Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ
Поточечная и равномерная сходимость. Действия над рядами, связанные с предельным переходом

методические указания

О. Л. Семенова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2019

1. Числовые ряды

В этом разделе содержатся основные понятия и утверждения, связанные с числовыми рядами, необходимые при исследовании функциональных рядов.

Определение. *Числовым рядом* называется формальная бесконечная сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, обозначаемая $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. Сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ первых n членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *n-й частичной суммой*, или *частичной суммой порядка n* этого ряда, и обозначается S_n, т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Таким образом, каждому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ соответствует последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм. Обратно, каждой последовательности $\{A_n\}$ соответствует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_1{=}A_1, \qquad a_n{=}A_n{-}A_{n-1}, \quad n{\in}\mathbb{N}, \quad n{\geq}2,$$

частичными суммами которого являются члены данной последовательности. Поэтому каждое свойство последовательностей перефразируется в некоторое свойство рядов заменой характеристики членов последовательности соответствующей характеристикой членов ряда.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если сходится (имеет конечный предел) последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *расходящимся*, если последовательность $\{S_n\}$ расходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется его *суммой*, при этом пишут:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Критерий Коши сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что неравенство $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ справедливо для любой пары натуральных чисел n и p при условии $n > N$.

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, то последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм не убывает. Для неубывающей последовательности ее сходимость и ограниченность эквивалентны. Поэтому для рядов с неотрицательными членами — и только для них! — вместо слов „ряд сходится“ и „ряд расходится“ употребляют соответственно символы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Теорема сравнения. Пусть даны два ряда

$$A\ :\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad B\ :\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

удовлетворяющие условиям:

$$a_n \geq 0,\ b_n \geq 0,\ a_n \leq b_n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, из расходимости ряда A следует расходимость ряда B.

Следствие 1. Если $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, и $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие 2. Если $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ и $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Внимание! Если в ходе анализа ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, получена оценка

$$a_n \leq b_n,\ \text{или}\ a_n = O(b_n),\ n \to \infty,\ \text{или}\ a_n = o(b_n),\ n \to \infty,$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то такие оценки не дают возможности сказать, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, т.к. они неинформативны в вопросе о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $0 \leq q < 1$ и расходится при $q \geq 1$. Используя такой ряд, из теоремы сравнения можно вывести следующий признак.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, тогда:

если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится;

если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, в частности, если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, то ряд расходится.

На практике в основном применяется более слабое утверждение:

если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Признак Коши (радикальный). Пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, тогда:

если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сходится,

если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд расходится.

На практике в основном применяется более слабое условие:

если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Для последовательности $\{a_n\}$ с положительными членами из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и равенство этих двух пределов. Следовательно, если для ряда с положительными членами выполняется одно из двух условий признака Даламбера, то обязательно выполняется и соответствующее условие признака Коши. На практике отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ часто аналитически проще, чем радикал с переменным показателем $\sqrt[n]{a_n}$, поэтому легче применять признак Даламбера. В то же время область применения признака Коши шире, чем область применения признака Даламбера. В частности, для выполнения каждого из условий признака Даламбера необходима монотонность последовательности $\{a_n\}$, а условия признака Коши не требуют сравнения друг с другом соседних членов последовательности $\{a_n\}$.

Признак сравнения. Если для последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ существуют такие числа p и $C > 0$, что

$$a_n \sim \frac{C}{n^p}, \ n \to \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Признак Гаусса. Если для последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ существуют такие числа μ и $\varepsilon > 0$, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \ n \to \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\mu < -1$ и расходится при $\mu \geq -1$.

