Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий

по теории функций комплексной переменной

часть 2

Ряды и интегралы: вводные задачи

О. Л. Семенова, А. Г. Савельева

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2019

1 Интеграл

Путем γ называется непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ вещественной оси в $\mathbb{C}$; образ $\gamma([\alpha, \beta])$ данного отображения называется *носителем* (или *траекторией*) пути γ; точки $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\beta)$ называются соответственно *началом* и *концом пути*. Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется:

– *замкнутым*, если начало пути совпадает с его концом;

– *жордановым*, если отображение $\gamma(t)$ взаимно однозначно;

– *замкнутым жордановым*, если он является замкнутым и для всякой точки $c \in (\alpha, \beta)$ сужение отображения $\gamma(t)$ на промежуток $[\alpha, c]$ является жордановым;

– *гладким*, если производная отображения $\gamma(t)$ существует, непрерывна и не обращается в нуль (под производной отображения $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ в точке $t \in (\alpha, \beta)$ понимается $x'(t)+iy'(t)$, а в концах отрезка — такая же комбинация соответствующих односторонних производных);

– *кусочно-гладким*, если $[\alpha, \beta]$ можно разбить на конечное множество (замкнутых) отрезков таких, что сужение $\gamma(t)$ на каждый из этих отрезков определяет гладкий путь.

Два кусочно-гладких пути $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ называют *эквивалентными*, если существует такая непрерывно дифференцируемая и сюръективная функция $\tau : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$, что условия $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ и $\gamma'(t) > 0$ выполняются для всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Класс эквивалентных кусочно-гладких путей называется *кусочно-гладкой кривой*. *Замкнутой кривой* называется класс эквивалентных путей, хотя бы один из представителей которого является замкнутым путем.

Довольно часто кривую отождествляют с парой, которую образуют: 1) множество A, представимое как носитель некоторого пути; 2) направление на множестве A (порядок обхода точек этого множества).

Пусть даны кусочно-гладкий путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, и непрерывная на носителе данного пути комплекснозначная функция $f(z)$. *Интегралом от функции $f(z)$ вдоль пути γ* называется

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt, \tag{1.1}$$

при этом интеграл по промежутку $[alpha; \beta]$ от комплекснозначной функции $g(t) = u(t) + iv(t)$ вещественной переменной t понимается как $\int_{\alpha}^{\beta} u(t)\, dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, dt$.

Перечислим некоторые элементарные свойства интеграла вдоль пути.

1) Линейность относительно подынтегральной функции. Для произвольных непрерывных на носителе пути функций f и g и любых постоянных $A, B \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\gamma} (Af(z) + Bg(z))\, dz = A \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz + B \int\limits_{\gamma} g(z)\, dz.$$

2) Аддитивность относительно пути. Для произвольной точки $c \in (\alpha, \beta)$ пусть $\gamma-$ и $\gamma+$ обозначают сужения отображения $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ на отрезки $[\alpha, c]$ и $[c, \beta]$ соответственно. Тогда для всякой непрерывной на носителе пути γ функции $f(z)$

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma-} f(z)\, dz + \int\limits_{\gamma+} f(z)\, dz.$$

3) Инвариантность. Если пути γ_1 и γ_2 эквивалентны, то для всякой функции $f(z)$ непрерывной на носителе каждого из этих путей

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

т. о., определение интеграла, данное для пути, имеет смысл и для кривой.

4) Независимость интеграла по замкнутой кусочно-гладкой кривой от выбора начальной точки этой кривой.

Пример 1. Найти интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} (z-a)^n\,dz,$$

где Γ — окружность $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-a| = r\}$, m раз обходимая против часовой стрелки, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Решение. Путь $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi m]$, осуществляет заданный обход окружности, поэтому искомый интеграл совпадает с интегралом вдоль пути γ. Применим (1.1):

$$I = \int\limits_{\gamma} (z-a)^n\,dz, = \int\limits_{0}^{2\pi m} (\gamma(t)-a)^n \gamma'(t)\,dt, = \int\limits_{0}^{2\pi m} (re^{it})^n ire^{it}\,dt.$$

Далее удобно рассмотреть два случая.

1) если $n \neq -1$, то

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi m} ir^{n+1} e^{i(n+1)t}\,dt = \frac{re^{i(n+1)t}}{n+1}\Big|_{0}^{2\pi m} = 0$$

вследствие периодичности показательной функции.

2) $n = -1$, тогда

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi m} r^{-1} e^{-it} ire^{it}\,dt = i\int_{0}^{2\pi m} dt = 2\pi m i,$$

в частности, при однократном обходе кривой $I = 2\pi i$.

Область $O \subset \widehat{\mathbb{C}}$ назовем *кусочно-гладкой*, если ее $\widehat{\mathbb{C}}$-граница представима в виде конечного объединения попарно непересекающихся носителей замкнутых жордановых кусочно-гладких путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Граница такой области считается *ориентированной стандартно*, если каждый из путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ обходит соответствующий участок границы так, что область остается слева; стандартно ориентированная граница области O далее обозначается ∂O.

В условиях последнего определения интегралом по стандартно ориентированной границе ∂O от функции $f(z)$ называется

$$\int\limits_{\partial O} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz \tag{1.2}$$

(при условии, что функция непрерывна на границе области O).

Далее в задачах, связанных с интегрированием по замкнутой кривой, если иное не оговорено специально, эта кривая рассматривается как стандартно ориентированная граница области, не содержащей бесконечно удаленную точку. Возникающая при этом ориентация кривой называется *положительной*.

Задачи

1.1. Вычислить интегралы $I_1 = \int_\Gamma x\,dz$, $I_2 = \int_\Gamma y\,dz$ по следующим кривым Γ:
1) по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ с началом пути в точке $z = 1$;
3) по окружности $|z - a| = R$.

