}$ является и верхней, и нижней границей пустого множества: $\widehat{\varnothing} = \overset{\vee}{\varnothing} = \overline{\mathbb{R}}$.

5^0. Ясно, что $\widehat{E} = [\max E, +\infty]$, если существует $\max E$. Аналогично, $\overset{\vee}{E} = [-\infty, \min E]$, если существует $\min E$.

6^0. Естественно заинтересоваться вопросом, существуют ли неулучшаемые (наименьшая верхняя и наибольшая нижняя) границы? Это, конечно, так в простейшем случае, когда существуют $\max E$ и $\min E$. Замечательно, что так будет всегда – вне зависимости от того, имеются или нет наибольший и наименьший элементы.

Определение. *Пусть* $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ *и* $E \neq \varnothing$.

1^0. *Точной верхней границей или* <u>*верхней гранью множества*</u> E *называется число* $\min \widehat{E}$. *Обозначение:* $\sup E$.

2^0. *Точной нижней границей или* <u>*нижней гранью множества*</u> E *называется число* $\max \overset{\vee}{E}$. *Обозначение:* $\inf E$.

Теорема (о существовании граней). *Пусть* $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ *и* $E \neq \varnothing$. *Тогда существуют* $\sup E$ *и* $\inf E$.

Доказательство. Для доказательства существования верхней грани, т. е. $\min \widehat{E}$, применим аксиому Кантора-Дедекинда к множествам E и $\widehat{E}$ – они не пусты, содержатся в $\overline{\mathbb{R}}$ и первое расположено левее второго. Пусть c – разделяющая их точка: $\forall x \in E \quad \forall b \in \widehat{E} \quad x \leqslant c \leqslant b$. Левое неравенство показывает, что c – верхняя граница для E (число c не зависит от x), то есть $c \in \widehat{E}$. Из правого неравенства следует, что c – наименьший элемент в $\widehat{E}$. Таким образом, $c = \min \widehat{E}$. Доказательство существования $\inf E$ аналогично.

Теорема доказана.

По определению $\inf E, \sup E \in \overline{\mathbb{R}}$ и для любого $x \in E$ справедливо неравенство $\inf E \leqslant x \leqslant \sup E$. Поэтому в наиболее важном случае, когда $E \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, имеем $-\infty < \sup E$ и $\inf E < +\infty$. Для множества E, содержащего по крайней мере две точки, $\inf E < \sup E$.

Приняв естественное соглашение $\widehat{\varnothing} = \overset{\vee}{\varnothing} = \overline{\mathbb{R}}$, получим необычные равенства $\inf \varnothing = +\infty$ и $\sup \varnothing = -\infty$, в то время как для $\inf E \leqslant \sup E$ для любого непустого множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Подчеркнём, что в отличие от $\max E$ и $\min E$, которые существуют не для каждого множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, *гранями* $\sup E$ *и* $\inf E$ *обладает любое числовое множество* E. Если же $\max E$ существует, то $\sup E = \max E$, т. е. верхняя грань числового множества это естественное обобщение понятия максимума. Аналогично, если существует $\min E$, то $\inf E = \min E$.

Упражнение. 1^0. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $E = E_1 \cup E_2$. Докажите, что

$$\sup E = \max\{\sup E_1, \sup E_2\} \quad \text{и} \quad \inf E = \min\{\inf E_1, \inf E_2\}.$$

В частности, множество E ограничено лишь в том случае, когда ограниченны оба множества E_1 и E_2.

2^0. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $E = \cup_{\alpha \in A} E_\alpha$. Докажите, что

$$\sup E = \sup\{\sup E_\alpha |\ \alpha \in A\} \quad \text{и} \quad \inf E = \inf\{\inf E_\alpha |\ \alpha \in A\}.$$

Следует ли ограниченность множества E из ограниченности всех множеств E_α?