Интегральный признак Коши. Если $f : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$ — неотрицательная, невозрастающая, непрерывная функция, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ (а значит, и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$) сходится, то для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка:

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq r_n \leq \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)dx,$$

где $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если какой-либо числовой ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Признак Лейбница. Если последовательность положительных чисел $\{b_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ сходится, и его остаток $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ удовлетворяет неравенству $|r_n| \leq a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Признак Дирихле. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Если:

1) последовательность частичных сумм $\{A_n\}$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена;

2) последовательность $\{b_n\}$ монотонна;

3) последовательность $\{b_n\}$ сходится к нулю,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Абеля. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Если:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) последовательность $\{b_n\}$ монотонна;

3) последовательность $\{b_n\}$ ограничена,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Хотя в отличие от признака Лейбница в формулировке признаков Дирихле и Абеля формально не указано, что рассматриваемые ряды имеют члены разных знаков, но область их применения — именно знакопеременные ряды. Действительно, в силу условия монотонности члены последовательности $\{b_n\}$ в обоих этих признаках могут без ограничения общности считаться положительными. Если и члены последовательности $\{a_n\}$ неотрицательны, то ограниченность последовательности сумм $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентны, а так как при этом $a_n b_n = O(a_n)$, $n \to \infty$, то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ следует просто из признака сравнения. Если же в основе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ или ограниченности последовательности $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ лежит интерференция положительных и отрицательных членов последовательности $\{a_n\}$, то именно признаки Абеля и Дирихле позволяют установить сходимость соответствующих рядов.

Внимание! Делать вывод о сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ по поведению ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, можно только для ряда с неотрицательными членами!

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится в силу признака Лейбница, гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, следовательно, данный ряд расходится. В то же время

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty.$$

Итак, последовательность членов данного расходящегося ряда эквивалентна последовательности членов сходящегося ряда.

Пример 2. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Решение. Имеем: $\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos \left(\pi \frac{n^2}{n+1} - \pi n \right) = (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ по признаку Лейбница сходится, а последовательность $\{\cos \frac{\pi}{n+1}\}$ монотонна и ограничена, то исследуемый ряд по признаку Абеля также сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$ для всех $p > 0$.

Решение. Пользуясь формулой Тейлора-Маклорена с остатком в форме Пеано, получаем:

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{2n^{2p}} \right).$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, согласно признаку Лейбница, сходится при $p > 0$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{2n^{2p}}\right)$, сходится при $p > \frac{1}{2}$ по признаку сравнения, то данный ряд сходится только при $p > \frac{1}{2}$.

В силу соотношения $\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right| \sim \frac{1}{n^p}$ при $n\to\infty$ и второго следствия теоремы сравнения данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при $\frac{1}{2} < p \leq 1$ данный ряд сходится условно.

2. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой сходимости* функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, если эта точка входит в область определения каждой из функций последовательности и числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится.

Совокупность всех точек сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ называется *множеством сходимости* последовательности $\{f_n(x)\}$.

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой сходимости* функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, если эта точка входит в область определения каждой из функций последовательности $\{u_n(x)\}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится.

Совокупность всех точек сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *множеством сходимости* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

На множестве сходимости последовательности (ряда) определена функция:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \left(S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right).$$

Пример 4. Последовательность $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = n^x \ln n$ имеет своим множеством сходимости множество $M = (-\infty; 0)$ — отрицательную полуось — и сходится на M к нулю.

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Если $|x| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}} = |x| < 1.$$

Если $|x| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x|} \sqrt[n]{\frac{1}{1+x^{-2n}}} = \frac{1}{|x|} < 1.$$

Если $|x| = 1$, то $\left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \dfrac{1}{2}$.

В силу радикального признака Коши и необходимого условия сходимости ряда получаем, что множеством сходимости (абсолютной) данного ряда является множество $M = \{x,\ |x| \neq 1\}$ — числовая ось с выколотыми точками 1 и -1.

Определение. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве E и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся на множестве* E, если для любого положительного ε можно указать такой номер N, что условие

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in E$ и всех $n > N$.

Равномерная сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на множестве E обозначается: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся на множестве* E, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм равномерно сходится на E.

Другими словами, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность его остатков $\{r_n(x)\}$, $r_n(x)= \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, сходится к нулю равномерно на E.

Пример 6. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ на равномерную сходимость:
а) на множестве $E_1 = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$,
б) на множестве $E_2 = (-1; 1)$.