Ответы:
1) $I_1 = 2 + i$, $I_2 = 1 + \frac{i}{2}$; 2) $I_1 = \frac{i\pi}{2}$, $I_2 = -\frac{\pi}{2}$; 3) $I_1 = i\pi R^2$, $I_2 = -\pi R^2$.

1.2. Вычислить интеграл $\int_\Gamma |\,z\,|\,dz$ по следующим кривым Γ:
1) по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ с началом пути в точке $z = 1$;
3) по полуокружности $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ с началом пути в точке $z = -i$;
4) по окружности $|z| = R$.

Ответы: 1) $\sqrt{5}\left(1 - \frac{i}{2}\right)$; 2) 2; 3) $2i$; 4) 0.

1.3. Вычислить интеграл $\int_{\partial O} |z|\,\bar{z}\,dz$, где O – верхний полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$. *Ответ:* πi.

1.4. Вычислить интеграл $\int_\Gamma \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, где Γ — граница полукольца $1 \leq$ $\leq |z| \leq 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$. *Ответ:* $\frac{4}{3}$.

Голоморфная в области O функция $F(z)$ называется *первообразной* функции $f(z)$ в этой области, если равенство $F'(z) = f(z)$ верно в каждой точке $z \in O$.

Если $F(z)$ является первообразной функции $f(z)$ в области O, то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \to O$ (носитель которого содержится в O)

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)), \tag{1.3}$$

т. е. значение интеграла зависит лишь от начальной и конечной точек пути интегрирования.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_\Gamma \sin 3z\,dz$, где Γ — нижняя полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \le 0$ с началом пути в точке $z=1$.

Решение. Функция $-\frac{\cos 3z}{3}$ является первообразной функции $\sin 3z$ во всей комплексной плоскости, значит формула (1.3) применима.

$$\int\limits_\Gamma \sin 3z\,dz = -\frac{\cos 3z}{3}\Big|_1^{-1} = 0,$$

последнее равенство верно в силу четности косинуса.

Задача 1.5. Вычислить интеграл $\int_\gamma ze^{iz}\,dz$, где $\gamma(t) = a(t-\sin t + +i(1-\cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$, $a>0$ (путь по арке циклоиды).

Ответ: $(1-i2\pi a)\,e^{i2\pi a}-1$.

Задача 1.6. Вычислить интеграл $\int_\Gamma \cos 2z\,dz$, где Γ — заданная в полярных координатах кривая $r = 1+\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ (дуга кардиоиды), пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Ответ: $-\frac{1}{2}(\sin 4 + i\operatorname{sh} 2)$.

Интегральная теорема Коши. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $U \subseteq \mathbb{C}$, кусочно-гладкая область O вместе со своей границей содержится в U. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{\partial O} f(z)\,dz = 0.$$

Интегральная формула Коши. В условиях последней теоремы для произвольной точки $z_0 \in O$ справедливо равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial O}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I = \int_\Gamma \frac{(z-1)\cos(\sin z) + (z-3)\sin(\cos z)}{z^2-4z+3}\,dz,$$

где Γ — положительно ориентированная окружность $|z-1|=1$.

Решение. Воспользовавшись разложением знаменателя подынтегральной функции на множители $z^2-4z+3 = (z-1)(z+3)$, имеем $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_\Gamma \frac{\cos(\sin z)}{z-3}\,dz \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int_\Gamma \frac{\sin(\cos z)}{z-1}\,dz.$$

Функция $f_1(z) = \frac{\cos(\sin z)}{z-3}$ голоморфна в круге O, ограниченном окружностью Γ, и вследствие интегральной теоремы Коши

$$I_1 = \int_{\partial O} f_1(z)\,dz = 0.$$

Функция $f_2(z) = \sin(\cos z)$ также голоморфна в круге O, поэтому применима интегральная формула Коши:

$$I_2 = \int_{\partial O} \frac{f_2(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i\ f_2(1) = 2\pi i \sin(\cos 1),$$

откуда $I = 2\pi i \sin(\cos 1)$.

Задача 1.7. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$, если:
1) точка $3i$ лежит внутри конура C, а точка $-3i$ вне его;
2) точка $-3i$ лежит внутри конура C, а точка $3i$ вне его;
3) точки $\pm 3i$ лежат внутри конура C.

Ответы: 1) $\frac{\pi}{3}$, 2) $-\frac{\pi}{3}$, 3) 0.

Задача 1.8. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$, $a > 1$.

Ответ: $\frac{\pi i}{2}$.

Задачи для самостоятельной работы

1.9. Вычислить интегралы:
1) $\int_\Gamma 3z + 2\,dz$, где Γ — правая полуокружность $|z+1| = 1$ с началом пути в точке $z = i - 1$;
2) $\int_\Gamma 2z+3\bar{z}\,dz$, где Γ — меньшая из двух дуг окружности $|z| = 1$, соединяющих точки 1 и i;
3) $\int_\Gamma (4+i)(2z-1)\,dz$, где Γ — ломаная ABC, $A = 0$, $B = 1+i$, $C = 2$;
4) $\int_\Gamma e^{3iz} + 2\bar{z}\,dz$, где Γ — отрезок прямой, соединяющей точки $1+i$ и $i-1$;
5) $\int_\Gamma 4|z| + e^{z^2}\,dz$, где Γ — окружность $|z| = 1$;
6) $\int_\Gamma \bar{z} + z\,dz$, где Γ — ломаная ABC, $A = 1$, $B = i$, $C = -1$;
7) $\int_\Gamma (z-1)(\bar{z}-1)\,dz$, где Γ — верхняя полуокружность $|z| = 1$;
8) $\int_\Gamma \cos(z^3 + z - 1)\,dz$, где Γ — ломаная $ABCDA$, $A = 1$, $B = i$, $C = -1$, $D = -i$;
9) $\int_\Gamma 2z\,dz$, где Γ — дуга положительно ориентированной окружнос-ти $|z| = 2$, определяемая неравенством $\operatorname{Im} z \geq 1$;
10) $\int_\Gamma z^2\,dz$, где Γ — дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

2 Степенные ряды

Всякая функция $f(z)$, голоморфная в каком либо-круге $\{z : |z-z_0|<R\}$, разлагается в сходящийся в этом круге степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n определяются формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{2.1}$$

или

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad r < R. \tag{2.2}$$

Этот степенной ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$ в окрестности точки z_0, в случае $z_0 = 0$ данный ряд называется также *рядом Маклорена* функции $f(z)$.

Справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \operatorname{ch} z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{array}\right\} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}; \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{c} \ln(1+z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}, \quad (1+z)^p = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \frac{z^k}{(k)!}, \\ \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \frac{1}{1+z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \end{array}\right\} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}\ : |z| < 1; \tag{2.4}$$

в разложении функции $(1+z)^p$ для произвольного комплексного p

$$\binom{p}{k} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}, & \text{если } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Формула (2.1) (и, тем более, (2.2)) далеко не всегда позволяет эффективно вычислить коэффициенты c_n. Для эффективного вычисления этих коэффициентов существует ряд приемов.

При разложении рациональных функций в ряд Тейлора разлагаемую функцию бывает полезно разложить на сумму более простых дробей (стремиться к полному разложению на простейшие дроби не обязательно).

В некоторых случаях рациональную функцию можно упростить при помощи умножения числителя и знаменателя на подходящий сомножитель.

При разложении в ряд Тейлора комбинаций из показательных и тригонометрических функций часто полезно преобразовать разлагаемую функцию в комбинации только тригонометрических функций.

Имеется еще один весьма эффективный прием разложения функции в ряд Тейлора. Он состоит в использовании метода неопределенных коэффициентов, отыскиваемых с помощью тех или иных соотношений, которым удовлетворяет разлагаемая функция. Простейшим примером применения этого приема является задача об отыскании коэффициентов ряда Тейлора отношения двух функций, ряды Тейлора которых известны.

Пример 1. Найти разложение функции e^{4z+3i} в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$.

Решение. Пусть $\zeta = z-1$ (при этом $z = \zeta+1$). Тогда $e^{4z+3i} = e^{4\zeta+a}$, где $a = 4+3i$. Найдем разложение $e^{4\zeta+a}$ по степеням ζ, используя разложение экспоненты (2.3):

$$e^{4\zeta+a} = e^a e^{4\zeta} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4\zeta)^k}{k!} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k \zeta^k}{k!}.$$

Поскольку данное равенство справедливо для любого $\zeta \in \mathbb{C}$, с учетом определения ζ и равенства $e^a = e^4(\cos 3 + i \sin 3)$ получаем ответ: $e^{4z+3i} = e^4(\cos 3 + i \sin 3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k (z-1)^k}{k!}$.

Пример 2. Найти разложение функции $\cos^2 3z$ по целым неотрицательным степеням z.

Решение. Используем формулу понижения и разложение косинуса (2.3): $\cos^2 3z = \frac{1+\cos 6z}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(6z)^{2k}}{(2k)!}$.

Пример 3. Найти разложение функции $\frac{1}{1-z+z^2}$ в окрестности точки 0, найти круг сходимости получившегося ряда.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{1-z+z^2} = \frac{1+z}{(1-z+z^2)(1+z)} = \frac{1+z}{1+z^3} = \frac{1}{1+z^3} + z\frac{1}{1+z^3}$. Функцию $\frac{1}{1+z^3}$ возможно разложить в ряд Маклорена при помощи разложения (2.4): положим $\zeta = z^3$, тогда $\frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{1+\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{3k}$. Последний ряд сходится в круге $D = \{z \ : \ |z^{3k}| < 1\} = \{z \ : \ |z| < 1\}$. Поскольку почленное умножение ряда на отличное от нуля число не влияет на сходимость ряда, можно утверждать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{3k+1}$ имеет тот же круг сходимости и сходится в этом круге к $\frac{z}{1+z^3}$. Таким образом, получено справедливое для всякого $z \in D$ равенство $\frac{1}{1-z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{3k+1}$.

Задачи

2.1. Опираясь на разложение функции $\frac{1}{1-z}$, найти разложение следующих функций по степеням z и установить круг сходимости полученного разложения:

1) $\frac{1}{(1-z)^2}$; 2) $\frac{2}{(1+z)^3}$; 3) $\frac{z(z+a)}{(a-z)^3}$, $a \neq 0$; 4) $\frac{1}{z^2+a^2}$, $a \neq 0$; 5) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$;
6) $\frac{z^2+2z^4+z^6}{(1-z^2)^4}$; 7) $\frac{1}{(1-z)^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$.

Ответы:
1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$, $|z| < 1$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n$, $|z| < 1$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{a^{n+1}}$, $|z| < |a|$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{a^{2n+2}}$, $|z| < |a|$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}$, $|z| < 1$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^{2n}$, $|z| < 1$;
7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m!} z^n$, $|z| < 1$.

2.2. Найти разложение следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$:

1) $\frac{1}{(1+z)^2}$; 2) $\frac{1}{(1-z^2)^2}$; 3) $\frac{1}{(1+z^3)^2}$; 4) $\frac{1}{(1-z^6)^3}$.

Ответы:
1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{2n}$;
3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{3n}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^{6n}$.

2.3. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ следующих рациональных функций:

1) $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$; 2) $\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$; 3) $\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$; 4) $\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$;
5) $\frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

Ответы:

1) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$; 2) $-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}})z^n$;
3) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1}-\frac{1}{4^{n+1}})z^{2n+1}$; 4) $-\sum_{n=0}^{\infty}(z^{4n}+z^{4n-1})$;
5) $\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}(5n+6+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n}$.