В дальнейшем нам часто придётся использовать описание граней с помощью неравенств. По определению верхней грани

$$\beta = \sup E \iff (\forall x \in E \quad x \leqslant \beta) \wedge (\forall b \in \widehat{E} \quad \beta \leqslant b).$$

Второе утверждение можно переформулировать так: любое число меньшее β не является верхней границей, т. е. $b < \beta \Rightarrow (\exists x_b \in E : \quad x_b > b)$. Таким образом, мы получаем

$$\beta = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leqslant \beta \\ \forall b < \beta \quad \exists x_b \in E \quad x_b > b \end{cases}.$$

Точка x_b, вообще говоря, зависит от b, но если существует $\max E$, то для всех $b < \beta\,(= \sup E = \max E)$ можно взять $x_b = \max E$.

Ясно, что $\sup E = +\infty$ лишь для неограниченного сверху множества. Если же E ограничено сверху и $E \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, то $\sup E \in \mathbb{R}$. Поскольку любое число меньшее конечного числа β можно записать в виде $\beta - \varepsilon, \varepsilon > 0$, конечную верхнюю грань ($\sup E \in \mathbb{R}$) можно следующим образом описать с помощью неравенств:

$$\beta = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leqslant \beta \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E \quad x_\varepsilon > \beta - \varepsilon. \end{cases}$$

Аналогично,

$$\alpha = \inf E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \geqslant \alpha \\ \forall a > \alpha \quad \exists x_a \in E \quad x_a < a. \end{cases}$$

При этом $\inf E = -\infty$ лишь для неограниченного снизу множества. Если же E ограничено снизу и $E \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, то $\inf E \in \mathbb{R}$ и в этом случае

$$\alpha = \inf E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \geqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E \quad x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

Используя понятия верхней и нижней грани, можно *доказать* следующие интуитивно понятные свойства множества $\mathbb{R}$.

1^0. Неограниченность натурального ряда. *Множество* $\mathbb{N}$ *не ограничено сверху.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда $\beta \overset{\text{def}}{=} \sup \mathbb{N} < +\infty$. Так как любое натуральное число не превосходит β, то $n + 1 \leqslant \beta$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $n \leqslant \beta - 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. число $\beta - 1$ – верхняя граница множества $\mathbb{N}$. Но тогда $\sup \mathbb{N}$, то есть наименьшая верхняя граница, не превосходит числа $\beta - 1 : \quad \beta = \sup \mathbb{N} \leqslant \beta - 1$, что невозможно.

2^0. Принцип Архимеда. *Пусть* $\Delta \in (0, +\infty)$. *Тогда для любого числа* $x \in \mathbb{R}$ *найдётся такой номер* $n \in \mathbb{N}$, *что* $n\Delta > x$.

Это не что иное, как переформулировка предыдущего утверждения: неравенство $n\Delta > x$ равносильно неравенству $n > \frac{x}{\Delta}$, а оно выполняется для достаточно больших номеров n, так как число $\frac{x}{\Delta}$ не является верхней границей множества $\mathbb{N}$.

3^0. Следующее утверждение лежит в основе доказательства теоремы о методе математической индукции (см. начало этого параграфа). *В непустом ограниченном снизу множестве целых чисел имеется наименьший элемент:*

$$(E \subset \mathbb{Z}) \wedge (E \neq \varnothing) \wedge (\exists a \in \mathbb{R} : \forall n \in E \quad n \geqslant a) \Longrightarrow (\exists \min E).$$

В частности, $(E \subset \mathbb{N}) \wedge (E \neq \varnothing) \Longrightarrow (\exists \min E)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \inf E$. Так как множество E ограничено снизу и непусто, то $\alpha \in \mathbb{R}$. Это наибольшая нижняя граница множества E. Следовательно, число $\alpha + 1$ не ограничивает E снизу: $\exists n_0 \in E \; n_0 < \alpha + 1$. Убедимся в том, что $n_0 = \min E$. Для этого достаточно показать, что целые числа меньшие n_0 не принадлежат E. Действительно, если $n \in \mathbb{Z}$ и $n < n_0$, то $n \leqslant n_0 - 1$. Поэтому $n < (\alpha + 1) - 1 = \alpha$, т. е. $n < \inf E$. Следовательно, $n \notin E$.