Заметим, что во всех точках интервала $(-1; 1)$ ряд сходится как геометрическая прогрессия и его остаток $r_k(x) = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} x^{2n}$ равен $\dfrac{x^{2k+2}}{1-x^2}$. Из того, что для всех $x \in E_1$ справедливо неравенство

$$0 \leq r_k(x) \leq \frac{1}{3 \cdot 4^k}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^k} = 0,$$

следует, что данный ряд сходится равномерно на множестве E_1.

Покажем, что последовательность $\{r_k(x)\}$ неравномерно сходится к нулю на множестве E_2, т.е. данный ряд неравномерно сходится на E_2. Для этого нужно указать такое положительное число ε_0, что для любого номера N найдутся натуральное число $k_N > N$ и точка $x_N \in E_2$, для которых $r_{k_N}(x_N) > \varepsilon_0$.

Действительно, для произвольного N положим:

$$k_N = N + 1 \quad \text{и} \quad x_N = 1 - \alpha(N), \quad 0 < \alpha(N) < 1.$$

Тогда, используя неравенство Бернулли

$$((1+t)^n > 1+tn \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t > -1),$$

получим, что

$$r_{N+1}(x_N) = \frac{(1-\alpha(N))^{2N+4}}{1-x_N^2} \geq 1 - 2(N+2)\alpha(N).$$

Отсюда видно, что если $\alpha(N) = \frac{1}{4(N+2)}$, то

$$r_{N+1}(x_N) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(т.е. в качестве ε_0 можно взять любое число из интервала $\left(0; \frac{1}{2}\right)$), что и требовалось доказать.

Критерий Коши равномерной сходимости последовательности. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

справедливо для всех точек x множества E и любой пары натуральных чисел n и m при условии $n, m > N$.

Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве E тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что неравенство $\left| \sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$ справедливо для всех точек x множества E и любой пары натуральных чисел n и p при условии $n > N$.

Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве E, то последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к нулю равномерно на множестве E.

Внимание! Последнее условие не является достаточным.

На практике удобно пользоваться следующим критерием — фактически переформулировкой определения равномерной сходимости последовательности.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Пример 7. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$,

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx.$$

Если $x > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi x}{2}$;

если $x < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\frac{\pi x}{2}$; $f_n(0) = 0$ для всех n.

Следовательно, множеством сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ является вся числовая ось $\mathbb{R}$ и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}|x|$.

Оценим $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\pi}{2}|x| - x \operatorname{arctg} nx\right|$.

В силу четности функций $y = x \operatorname{arctg} nx$, $y = \frac{\pi}{2}|x|$ и неравенств $|\operatorname{arctg} nx| < \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arctg} \alpha| \le |\alpha|$ получаем:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\pi}{2}|x| - x \operatorname{arctg} nx\right| = \sup_{x\ge 0} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right) =$$

$$= \sup_{x\ge 0}(x \operatorname{arcctg} nx) = \sup_{x\ge 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{nx} \le \frac{1}{n}.$$

Из последнего вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$, и, значит, последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к $\frac{\pi}{2}|x|$.

Пример 8. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$,

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} nx.$$

Как в предыдущем примере, получаем, что эта последовательность сходится на всей числовой оси и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$. Так как

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x\right| = \sup_{x>0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right) \ge$$

$$\ge \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ неравномерно сходится к функции $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$ на $\mathbb{R}$.

Следующие утверждения немедленно следуют из определения равномерной сходимости.

1. Если последовательности (ряды)

$$\{f_n(x)\} \text{ и } \{g_n(x)\} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\right)$$

равномерно сходятся на множестве E, то любая их линейная комбинация

$$\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n(x) + \beta v_n(x))\right),$$

где α и β — постоянные, равномерно сходится на E.

2. Если последовательность (ряд) сходится равномерно на множестве E, то сходимость будет равномерной и на любом множестве $E_1 \subset E$.

3. Если последовательность (ряд) равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2, то на множестве $E = E_1 \cup E_2$ эта последовательность (ряд) сходится равномерно. Внимание! Это утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.