2.4. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1) $\frac{1}{1+z+z^2}$; 2) $\frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$; 3) $\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$; 4) $\frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}$.

Ответы:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(z^{3n}-z^{3n+1})$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{3n+2}z^{3n+2}-2^{3n}z^{3n})$;
3) $\sum_{n=0}^{\infty}(z^{8n}-z^{8n+1})$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^{8n}-z^{8n+1})$.

2.5. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1) $\sin^2 z$; 2) $\cos^3 z$; 3) $\sin^4 z+\cos^4 z$;
4) $\cos^2 z+\operatorname{ch}^2 z$; 5) $e^z\sin z$; 6) $\operatorname{ch} z\cos z$.

Ответы:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}+3}{4}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$;
3) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n-2}}{(2n)!}z^{2n}$; 4) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n+1}}{(4n)!}z^{4n}$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{z^n}{n!}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}\frac{z^{4n}}{(4n)!}$.

2.6. С помощью метода неопределенных коэффициентов найти первые три отличные от нуля члена разложения следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$:

1) $\frac{z}{\ln(1+z)}$; 2) $\operatorname{tg} z$; 3) $\frac{z}{\operatorname{arctg} z}$; 4) $\frac{z}{\arcsin z}$; 5) $\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$; 6) $e^{z\cos z}$.

Ответы:

1) $1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{12}+\ldots$; 2) $z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\ldots$; 3) $1+\frac{1}{3}z^2-\frac{4}{45}z^4+\ldots$;
4) $1-\frac{1}{6}z^2-\frac{17}{360}z^4+\ldots$; 5) $1+\frac{7}{6}z^2+\frac{427}{360}z^4+\ldots$; 6) $1+z+\frac{1}{2}z^2+\ldots$.

Задания для самостоятельной работы

2.7. Найти разложение по целым неотрицательным степеням $z-z_0$ следующих функций, указать круг сходимости полученного ряда:

1) $\cos(2z+1),\ z_0=1$; 2) $\sin(3z-i),\ z_0=-1$;
3) $e^{iz+5},\ z_0=2$; 4) $\ln(4+2z),\ z_0=1$;
5) $(i+4z)^i,\ z_0=0$; 6) $\frac{1}{3+z^2},\ z_0=i$;
7) $\frac{1}{(z+1)^2},\ z_0=-i$; 8) $\frac{1}{z^2+2z+3},\ z_0=1$;
9) $e^{3z+1}\sin 2z,\ z_0=0$; 10) $e^{z-2i}\cos 4z,\ z_0=0$;
11) $\frac{z^6+2z^4}{z+3},\ z_0=1$; 12) $\frac{z^5+3z^3}{z+2},\ z_0=-1$.

3 Ряды Лорана. Изолированные особые точки аналитических функций

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце $\{z : 0 < |z-a| < r\}$ (или если $a=\infty$, то в кольце $\{z : r < |z| < \infty\}$), но не определена в самой точке a. В этом случае точку a называют *изолированной особой точкой* функции $f(z)$.

По поведению функции вблизи точки a различают следующие три типа изолированных особых точек.

1. Если предел $\lim_{z\to a} f(z)$ существует и конечен, то точка a называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$.

2. Если предел $\lim_{z\to a} f(z)$ существует, но равен бесконечности, то точка a называется *полюсом* функции $f(z)$.

3. Если предел $\lim_{z\to a} f(z)$ не существует, то точка a называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Задача 3.1. Проверить, что точка a является изолированной особой точкой для указанной функции, и установить тип изолированной особой точки:

1) $\frac{z^2-1}{z-1},\ a=1$; 2) $\frac{z}{\operatorname{tg} z},\ a=0$; 3) $\frac{1-\cos z}{z^2},\ a=0$;
4) $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z},\ a=0$; 5) $\frac{z^2-1}{z^3+1},\ a=\infty$; 6) $\frac{1}{(z^2+1)^2},\ a=i$;
7) $\frac{z^2+1}{z+1},\ a=\infty$; 8) $\frac{z}{1-\cos z},\ a=0$; 9) $\frac{z}{(e^z-1)^2},\ a=0$;
10) $e^{-z^2},\ a=\infty$; 11) $\sin\frac{\pi}{z^2},\ a=0$; 12) $e^{\operatorname{tg} z},\ a=\frac{\pi}{2}$.

Ответы:
1)–5) — устранимая особая точка; 6)–9) — полюс; 10)–12) — существенно особая точка.

Задача 3.2. Найти все изолированные особые точки для следующих функций и установить их тип:

1) $\frac{z}{\sin z}$; 2) $\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}$; 3) $z^2\sin\frac{z}{z+1}$; 4) $\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$; 5) $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$; 6) $z\left(e^{1/z}-1\right)$;
7) $e^{\operatorname{ctg}(\pi/z)}$; 8) $\sin(e^{1/z})$.

Ответы:
1) $z=0$ — устранимая особая точка; $z=\pm\pi,\pm2\pi,\ldots$ — полюсы;
2) $z=0$ — устранимая особая точка; $z=\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\ldots$ — полюсы;
3) $z=\infty$ — полюс; $z=-1$ — существенно особая точка;
4) $z=\infty$ и $z=1$ — устранимые особые точки; $z=-1$ — существенно особая точка;
5) $z=0$ — устранимая особая точка; $z=\pm\pi,\pm2\pi,\ldots$ — полюсы;
6) $z=\infty$ — устранимая особая точка; $z=0$ — существенно особая точка;
7) $z=\pm1,\pm1/2,\pm1/3,\ldots$ — существенно особые точки;
8) $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — устранимая особая точка.