4^0. Существование целой части. *Для любого вещественного числа* x *существует такое целое число* n_x, *что* $n_x \leqslant x < n_x + 1$, *и это число единственно. Оно называется целой частью вещественного числа* x. *Обозначение* $n_x = [x]$.

Таким образом, $\forall x \in \mathbb{R} \; [x] \in \mathbb{Z}$ и $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

Число $x - [x]$ называется *дробной частью* вещественного числа x. Ясно, что она принадлежит промежутку $[0, 1)$.

Доказательство. Заметим сначала, что множество $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху, так как таково его подмножество $\mathbb{N}$. Поэтому $x < n+1$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$, т. е. множество $E = \{n \in \mathbb{Z} | \; x < n + 1\}$ не пусто. Оно ограничено снизу (например, числом $x - 1$) и содержится в $\mathbb{Z}$. Следовательно, существует $n_x = \min E$. Из определения E следует, что $n_x \in \mathbb{Z}$ и $x < n_x + 1$. В то же время $n_x - 1 < n_x = \min E$, и поэтому $n_x - 1 \notin E$, т. е. $x \geqslant (n_x - 1) + 1 = n_x$. Итак, существует такое целое число n_x, что $n_x \leqslant x < n_x + 1$. Его единственность очевидна: если $n \in \mathbb{Z}$ и $n > n_x$, то $n \geqslant n_x + 1$ откуда $n > x$ – не выполнено левое неравенство, а если $n \in \mathbb{Z}$ и $n < n_x$, то $n \leqslant n_x - 1$ откуда $n + 1 \leqslant x$ – не выполнено правое неравенство.

5^0. Плотность множества рациональных чисел. *Для любых чисел* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *найдётся такое рациональное число* $r \in \mathbb{Q}$, *что* $a < r < b$.

Отсюда сразу следует, что таких рациональных чисел бесконечно много.

Доказательство. Пользуясь неограниченностью натурального ряда сверху, возьмём такое число $q \in \mathbb{N}$, что $q > \frac{2}{b-a}$. Пусть $p = [qb] - 1$. Так как всегда $[x] \leqslant x < [x] + 1$, то $p + 1 \leqslant qb < p + 2$ или $\frac{p}{q} + \frac{1}{q} \leqslant b < \frac{p}{q} + \frac{2}{q}$. Поэтому $\frac{p}{q} < b$ и $\frac{p}{q} > b - \frac{2}{q} > b - (b - a) = a$, т. е. дробь $r = \frac{p}{q}$ принадлежит интервалу (a, b).

Определение. *Пусть* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

1^0. *Говорят, что функция* f *достигает в точке* $x^* \in X$ наибольшего значения, *если* $f(x) \leqslant f(x^*)$ *для всех* $x \in X$ *(т. е.* $f(x^*) = \max f(X)$*).*

2^0. *Говорят, что функция f достигает в точке $x_* \in X$ наименьшего значения, если $f(x) \geqslant f(x_*)$ для всех $x \in X$ (т. е. $f(x_*) = \min f(X)$).*

Вместо $\max f(X)$ обычно пишут $\max f$ или подробнее – $\max_X f$ и $\max_{x\in X} f(x)$. Аналогично, $\min f(X) = \min f = \min_X f = \min_{x\in X} f(x)$.

Не каждая функция имеет наибольшее или наименьшее значение. Такова, например, показательная функция $f(x) = 2^x$ на вещественной оси. Понятно, что если число $\max f$ (или $\min f$) существует, то оно единственно. Но это не значит, что оно достигается лишь в одной точке x^* (соответственно, x_*). Например, функция sin принимает свои наибольшее и наименьшее значения бесконечное число раз.

Нахождение наибольших и наименьших значений функций – классическая математическая задача. Но не во всех случаях её можно решить, поскольку не все функции принимают наибольшее (соответственно, наименьшее) значение. Кроме того, не всегда нужно знать эти величины – часто достаточно знать, что значения функции не выходят за пределы какого-то промежутка.