Если для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $|u_n(x)| \leq a_n$ для всех $x \in E$ и $n \in \mathbb{N}$ (мажорантный ряд), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве E.

Область применения признака Вейерштрасса — исследование сходимости абсолютно сходящихся, в частности, знакопостоянных рядов.

Пример 9. Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+3x^{-n}}{n!}$ равномерно сходится на промежутке $[\frac{1}{2}; 2]$.

Первое слагаемое в сумме $x^n + 3x^{-n}$ принимает наибольшее значение в точке $x_1 = 2$, второе — в точке $x_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, для всех $x \in [\frac{1}{2}; 2]$ справедливо соотношение $0 \leq \frac{x^n+3x^{-n}}{n!} \leq \frac{4 \cdot 2^n}{n!}$, и в силу признака Вейерштрасса заключаем, что данный ряд сходится равномерно на промежутке $[\frac{1}{2}; 2]$.

Внимание! Из соотношения $u_n(x) \sim v_n(x), n \to \infty$, вообще говоря, не следует одновременная равномерная или неравномерная сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ даже при условии $u_n(x) \geq 0, v_n(x) \geq 0$.

Следующий пример иллюстрирует последнее замечание.

Пример 10. Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x^2+n^2)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$. С одной стороны, $\frac{x}{n(x^2+n^2)} \sim \frac{x}{n^3}$, $n \to \infty$. С другой стороны, неравенство

$$\left|\frac{x}{n(x^2+n^2)}\right| = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|xn|}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{2n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

в силу признака Вейерштрасса показывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x^2+n^2)}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, а соотношение $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n^3} = +\infty$ — что последовательность $\{\frac{x}{n^3}\}$ неравномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}$, и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3}$ неравномерно сходится на $\mathbb{R}$.

Пример 11. Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ равномерно сходится на промежутке $[0; 1]$.

Решение. Поскольку $\sup\limits_{x\in[0;1]} x^2 = 1$ и $\sup\limits_{x\in[0;1]} e^{-nx} = 1$, то оценка

$$\sup_{x\in[0;1]} x^2e^{-nx} \leq \sup_{x\in[0;1]} x^2 \cdot \sup_{x\in[0;1]} e^{-nx} = 1$$

не дает сходящегося мажорантного ряда. Найдем $\sup\limits_{x\in[0;1]} x^2e^{-nx}$.

Поскольку $(x^2e^{-nx})' = x \cdot e^{-nx}(2 - nx)$, то

$$\sup_{x\in[0;1]} x^2e^{-nx} = x^2e^{-nx}\Big|_{x=\frac{2}{n}} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2n^2},$$

следовательно, $0 \leq x^2e^{-nx} \leq \dfrac{4}{e^2n^2}$, $\forall\ x \in [0;1]$, и в силу признака Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно на отрезке $[0;1]$.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве E, если существует такая константа M, что неравенство $|f_n(x)| \leq M$ справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in E$.

Признак Дирихле. Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ могут быть представлены в виде

$$u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x),$$

где

1) последовательность частичных сумм $\{A_n(x)\}$,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N},$$

ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничена на множестве E;

2) для каждого $x_0 \in E$ последовательность $\{b_n(x_0)\}$ монотонна (относительно параметра n);

3) последовательность $\{b_n(x)\}$ сходится к нулю равномерно на E,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Признак Абеля. Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ могут быть представлены в виде $u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x)$, где

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве E;

2) для каждого $x_0 \in E$ последовательность $\{b_n(x_0)\}$ монотонна (относительно параметра n);

3) последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на E,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Так же, как и для числовых рядов, область применения признаков Абеля и Дирихле — неабсолютно сходящиеся ряды. При исследовании конкретных рядов с помощью этих признаков монотонность последовательности $\{b_n(x)\}$ относительно параметра n часто не требует особого анализа — она очевидна. Но грубой (и частой!) ошибкой является пропуск указания на то, что это условие выполнено.

Внимание! Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Дирихле и Абеля — достаточные. Для утверждения, что данный ряд сходится неравномерно, обычно опираются или на критерий Коши, или на его следствие — необходимый признак равномерной сходимости.