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n, \tag{3.1}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — набор комплексных чисел, называется *рядом Лорана* с центром в точке z_0. По определению, ряд Лорана (6.1) сходится, если сходятся оба ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$

и $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$. Таким образом, ряд (6.1) сходится в кольце (*кольце сходимости*)

$$\{z \ : \ r < |z-z_0| < R\},$$

$$\text{где } r = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\,c_{-n}\,|}, \quad R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\,c_n\,|}},$$

если $R \le r$, то ряд расходится в каждой точке.

Задача 3.3. Найти кольцо сходимости следующих рядов Лорана:

1) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} z^n$; 2) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$; 3) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{\mathrm{ch}(\alpha n)}$, $\alpha > 0$;
4) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$; 5) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2^{-n^3}+1)^{-1}(z-a)^{2n}$; 6) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$;
7) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2} z^{n^3}$; 8) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n z^n$;

Ответы:
1) $\{z \ : \ \frac{1}{2} < |z| < 2\}$; 2) $\{z \ : \ 1 < |z| < 3\}$; 3)$\{z \ : \ e^{-\alpha} < |z-1| < e^{\alpha}\}$;
4) $\{z \ : \ 0 < |z+1| < +\infty\}$; 5) $\{z \ : \ 0 < |z-a| < 1\}$; 6)-8) — $\emptyset$.

Ряд Лорана (3.1) сходится абсолютно в кольце сходимости и равномерно на любом компакте, содержащемся в данном кольце. Его сумма

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{3.2}$$

представляет собой голоморфную в данном кольце функцию. В частности, если кольцо сходимости представляет собой проколотую окрестность некоторой точки расширенной комплексной плоскости, данная точка является изолированной особой (либо регулярной) точкой для суммы ряда Лорана.

Любая функция $f(z)$, голоморфная в кольце $\{z \ : r < |z-z_0| < R\}$, разлагается в ряд Лорана (3.2) по степеням $z-z_0$, сходящийся в этом кольце. Коэффициенты c_n этого разложения удовлетворяют равенству

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad \forall\ \rho \in (r, R),\ \forall\ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

На практике, однако, формула (3.3) практически никогда не используется для нахождения коэффициентов разложения конкретных функций в ряд Лорана. Обычно разложение функции в ряд Лорана тем или иным способом сводится к разложению в ряд Тейлора.

Пример. Найти разложение в ряд Лорана функции $\frac{1}{z-a}$ $(a \ne 0)$:
а) в окрестности точки a; б) в окрестности точки 0; в) в окрестности точки ∞.

Решение. а) Функция $\frac{1}{z-a}$ является степенью $z-a$, поэтому она совпадает со своим лорановским разложением в окрестности точки a.

Для решения поставленных в пп. б) и в) задач используем одну и ту же формулу (2.4) суммы геометрической прогрессии, следя при этом за выполнением необходимого условия сходимости соответствующего ряда.

б) $\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(-a)\left(1-\frac{z}{a}\right)}$. В окрестности нуля $\{z\ :\ |z|<|a|\}$ выполняется условие $\left|z/a\right|<1$, поэтому в данной окрестности справедливо равенство $\frac{1}{(-a)\left(1-\frac{z}{a}\right)}=\frac{1}{(-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)z^n}{a^{n+1}}$.

в) $\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z\left(1-\frac{a}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}$. В области $\{z\ :\ |z|>|a|\}$, являющейся окрестностью бесконечности, выполняется условие $\left|a/z\right|<1$, поэтому в данной области справедливо равенство $\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$. Таким образом, в этом случае $\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Задача 3.4. Выяснить, допускают ли следующие функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки a:

1) $\cos\frac{1}{z},\ a=0;$ 2) $\cos\frac{1}{z},\ a=\infty;$ 3) $\sec\frac{1}{z-1},\ a=1;$
4) $\operatorname{ctg}z,\ a=\infty;$ 5) $\operatorname{th}\frac{1}{z},\ a=0;$ 6) $\frac{z^2}{\sin(1/z)},\ a=0;$ 7) $\frac{1}{\sin z-5},\ a=\infty.$

Ответы: 1)–2) допускают, 3)–7) не допускают.

Задача 3.5. Разложить по степеням $z-a$ в кольце $\{z\ :r<|z-a|<R\}$ следующие функции:

1) $\frac{1}{z(z-3)^2},\ a=1,\ r=1,\ R=2;$ 2) $\frac{1}{z^2(z^2-9)},\ a=1,\ r=1,\ R=2;$
3) $\frac{z^3}{(z+1)(z-2)},\ a=-1,\ r=0,\ R=3;$
4) $\frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)},\ a=0,\ r=2,\ R=+\infty;$
5) $z^3e^{1/z},\ a=0,\ r=0,\ R=+\infty;$
6) $z^2\sin\left(\pi\frac{z+1}{z}\right),\ a=0,\ r=0,\ R=+\infty;$
7) $z^3\cos\frac{1}{z-2},\ a=2,\ r=0,\ R=+\infty;$ 8) $\frac{e^z}{z(1-z)},\ a=0,\ r=0,\ R=1.$

Ответы:
1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{9\cdot2^{n+2}}(z-1)^n+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\frac{1}{(z-1)^{n+1}};$
2) $\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(z-1)^{n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27\cdot2^{2n+3}}(z-1)^n;$
3) $\frac{1}{3(z+1)}-\frac{8}{9}+\frac{19}{27}(z+1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n;$ 4) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-n)^n}{z^{2n+2}};$
5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}};$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n-1}}{(2n-1)!z^{2n-3}};$
7) $(z-2)^3+6(z-2)^2+\frac{23}{2}(z-2)+5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!(z-2)^{2n}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+2)!}\frac{16n^2+24n+5}{(z-2)^{2n}};$
8) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1\cdot2}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)z^n.$

4 Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов

Вычетом функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке z_0 называется число

$$\operatorname{res}_{z_0}f(z)=\begin{cases}c_{-1}, & \text{если } z_0\neq\infty,\\ -c_{-1}, & \text{если } z_0=\infty,\end{cases}$$

где c_{-1} — коэффициент лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 при $(z-z_0)^{-1}$, если $z_0 \neq \infty$; либо при z^{-1}, если $z_0 = \infty$.

Вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, являющейся изолированной особой точкой этой функции, совпадает с деленным на $2\pi i$ интегралом от функции $f(z)$ по границе достаточно малой окрестности точки z_0 (при этом интеграл по границе области берется в таком направлении, чтобы при движении по граничной кривой область оставалась слева).

Далее приведены основные формулы и соображения, полезные при отыскании вычетов.

1) Пусть точка $z_0 \neq \infty$ является простым полюсом функции $f(z)$. Тогда

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z). \tag{4.1}$$

2) Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в конечной точке z_0, при этом $\psi(z)$ удовлетворяет условиям $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{4.2}$$

3) Если точка ∞ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то

$$\mathrm{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(f(\infty) - f(z)\right), \tag{4.3}$$

где $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$.

4) Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где функции $\varphi(z)$ голоморфна в конечной точке z_0, и $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \tag{4.4}$$

6) *Теорема о полной сумме вычетов.* Если функция $f(z)$ аналитична всюду в $\hat{\mathbb{C}}$, кроме конечного числа точек $z_0 = \infty, z_1, \ldots z_n$, то справедлива формула

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{res}_{z_k} f(z) = \sum_{z\in\hat{\mathbb{C}}} \mathrm{res}_z f(z) = 0. \tag{4.6}$$

7) Если функция $f(z)$ является четной, и точки 0 и ∞ являются изолированными особыми точками этой функции, то

$$\mathrm{res}_0 f(z) = \mathrm{res}_{\infty} f(z) = 0. \tag{4.7}$$

8) Если функция $f(z)$ является четной, а z_0 — произвольная изолированная особая точка этой функции, то

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = -\mathrm{res}_{-z_0} f(z). \tag{4.8}$$

9) Если функция $f(z)$ является нечетной, а z_0 — произвольная изолированная особая точка этой функции, то

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \mathrm{res}_{-z_0} f(z). \tag{4.9}$$

10) Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в конечной точке z_0, но имеют в этой точке нули порядка выше первого. Тогда формулы (4.1), (4.2) и (4.5) мало помогают при вычислении вычета, в такой ситуации бывает полезным использование формулы Тейлора по отношению к функциям $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и точке z_0.

Задача 4.1. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных особых точках:

1) $\frac{1}{z+z^3}$; 2) $\frac{z^2}{1+z^4}$; 3) $\frac{z^2}{(1+z)^3}$; 4) $\frac{1}{(z^2+1)^3}$; 5) $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^3}$;
6) $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n},\ n\in\mathbb{N}$; 7) $\frac{1}{\sin\pi z}$; 8) $\operatorname{ctg}\pi z$; 9) $\operatorname{th} z$; 10) $\operatorname{cth}^2 z$; 11) $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$;
12) $\frac{1}{e^z+1}$; 13) $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$; 14) $\frac{1}{\sin z^2}$.

Ответы:
1) 1 при $z=0$, $-\frac{1}{2}$ при $z=i$, $-\frac{1}{2}$ при $z=-i$;
2) $\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$ при $z=e^{\frac{\pi i}{4}}$, $\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$ при $z=e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$ при $z=e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $-\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$ при $z=e^{-\frac{3\pi i}{4}}$;
3) 1 при $z=-1$; 4) $-\frac{3i}{16}$ при $z=i$, $\frac{3i}{16}$ при $z=-i$;
5) $-\frac{1}{2}$ при $z=1$, $\frac{1}{4}$ при $z=i$, $\frac{1}{4}$ при $z=-i$; 6) C_{2n}^{n-1} при $z=1$;
7) $\frac{(-1)^n}{\pi}$ при $z=n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{1}{\pi}$ при $z=n,\ n\in\mathbb{Z}$;
9) 1 при $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i,\ n\in\mathbb{Z}$; 10) 0 при $z=\pi i n,\ n\in\mathbb{Z}$;
11) $-\sin 1$ при $z=1$; 12) -1 при $z=(2n+1)\pi i,\ n\in\mathbb{Z}$;
13) 0 при $z=1$; 14) 0 при $z=0$, $\frac{i^{2n-k}}{2\sqrt{\pi n}}$ при $z=i^k\cdot\sqrt{\pi n}$, где $k\in\{0,1,2,3\},\ n\in\mathbb{N}$.

Задача 4.2. Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

1) $\frac{z^4+1}{z^6-1}$; 2) $\cos\left(\pi\frac{z+2}{2z}\right)$; 3) $\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$; 4) $\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$; 5) $\frac{(z^{10}+1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$; 6) $z\cos^2\frac{\pi}{z}$.

Ответы: 1) 0; 2) π; 3) 0; 1) -1; 5) -1; 6) π^2.

Задача 4.3. Найти вычеты следующих функций во всех их особых точках и в бесконечности:

1) $\frac{1}{z^6(z-2)}$; 2) $\frac{1+z^8}{z^6(z+2)}$; 3) $\frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$; 4) $\frac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)},\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{N}$; 5) $\sin z\sin\frac{1}{z}$;
6) $\frac{\cos z}{(z^2+1)^2}$; 7) $\frac{1+z^8}{z^4(z^4+1)}\cos z\operatorname{ch} z$; 8) $\frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

Ответы:
1) $\frac{1}{64}$ при $z=2$, $-\frac{1}{64}$ при $z=0$, 0 при $z=\infty$;
2) $\frac{257}{64}$ при $z=-2$, $-\frac{1}{64}$ при $z=0$, -4 при $z=\infty$;
3) 0 при $z=0$ и $z=\infty$, $-\frac{1023}{256}i$ при $z=2i$, $\frac{1023}{256}i$ при $z=-2i$;
4) a^n+a^{-n} при $z=a$, $-a^{-n}$ при $z=0$, $-a^n$ при $z=\infty$;
5) 0 при $z{=}0$ и $z{=}\infty$; 6) $-\frac{i}{4e}$ при $z=i$, $\frac{i}{4e}$ при $z{=}-i$, 0 при $z{=}\infty$;
7) 0 при $z=0$ и $z=\infty$, $-\frac{1}{4}e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}(\cos\sqrt{2}+\operatorname{ch}\sqrt{2})$ при $z=e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$;
8) $-\frac{1}{4e}$ при $z=i$, $-\frac{1}{4e}$ при $z=-i$, $\frac{1}{2e}$ при $z=\infty$.