Определение. *Пусть $X \neq \varnothing$ и $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

1^0. *Функция f называется ограниченной сверху (соответственно, снизу) на множестве X, если множество $f(X)$ ограничено сверху (соответственно, снизу), т. е. существует конечная верхняя (соответственно, нижняя) граница $f(X)$: $\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \leqslant b$ (соответственно, $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \geqslant a$).*

2^0. *Функция f называется ограниченной на множестве X, если она ограничена и сверху, и снизу на X, т. е. существуют такие числа $a, b \in \mathbb{R}$, что $a \leqslant f(x) \leqslant b$ для всех $x \in X$.*

Замечания. 1^0. Если функция ограничена сверху или снизу, то таково и любое сужение этой функции. В частности, сужение ограниченной функции также ограничено.

2^0. Если обе функции $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ограничены сверху или снизу, то такова и их сумма $f + g$. В частности, сумма ограниченных функций также ограничена.

3^0. Если обе функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ ограничены, то таково и их произведение fg. Что можно сказать в случае односторонней (сверху или снизу) ограниченности сомножителей?

4^0. Ясно, что ограниченность функции на множестве X равносильна выполнению неравенства $|f(x)| \leqslant L$ для всех $x \in X$ (число $L \in (0, +\infty)$ зависит от функции, но не от точки $x \in X$). Иначе говоря, ограниченность функции равносильна ограниченности сверху её абсолютной величины.

Определение. *Пусть $X \neq \varnothing$ и $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Верхней (соответственно, нижней) гранью функции f на множестве X называется число $\sup f(X)$ (соответственно, $\inf f(X)$). Обозначение $\sup f$, $\sup_X f$ или $\sup_{x\in X} f(x)$ (соответственно, $\inf f$, $\inf_X f$ или $\inf_{x\in X} f(x)$).*

Если функция принимает наибольшее значение на множестве, то её верхняя грань совпадает с этим значением. Аналогично, если функция принимает наименьшее значение, то нижняя грань совпадает с ним. Таким образом, как и в случае числовых множеств, грани функции – обобщение понятий максимума и минимума функции. У этого обобщения есть очень ценное для нас свойство – *любая функция имеет верхнюю и нижнюю грани.*

Отметим полезные в дальнейшем описания граней функции с помощью неравенств. Они сразу вытекают из описаний граней числовых множеств.

$$B=\sup_X f \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in X\ f(x)\leqslant B\\ \forall b<B\ \exists x_b\in X\ f(x_b)>b,\end{cases} \qquad A=\inf_X f \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in X\ f(x)\geqslant A\\ \forall a>A\ \exists x_a\in X\ f(x_a)<a.\end{cases}$$

В частности, для конечных граней имеем

$$B=\sup_X f \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in X\ f(x)\leqslant B\\ \forall \varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon\in X\ f(x_\varepsilon)>B-\varepsilon,\end{cases} \qquad A=\inf_X f \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in X\ f(x)\geqslant A\\ \forall \varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon>0\ f(x_\varepsilon)<A+\varepsilon.\end{cases}$$

Теорема (свойства граней функций). *Пусть* $X\neq\varnothing$ *и* $f,g : X\to\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. *Тогда*

1^0. $\sup\limits_X (f+g)\leqslant \sup\limits_X f+\sup\limits_X g$; $\quad \inf\limits_X (f+g)\geqslant \inf\limits_X f+\inf\limits_X g$;

2^0. $\sup\limits_X (\lambda f)=\begin{cases}\lambda\sup_X f, & \text{если } \lambda>0,\\ \lambda\inf_X f, & \text{если } \lambda<0;\end{cases}$ $\quad \inf\limits_X (\lambda f)=\begin{cases}\lambda\inf_X f, & \text{если } \lambda>0,\\ \lambda\sup_X f, & \text{если } \lambda<0.\end{cases}$

В частности, $\sup_X(-f)=-\inf_X f$ *и* $\inf_X(-f)=-\sup_X f$.