Пример 12. Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ на равномерную сходимость:
а) на интервале $(\varepsilon;2\pi-\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\pi$;
б) на интервале $(0;2\pi)$.
Решение. а) Так как

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\quad \forall\ x\ne 2\pi k,\quad \forall\ N\in\mathbb{Z},$$

то для всякого $x\in(\varepsilon;2\pi-\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|\le\frac{1}{|\sin\frac{\varepsilon}{2}|}\le\frac{\pi}{\varepsilon}.$$

Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ монотонно сходится к нулю при $n\to\infty$. А поскольку эта последовательность числовая, то сходимость равномерна на любом множестве, в том числе и на $(\varepsilon;2\pi-\varepsilon)$. Итак, в силу признака Дирихле на интервале $(\varepsilon;2\pi-\varepsilon)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно.

б) На интервале $(0;2\pi)$ приведенное в пункте а) рассуждение уже неприменимо, так как оценка $\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ не дает возможности равномерно ограничить последовательность $\{\sum_{k=1}^{n}\sin kx\}_{n=1}^{\infty}$ на $(0;2\pi)$. Эта оценка дает только возможность утверждать, что для любого фиксированного $x\in(0;2\pi)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится, т.е. интервал $(0;2\pi)$ входит в множество сходимости рассматриваемого ряда.

Пользуясь критерием Коши, покажем, что на $(0;2\pi)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ сходится неравномерно, т.е. можно указать такое число ε, что для любого номера N найдутся такие значения $n>N$, $p\in\mathbb{N}$ и $x_n\in(0;2\pi)$, что

$$\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\sin kx_n}{k}\ge\varepsilon.$$

Прежде всего подберем $x_n\in(0;2\pi)$ так, чтобы на достаточно большом промежутке изменения k: $n\le k\le n+p$ величина $\sin kx_n$ была отделена от нуля. Если взять $x_n=\frac{\pi}{6n}$, то для $n\le k\le 5n$ будет справедливым неравенство $\sin kx_n\ge\frac{1}{2}$. Положим $\varepsilon=\frac{2}{5}$ и для произвольного номера N положим $n=N+1$ и $p=4n$.

Тогда
$$\sum_{k=n}^{5n}\frac{\sin kx_n}{k}\geq\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{5n}\frac{1}{k}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5n}\cdot 4n=\frac{2}{5},$$
следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится неравномерно на $(0;2\pi)$.

Внимание! Иногда при применении признака Дирихле из неравенства
$$0\leq b_n(x)\leq\beta_n,\quad\forall\quad x\in E,$$
где $\{\beta_n\}$ — монотонная бесконечно малая последовательность, делается совершенно необоснованный вывод о монотонности последовательности $\{b_n(x)\}$ относительно n. Это является грубой ошибкой.

Из критерия Коши выводится следующее утверждение.

Пусть члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ непрерывны на замкнутом множестве F и ряд сходится равномерно на множестве внутренних точек множества F. Тогда этот ряд сходится равномерно на F.

Это утверждение позволяет в некоторых случаях установить неравномерную сходимость ряда. К примеру, если рассматривается ряд, члены которого непрерывны на замкнутом множестве F, но ряд расходится в некоторой граничной точке множества F, то тогда ряд сходится неравномерно на множестве внутренних точек F.

Пример 13. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$:

а) на луче $(\varepsilon;+\infty)$, $\varepsilon>0$;

б) на луче $(0;+\infty)$.

Решение. а) если $x\in(\varepsilon;+\infty)$, $\varepsilon>0$, то
$$0\leq\frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{nx}\leq\frac{1}{n^2x}\leq\frac{1}{n^2\varepsilon},$$
следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$ сходится равномерно на $(\varepsilon;+\infty)$, $\varepsilon>0$;

б) В силу произвольности числа $\varepsilon>0$ и неравенства
$$0\leq\frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}\leq\frac{1}{n^2\varepsilon}$$
приходим к выводу, что луч $(0;+\infty)$ входит в множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$. Поскольку все члены этого ряда непрерывны на $[0;+\infty)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg} 0}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ расходится, заключаем, что на луче $(0;+\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}$ сходится неравномерно.