Мощным средством для вычисления интегралов является следующая *теорема Коши о вычетах.*

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, за исключением конечного множества точек A. Предположим, что кусочно-гладкая область $O \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, вместе со своей $\widehat{\mathbb{C}}$-границей содержащаяся в G, содержит множество A. Тогда

$$\int\limits_{\partial O} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \mathrm{res}_a f(z) = 2\pi i \sum_{a\in O} \mathrm{res}_a f(z)$$

(здесь, как и выше, ∂O обозначает стандартно ориентированную $\widehat{\mathbb{C}}$-границу множества O.)

<u>Замечание</u>. Если область O содержит бесконечно удаленную точку, то данная точка причисляется к точкам множества A.

Задача 4.4. Вычислить интегралы по замкнутому контуру Γ, считая направление обхода положительным:

1) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1},\ \Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z-1| = 1\};$
2) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1},\ \Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ :\ x^2 - xy + y^2 + x + y = 0\};$
3) $\int\limits_{\Gamma} \frac{z^3\,dz}{2z^4+1},\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = 1\};$ 4) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)},\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = 2\};$
5) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2},\ \Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| = 4\};$
6) $\int\limits_{\Gamma} \sin\frac{1}{z}\,dz,\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = r\};$ 7) $\int\limits_{\Gamma} \sin\frac{z}{z+1}\,dz,\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = 3\};$
8) $\int\limits_{\Gamma} \frac{z\,dz}{e^{z^2}-1},\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = 4\};$ 9) $\int\limits_{\Gamma} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)},\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = 5\};$
10) $\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}\,dz,\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = 3\};$
11) $\int\limits_{\Gamma} (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\,dz,\ \Gamma = \{z \ :\ |z| = 3\}.$

Ответы:
1) $-i\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(-1+i)$; 3) πi; 4) $-\frac{\pi i}{121}$; 5) 0; 6) 2π;
7) $-2\pi i\cos 1$; 8) $10\pi i$; 9) 0; 10) $2\pi i$; 11) $-2\pi i(\sin 1 + \cos 1)$.

Задача 4.5. Вычислить интегралы по стандартно ориентированной границе области O:

1) $\int\limits_{\partial O} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)},\ O = \{z \ :\ |\,z\,| < 2\};$
2) $\int\limits_{\partial O} \frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}\,dz,\ O = \{z \ :\ |\,z\,| < 3\};$
3) $\int\limits_{\partial O} \frac{z^3}{z^4-1}\,dz,\ O = \{z \ :\ |\,z\,| < 2\};$ 4) $\int\limits_{\partial O} \frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}\,dz,\ O = \{z \ :\ |\,z\,| < 2\};$
5) $\int\limits_{\partial O} \sin\frac{z}{z+1}\,dz,\ O = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \ :\ |\,z\,| > 3\};$
6) $\int\limits_{\partial O} z\sin\frac{z+1}{z-1}\,dz,\ O = \{z \ :\ |\,z\,| < 2\};$
7) $\int\limits_{\partial O} \sin\frac{1}{z-1}\,dz,\ O = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \ :\ |\,z-1\,| > 1\};$

8) $\int\limits_{\partial O} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z}\,dz,\ O=\{z\ :\ |\,z-2\,|+|\,z+2\,|<6\}$;
9) $\int\limits_{\partial O} z\cos\frac{z}{z+1}\,dz,\ O=\{z\ :\ |\,z\,|<2\}$;
10) $\int\limits_{\partial O} \frac{\sin z\,dz}{(z^3-z)(z-i)},\ O=\{z\ :\ |\,z-1\,|<1\}$;
11) $\int\limits_{\partial O} \frac{\operatorname{ctg} z}{z}\,dz,\ O=\{z\in\widehat{\mathbb{C}}\ :\ |\,z\,|>1\}$;
12) $\int\limits_{\partial O} \frac{e^{\pi z}}{2z^2-i}\,dz,\ O=\{z\ :\ |\,z\,|<1,\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0\}$;
13) $\int\limits_{\partial O} \frac{z\,dz}{e^{z^2}-1},\ O=\{z\in\widehat{\mathbb{C}}\ :\ |\,z\,|>4\}$; 14) $\int\limits_{\partial O} \frac{z^3\,dz}{e^{z^2}-1},\ O=\{z\ :\ |\,z\,|<4\}$;
15) $\int\limits_{\partial O} \frac{z^2\,dz}{e^{2\pi i z^3}-1}\,dz,\ O=\left\{z\ :\ |\,z\,|<\sqrt[3]{n+\frac{1}{2}}\right\},\ n=0,1,2,\ldots$.

Ответы:

1) 0; 2) 0; 3) $2\pi i$; 4) $-\frac{2\pi i}{3}$; 5) $2\pi i\cos 1$; 6) $4\pi i(\cos 1-\sin 1)$;
7) $-2\pi i$; 8) $2\pi i$; 9) $\pi i(\cos 1+2\sin 1)$; 10) $\frac{\pi}{2}(i-1)\sin 1$;
11) 0; 12) $\frac{\pi}{2}(i-1)e^{\frac{\pi}{2}}$; 13) $-6\pi i$; 14) 0; 15) $n+1$.