Замечание. Здесь ради простоты формулировки рассматриваются функции, принимающие лишь конечные значения. Для функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ почти ничего не меняется. Нужно только оговорить в первом утверждении, что ни в какой точке множества X функции не принимают бесконечные значения разных знаков, т. е. сумма $(f+g)$ определена всюду на X. В доказательстве никаких изменений не требуется.

Доказательство. 1^0. Так как для любого $x\in X$

$$\inf_X f\leqslant f(x)\leqslant \sup_X f \quad \text{и} \quad \inf_X g\leqslant g(x)\leqslant \sup_X g,$$

то

$$A\overset{\text{def}}{=}\inf_X f+\inf_X g\leqslant f(x)+g(x)\leqslant \sup_X f+\sup_X g\overset{\text{def}}{=}B.$$

Поэтому число $B\in(-\infty,+\infty]$ – верхняя граница функции $(f+g)$ на множестве X, а число $A\in[-\infty,+\infty)$ – её нижняя граница. Следовательно, B не меньше наименьшей верхней границы функции $(f+g)$, т. е. $B\geqslant\sup_X(f+g)$. Аналогично, A не больше наибольшей нижней границы функции $(f+g)$, т. е. $A\leqslant\inf_X(f+g)$.

2^0. Ограничимся доказательством первого равенства (второе доказывается аналогично или легко сводится к нему). Так как $f(x)\leqslant\sup_X f$ для всех $x\in X$, то в случае $\lambda>0$ имеем $\lambda f(x)\leqslant\lambda\sup_X f$, т. е. число $\lambda\sup_X f$ – одна из верхних границ функции λf на множестве X. Поэтому $\sup_X(\lambda f)$ (наименьшая из таких границ) не превосходит числа $\lambda\sup_X f$:

$$\sup_X(\lambda f)\leqslant\lambda\sup_X f.$$

Для доказательства противоположного неравенства применим только что доказанное неравенство к функции (λf) (вместо f) и коэффициенту $\frac{1}{\lambda}$ (вместо λ) :

$$\sup_X f=\sup_X\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_X(\lambda f), \quad \text{т. е.} \quad \lambda\sup_X f\leqslant\sup_X(\lambda f).$$

Итак,
$$\sup_X (\lambda f) \leqslant \lambda \sup_X f \leqslant \sup_X (\lambda f), \quad \text{т. е.} \quad \lambda \sup_X f = \sup_X (\lambda f).$$

Пусть теперь $\lambda < 0$. Так как $f(x) \geqslant \inf_X f$, то $\lambda f(x) \leqslant \lambda \inf_X f$ для всех $x \in X$. Поэтому число $\lambda \inf_X f$ – верхняя граница функции (λf) на множестве X и, следовательно, $\sup_X (\lambda f) \leqslant \lambda \inf_X f$. С другой стороны, из неравенства $\lambda f(x) \leqslant \sup_X (\lambda f)$ получаем $f(x) \geqslant \frac{1}{\lambda} \sup_X (\lambda f)$ для всех $x \in X$. Поэтому $\inf_X f \geqslant \frac{1}{\lambda} \sup_X (\lambda f)$, откуда $\lambda \inf_X f \leqslant \sup_X (\lambda f)$. Итак, $\sup_X (\lambda f) \leqslant \lambda \inf_X f \leqslant \sup_X (\lambda f)$, т. е. $\sup_X (\lambda f) = \lambda \inf_X f$.

Теорема доказана.

Поскольку грани функции – это обобщение понятий наибольшего и наименьшего значений, из теоремы следуют и соответствующие свойства максимума и минимума функции (если они существуют!). Простые примеры показывают, что даже в таком, простейшем случае, в первом утверждении теоремы нельзя поставить знаки равенства. Например, если $X = [0, 1]$ и $f(x) = x, \ g(x) = 1 - x$, то
$$\sup_X f = \sup_X g = 1, \quad \inf_X f = \inf_X g = 0, \quad \sup_X (f + g) = \inf_X (f + g) = 1.$$

Упражнения. 1^0. Приведите пример функций $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, для которых $\max_{[0,1]} f$ и $\max_{[0,1]} g$ существуют, а сумма $(f + g)$ не имеет на $[0, 1]$ наибольшего значения.