3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов, связанные с предельным переходом

При вычислении повторного предела результат может зависеть от порядка, в котором вычисляются однократные пределы. Так, сумма сходящегося ряда непрерывных функций, вообще говоря, не является непрерывной функцией; от перемены порядка, в котором производятся два действия — предельный переход и интегрирование (или предельный переход и дифференцирование), может измениться результат этих действий. Теоремы этого раздела показывают, что, тем не менее, при определенных условиях, одним из которых является равномерная сходимость, значение повторного предела не зависит от порядка переменных, по которым осуществляется предельный переход.

Отметим, что все три теоремы — о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости предела последовательности (суммы ряда) — дают только достаточные условия того, что предельная функция (сумма ряда) обладает соответствующими свойствами.

Теорема о непрерывности предела последовательности (суммы ряда). Если все члены последовательности (ряда) непрерывны на некотором множестве и последовательность (ряд) сходится равномерно на этом множестве, то предельная функция (сумма ряда) непрерывна на этом множестве.

Обращением (с некоторыми дополнительными условиями) теоремы о непрерывности предельной функции (суммы ряда) является теорема Дини.

Теорема Дини для последовательностей. Если все функции последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны на компакте K, последовательность монотонна относительно n и функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ определена и непрерывна на K, то $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на K.

Теорема Дини для рядов. Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны и неотрицательны на компакте K и на этом компакте ряд сходится к непрерывной функции $S(x)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на K.

Пример 14. Определим область существования функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_n(x) = n^2x^2e^{-n^2x^2}$, и исследуем ее на непрерывность.

Так как для всех $n \in \mathbb{N}$ функция $u_n(x)$ является четной и $u_n(0)$=0, а для всех $x \neq 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^2e^{-n^2x^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} x^{\frac{2}{n}} e^{-nx^2} = 0,$$

то функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, является четной и $f(0) = 0$. Так как $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} u_n(x) \geq u_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}$, то на $\mathbb{R}$ не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда — последовательность $\{u_n(x)\}$ неравномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на $\mathbb{R}$ и его сумма $f(x)$ не обязана быть непрерывной на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим луч $E_m = \left(\frac{1}{m}, +\infty\right)$, $m \in \mathbb{N}$.

Так как $u_n'(x) = 2n^2x \cdot (1 - n^2x^2)e^{-n^2x^2}$, то для $n > m$ и $x \in E_m$ справедливо соотношение

$$0 \leq u_n\left(x\right) \leq u_n\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n^2}{m^2}e^{-\frac{n^2}{m^2}},$$

следовательно, на луче E_m ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ из непрерывных функций сходится равномерно. Отсюда получаем, что функция $f(x)$ непрерывна на каждом луче E_m, а значит, на их объединении — луче

$$(0; +\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Проверим, что в точке $x_0 = 0$ функция $f(x)$ является разрывной. Действительно, в рассматриваемом ряде члены непрерывны и неотрицательны на отрезке $[-1; 1]$. Если бы функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ была непрерывна на этом отрезке, то ряд сходился бы на нем равномерно. Но отсутствие равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на промежутке $[-1; 1]$ было установлено, а других точек разрыва, кроме $x_0 = 0$, функция $f(x)$ на $[-1; 1]$ не имеет.

Теорема о почленном интегрировании последовательности (ряда). Если все члены последовательности $\{f_n(x)\}$ (ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) интегрируемы в смысле Римана на отрезке $[a; b]$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) сходится равномерно на $[a; b]$, то

1) функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ($S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) интегрируема на промежутке $[a; b]$,

2) $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ на $[a; b]$ ($\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$ на $[a; b]$) для любого $x_0 \in [a; b]$, в частности,

$$\int\limits_a^b f_n(t)dt \to \int\limits_a^b f(t)dt \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(t)dt \to \int\limits_a^b S(t)dt\right).$$

Теорема о почленном дифференцировании последовательности (ряда). Предположим, что

1) все члены последовательности $\{f_n(x)\}$ (ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) дифференцируемы на $[a; b]$,

2) последовательность $\{f_n'(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$) сходится равномерно на $[a;b]$,

3) последовательность $\{f_n(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a;b]$.

Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) сходится равномерно на $[a;b]$ к дифференцируемой на $[a;b]$ функции и

$$\begin{matrix} \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \\ \left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\right) \end{matrix} \quad \text{для всех } x \in [a;b].$$

Пример 15. Определить область существования, исследовать на непрерывность и дифференцируемость функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) = \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} n^2x^2$.

Решение. Все функции $u_n(x)$ непрерывны и дифференцируемы на $\mathbb{R}$. Так как $|u_n(x)| \le \frac{\pi}{2n^2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим „формально продифференцированный ряд“:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), \text{ где } v_n(x) = u_n'(x) = \frac{2x}{1+n^4x^4}.$$

Так как $v_n(0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $v_n(-x) = -v_n(x)$ и

$$|v_n(x)| = \frac{2|x|}{1+n^4x^4} \sim \frac{2}{n^4|x^3|}, \quad n \to \infty,$$

для всех $x \ne 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ абсолютно сходится на $\mathbb{R}$ к нечетной функции $v(x)$.

Пусть $\frac{1}{n+1} \ge x > \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $n \le k \le 2n$ справедливы неравенства:

$$kx \le \frac{2n}{n+1} \le 2; \quad 1 + k^4x^4 \le 17;$$

$$\sum_{k=n}^{2n} v_k(x) > \sum_{k=n}^{2n} \frac{2}{17 \cdot 2n} = \frac{n+1}{17 \cdot n} > \frac{1}{17}.$$

Отсюда получаем, что, во-первых, в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится на $[-1;1]$ неравномерно, во-вторых, $v(x) > \frac{1}{17}$ для всех $x > 0$ и $v(x) < -\frac{1}{17}$ для всех $x < 0$. Итак, на отрезке $[-1;1]$ не выполнены условия теоремы о почленном дифференцировании ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Возьмем луч $E_m = \left(\frac{1}{m}; +\infty\right)$. Для всех $x \in E_m$ справедливо неравенство

$$0 \leq v_n(x) = \frac{2x}{1+n^4x^4} = \frac{2n^2x^2}{1+n^4x^4} \cdot \frac{1}{n^2x} \leq \frac{m}{n^2},$$

откуда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится на E_m равномерно. Итак, на E_m выполнены условия теоремы о почленном дифференцировании ряда, следовательно, функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ дифференцируема на E_m и $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ для всех $x \in E_m$. Пользуясь локальностью дифференцирования и равенством $(0; +\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, получаем, что $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) = v(x)$ для всех $x > 0$, а в силу четности $f(x)$ и нечетности $v(x)$ это равенство верно и для $x < 0$.

Теперь можно показать, что $f(x)$ недифференцируема в точке x_0=0. Действительно, в противном случае $f(x)$ была бы дифференцируема на интервале $(-1; 1)$, причем $f'(x) = v(x)$ для $x \neq 0$. Но функция $f'(x)$ как точная производная должна обладать свойством Дарбу — ее значения должны заполнять промежуток между любыми двумя значениями $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, $x_1, x_2 \in (-1; 1)$, а это условие противоречит полученным выше неравенствам:

$$f'(x) = v(x) > \frac{1}{17}, \quad 0 < x < 1;$$

$$f'(x) = v(x) < -\frac{1}{17}, \quad -1 < x < 0.$$

Список литературы

1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н. , Садовничий В. А. *Задачи и упражнения по математическому анализу.* Т. 2. — М. : Высшая школа, 2000. — 712 с.
2. Кудрявцев Л. Д. *Математический анализ.* Т. 1. — М. : Высшая школа, 1970. — 592 с.
3. Ляшко И. И. , Боярчук А. К. , Гай Я. Г. , Головач Г. П. *Математический анализ в примерах и задачах.* Т.2 — Киев: Вища школа, 1977. — 672 с.