Задачи для самостоятельной работы

4.6. Найти вычеты следующих функций во всех их изолированных особых точках:

1) $\frac{z^2+2}{z^6(z^2+5z+6)}$; 2) $\frac{\sin(2e^z+3)}{(z-1)^2(z+1)}$; 3) $\frac{\int_0^z \sin 2\zeta\,d\zeta}{z^3-2z^2+1}$; 4) $\frac{\operatorname{ch}(z-4)}{z^3-1}$;
5) $\frac{\sin 2z(z+4)}{(z-3)z^2}$; 6) $\frac{(z+6)^2}{(z^2-5z+6)^2}$; 7) $\frac{\sin\frac{1}{z-4}}{(z^2+4)(z-1)}$; 8) $\frac{1}{(z-3)(z+\pi)^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; 9) $\frac{\cos 3z-1}{(z^3+2z^2+z)(z-1)}$;
10) $\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n(2n)!}$; 11) $\frac{\sin(\cos z)-\operatorname{ch}(\operatorname{sh} z)}{z^4(3-z^2)}$;
12) $\frac{\left(\frac{z-1}{z+2}\right)^2}{\frac{z+1}{z-2}}$; 13) $\frac{\sin(1+\cos z)}{(z-1)^2(1+z)}$; 14) $e^{\frac{1}{2z+3}}\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n}$; 15) $\frac{\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}$;
16) $\frac{\sin(1-z)}{\left(z+\frac{1}{z}\right)}$; 17) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\frac{1}{z}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n z^n}{n!}$; 18) $\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{e^{iz}}$; 19) $\frac{\operatorname{th}(\cos z)}{z^3-z}$;
20) $\frac{1}{z^2+1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n$.

4.7. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{\partial O} \frac{\sin(z^2+1)}{z^6(z^2-1)}\,dz,\ O=\{z\in\widehat{\mathbb{C}}\ :\ |\,z\,|>\frac{1}{2}\};$

2) $\int\limits_{\partial O} \frac{ze^{3z+1}\,dz}{(z^2+1)(z-3)},\ O=\{z\ :\ |\,z\,|<2\};$

3) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos(e^z-3)\,dz}{(z^3-1)(2z-3)},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z-1\,|=1\};$

4) $\int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n z}{n!}\right)\frac{dz}{z^3+z},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z-i\,|=\frac{3}{2}\};$

5) $\int\limits_{\Gamma} \frac{(\operatorname{ch} z-1)\,dz}{(\operatorname{ch} z+1)^2},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z-\pi i\,|=\pi\};$

6) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh}(z^2+1)\,dz}{(z^2+1)(z-1)},\ \Gamma=\{z\ :\ |\operatorname{Re} z\,|+|\operatorname{Im} z-1\,|=1\};$

7) $\int\limits_{\Gamma} \frac{(z^2+3z+6)\,dz}{(z^2+4)(z-4)^2(z+2)},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=3\};$

8) $\int\limits_{\Gamma} \frac{(z^2+3z+6)\,dz}{(z^2+4)(z-3)^2(z+2)},\ \Gamma=\{z\ :\ |\operatorname{Re} z-2\,|+|\operatorname{Im} z\,|=2\};$

9) $\int\limits_{\partial O} \frac{(z^2+3z+6)\,dz}{(z^2+4)(z-4)^2(z+2)},\ O=\{z\ :\ 1<|\,z\,|<3,\ \operatorname{Re} z>-1\};$

10) $\int\limits_{\partial O} \frac{(z^2+3z+6)\,dz}{(z^2+4)(z-4)^2(z+2)},\ O=\{z\ :\ -1<\ \operatorname{Re} z\ <5,\ -1<\ \operatorname{Im} z\ <3\};$

11) $\int\limits_{\Gamma} \frac{(z+3)\,dz}{(\operatorname{sh} z-\operatorname{ch} z)(2z-1)},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=1\};$

12) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\operatorname{tg} z(10z+9)^2},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=1\};$

13) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\ln(6+z)\,dz}{(z^2+1)e^{2z}}\,dz,\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=2\}$, где ln — главное значение логарифма;

14) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}{z^2+6z+8}\,dz,\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z+3\,|=2\};$

15) $\int\limits_{\partial O} \frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}{z^2+6z+8}\,dz,\ O=\{z\ :\ 1<|\,z+4\,|<5\};$

16) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(\sin z-\cos z)\left(1-\frac{\pi}{2z}\right)}\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z-\frac{\pi}{2}\,|=\frac{\pi}{2}\};$

17) $\int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n z^n}{n}\right)\frac{dz}{z^6},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=\frac{1}{2}\};$

18) $\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z\,dz}{(e^z-1)^2},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=2\};$

19) $\int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{z^{2n-1}}\right)\frac{dz}{\sin z},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=\frac{\pi}{2}\};$

20) $\int\limits_{\Gamma} \left(\int_0^{z+4}\frac{d\zeta}{1+\zeta}\right)\frac{dz}{z^2+2},\ \Gamma=\{z\ :\ |\,z\,|=2\}.$

Литература

1. *Справочное пособие по высшей математике. Т. 4. Функции комплексного переменного: теория и практика* / А. К. Боярчук. — М. : Едиториал УРСС, 2001. — 352 с. — ISBN 5-354-00020-3.

2. *Сборник задач по теории функции комплексного переменного* / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. — М. : Наука, 1975. — 319 с.

3. *Сборник задач по теории аналитических функций* / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк и др. — М. : Наука, 1972. — 416 с.

4. *Задачи по теории функции комплексного переменного* / Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов. — М. : Изд-во МГУ, 1992. — 255 с. — ISBN 5-211-01574-6.

5. *Краткий курс теории аналитических функций* / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1966. — 388 с.

6. *Введение в комплексный анализ. ч.1* / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1985. — 336 с.