2^0. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, причём существуют $F = \max_X f$ и $G = \max_X g$. Тогда
$$\Big(\exists \max_X (f + g) \wedge \max_X (f + g) = \max_X f + \max_X g\Big) \Longleftrightarrow f^{-1}(\{F\}) \cap g^{-1}(\{G\}) \neq \varnothing.$$

В каком случае $\min_X (f + g) = \min_X f + \min_X g$?

3^0. Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ ограничены сверху и $F = \sup_X f$, $G = \sup_X g$. Докажите, что
$$\sup_X (f + g) = \sup_X f + \sup_X g \Longleftrightarrow \forall \widetilde{F} < F \ \forall \widetilde{G} < G \quad \{x \in X \,|\, f(x) > \widetilde{F}\} \cap \{x \in X \,|\, g(x) > \widetilde{G}\} \neq \varnothing,$$
т. е.
$$\sup_X (f + g) = \sup_X f + \sup_X g \Longleftrightarrow f^{-1}((\widetilde{F}, +\infty)) \cap g^{-1}((\widetilde{G}, +\infty)) \neq \varnothing \quad \forall \widetilde{F} < F \quad \forall \widetilde{G} < G.$$

В каком случае $\inf_X (f + g) = \inf_X f + \inf_X g$?

4^0. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ и $f : \ X \to \overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что
$$\sup_{x \in X} f(x) = \max\{ \sup_{x \in X_1} f(x), \sup_{x \in X_2} f(x)\} \quad \text{и} \quad \inf_{x \in X} f(x) = \min\{ \inf_{x \in X_1} f(x), \inf_{x \in X_2} f(x)\}.$$

В частности, ограниченность функции f на множестве X равносильна её ограниченности на обоих множествах X_1 и X_2.

5^0. Пусть $X = \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ и $f : \ X \to \overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что
$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup_{\alpha \in A} \left(\sup_{x \in X_\alpha} f(x) \right) \quad \text{и} \quad \inf_{x \in X} f(x) = \inf_{\alpha \in A} \left(\inf_{x \in X_\alpha} f(x) \right).$$

Следует ли из ограниченности функции f на всех множествах X_α её ограниченность на X?

6^0. Пусть $f : \{1,\ldots,N\}\times\{1,\ldots,M\}\to\overline{\mathbb{R}}$ $(N, M\in\mathbb{N})$, т.е. $f_{n,m}\in\overline{\mathbb{R}}$ для всех $n=1,\ldots,N$ и $m=1,\ldots,M$. Докажите, что

$$\max_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ 1\leqslant m\leqslant M}} f_{n,m} = \max_{1\leqslant n\leqslant N}\left(\max_{1\leqslant m\leqslant M} f_{n,m}\right) = \max_{1\leqslant m\leqslant M}\left(\max_{1\leqslant n\leqslant N} f_{n,m}\right),$$

$$\min_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ 1\leqslant m\leqslant M}} f_{n,m} = \min_{1\leqslant n\leqslant N}\left(\min_{1\leqslant m\leqslant M} f_{n,m}\right) = \min_{1\leqslant m\leqslant M}\left(\min_{1\leqslant n\leqslant N} f_{n,m}\right).$$

Что больше

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}\left(\min_{1\leqslant m\leqslant M} f_{n,m}\right) \qquad \text{или} \qquad \min_{1\leqslant m\leqslant M}\left(\max_{1\leqslant n\leqslant N} f_{n,m}\right)?$$

7^0. Пусть $f : X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что

$$\sup_{X\times Y} f = \sup_{x\in X}\left(\sup_{y\in Y} f(x,y)\right) = \sup_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} f(x,y)\right),$$

$$\inf_{X\times Y} f = \inf_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} f(x,y)\right) = \inf_{y\in Y}\left(\inf_{x\in X} f(x,y)\right).$$

Что больше

$$\sup_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} f(x,y)\right) \qquad \text{или} \qquad \inf_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} f(x,y)\right)?$$